

Zadania 2. kola letnej série 2018/2019

Termín: 08.04.2019

Naša adresa: Riešky, Mgr. Viera Babišová, Gymnázium Grösslingová, Grösslingová 18, 811 09 Bratislava 1

Elektronické riešenia: <http://riesky.sk/>

“Au,” zakričí Paľko od bolesti na chrbte a zobudí sa. “Kde to som? Čo to bolo?” pomyslí si, a keď sa otočí, zistí, že Karin naňho hodila banán. Pozrie sa naspäť a zistí, že sedí na hodine matematiky a pani profesorka ho vyvolala ako najlepšieho žiaka matematiky z triedy opraviť príklad, ktorý je napísaný na tabuli:

Príklad č. 1: Na tabuli je napísaný príklad:

$$666 + 911 + 17 = 2019$$

Paľko ho chce opraviť nasledovným spôsobom. Najskôr si nájde kladné celé číslo. To potom prirába k prvému sčítancu, odráta od druhého a vynásobí ním tretí, vďaka čomu bude nápis na tabuli platiť. Aké je hľadané číslo? Čo bude po tejto oprave napísané na tabuli?

Keď Paľko dorátať, sadol si zmätený naspäť do lavice. Zazvonilo, no jeho myšlienky bežali rýchlejšie než inokedy predtým. Ako dlho spal? Kam išli vlakom? Vysníval si snáď aj krásnu devu? Zo zamyslenia ho vytrhol Miro, ktorý sa mu snažil ukázať jeho zbierku známok. “Veď to je úplne úžasné!” povedal Miro a čaroval tam so svojimi známami. Paľko zo začiatku nechápal, o čo mu ide, no keď sa na to pozrel, hneď tomu porozumel:

Príklad č. 2: Miro má päť jednotiek, päť dvojok, päť trojok, päť štvoriek a päť pätiok. Zistil, že z nich vie zostaviť päť päťmiestnych čísel, ktoré sa čítajú odpredu rovnako ako odzadu (napr. 32223). Od Paľka chce, aby zistil, akú najmenšiu a akú najväčšiu hodnotu súčtu vie Miro dostať po sčítaní týchto jeho čísel.

„Paľko, pod' so mnou,” zakričala na Paľka po zvonení pani profesorka Dada. „Takéto správanie ti na mojich hodinách odmietam tolerovať! Nemysli si, že som to nevidela. Za to, že si spal na hodine a bavil sa s Mirom, mi pôjdeš teraz pomôcť doniesť krabice z vrátnice.” Paľko ticho zanádal, no nezostávalo mu nič iné, len poslúchnuť pani profesorku Dadu a ísť dole na vrátnicu. Tam uvidel 8 krabíc, ktoré boli zatvorené. Paľko ako správny zvedavý matematik chcel zistiť, prečo sú položené tak, ako sú. Dada mu len odvetila, že sú položené podľa čísel v nich. No nebolo to také jednoduché. Paľko nemohol zistiť, aké čísla sú v krabici inak ako týmto spôsobom:

Príklad č. 3: Paľko zočil 8 krabíc rozostavených do kruhu. Každá krabica má nejaké číslo (dve krabice môžu mať rovnaké číslo) a dve susedné čísla sa líšia práve o 1. Pani profesorka Dade môže Paľko položiť niekoľko otázok a každou otázkou zistí číslo v nejakej krabici. Zaujímajú ho krabice, ktoré sú oproti sebe. Vie Paľko bez opýtania povedať, či nejaká dvojica krabíc oproti sebe má rovnaké číslo? Ak áno, prečo? Ak nie, na koľko najmenej otázok vie Paľko zistiť, či nejaká dvojica krabíc oproti sebe má rovnaké číslo?

Ako tak Paľko donosil krabice, myslel si, že už bude mať pokoj a bude môcť rozmýšľať o tom, čo bol a čo nebol sen. No život je už raz taký, že pani profesorka Dada mu síce pekne poďakovala za pomoc, no povedala, že aby sa toto správanie neopakovalo, musí Paľka ešte potrestať. Paľkovi pripravila náročný príklad, ktorý bude od Paľka zajtra požadovať vypočítaný.

Príklad č. 4: Pani profesorka Dada zadala Paľkovi takéto čísla $-1, -2, -3, \dots, -2019$. Má si z nich niektoré ľubovoľne vybrať (no istotne aspoň jedno). Paľo si chce vybrať správne a tak si vypísal všetky možné kombinácie čísel, ktoré si vie vybrať. Následne si napísal súčin čísel v každej kombinácii a všetky tieto súčiny sčítal. Aký je výsledný súčet týchto čísel?

Paľko sa pobral po škole domov s jeho kamarátkou Karin, ktorá bývala o jeden dom na kruhovom námestí ďalej. Keď ale prišiel k domu, zistil že jeho dom má iné číslo, ako bol zvyknutý. To sa mu nezdalo a tak skúsil otvoriť bránu, no kľúčik sedel. Karinin dom mal tiež iné číslo, ako bola zvyknutá avšak tiež to bol jej dom. Paľko sa pozrel do schránky a bol tam list od starostu mesta s vyhlásením o zmene čísel domov z dôvodu lepšej prehľadnosti pre poštu. Paľko bol z toho mierne znepokojený, pretože nevedel na akú adresu má poslať list k narodeninám, ktorý chce odoslať svojej kamarátke Hanke, ktorá býva v 40. dome.

Príklad č. 5: Na kruhovom námestí je 108 domov, každý očíslovaný prirodzeným číslom, pričom súčet ľubovoľných dvadsiatich domových čísel vedľa seba je 2020. Dom na 37. mieste má číslo 47, dom na 66. mieste je s číslom 113 a dom na 87. mieste má číslo 202. Aké číslo má dom, ktorý je na 40. mieste?

Keď už bol konečne v pokoji doma, začal premýšľať, čo z toho všetkého sa mu len snívalo a čo bola realita. Zamyslel sa, že ak bola deva skutočná, musí vedieť niekde nájsť jej číslo. Začal hľadať, no už bola tma, ktorá mu hľadanie značne sťažovala. Rozhodol sa, že by bolo vhodné zapnúť si lampu. Tá bola ale zaheslovaná jeho bratom Maťkom, ktorý k nej pridal návod k heslu, ktorý znel takto:

Príklad č. 6: Heslo pre zapnutie lampy bolo také najväčšie prvočíslo, že každá súvislá skupina cifier v tomto čísle bola tiež prvočísлом. Takže napríklad pre prvočíslo \overline{ABCD} by museli byť prvočísla všetky čísla $A, B, C, D, AB, BC, CD, ABC, BCD$. Naše prvočíslo však môže mať ľubovoľný počet cifier. Aké bolo heslo pre zapnutie lampy?

Keď konečne zasvietil svetlo, všimol si nezvyčajnú vec. Žiarovka z lampy žiarila do rôznych zvláštnych obrazcov, kružníc. Zdá sa to Paľkovi alebo začína šalieť? Alebo sa mu to zase len sníva? Paľko sa ale uchvátil pohľadom natoľko, že na to nemyslel.

Príklad č. 7: Paľko vidí svetelnú kružnicu k_1 so stredom S a polomerom r_1 . Na jej obode je umiestnených n vzájomne rovnakých kružníc s polomerom r tak, že sa každá dvojica susedných kružníc dotýka v práve jednom bode. Následne vytvorí kružnicu k_2 so stredom S a polomerom r_2 tak, že kružnica k_2 s každou kružnicou na obode zdieľa práve jeden bod. Nájdite všetky n také, aby platilo $r = r_2$.

Paľko strávil nad pozeraním obrazcov z lampy asi hodiny. Alebo nie? Sám nevie, pretože začal postupne strácať pojem o čase... Čo sa to s ním len deje? Keď sa už konečne uvedomil, že stráca čas nad divnými obrázkami, rozhodol sa Maťkovi ako pomstu tiež zaheslovať lampu. Spravil to jednoduchým spôsobom:

Príklad č. 8: Na papierik si postupne za sebou napísal cifry 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Do niektorých medzier medzi nimi Paľko dopísal znamienko "+". Takto vzniknutý výraz potom vypočítal. Dokážte, že nech Paľko dopísal znamienka kamkoľvek, výsledný súčet bol určite deliteľný deviatimi.

Paľko zacítil úžasnú vôňu. Keď prišiel do kuchyne, zistil, že mama upiekla tortu. Kedy ju vlastne upiekla? Koľko je hodín? Prečo jeho mama piekla tortu? Paľkove myšlienky sa začali hmýriť čím ďalej, tým viac. Nedokázal s nimi sám žiť, tak radšej išiel sledovať mamu. Mama upiekla cesto na tortu v štvorcovej forme, no tortu chcela kruhovú. Teda začala vyrezávať. Jej vyrezávanie vyzeralo takto:

Príklad č. 9: Torte v štvoruholníkovej forme $ABCD$ mama vpísala nožikom kružnicu. Body E, F, G, H sú postupne body dotyku kružnice so stranami AB, BC, CD, AD . Body E, F, G sú zároveň stredmi strán AB , resp. BC, CD . Dokážte, že forma na pečenie $ABCD$ je štvorcová.

Paľka oslepila žiara. Odkiaľ tá žiara išla? Kde to Paľko je? Po chvíli si všimol rovinu. A na rovine uvidel devu. Nedokázal sa vynadívať. Aká bola krásna! Zrazu zočil ďalšiu. Takú istú. A ďalšiu, a ďalšiu? Všade okolo seba videl devy.

Prémia: V rovine je 30 diev (devu považujeme za bod) a každé dve devy sú spojené úsečkou. Ako boli tieto devy rozmiestnené, keď vieme, že devy chceli, aby čo najviac úsečiek medzi nimi malo dĺžku 1? Koľko najviac mohli devy vytvoriť takýchto úsečiek?

Paľko sa po štyroch doplazil k tej, ktorá bola jeho srdcu najbližšia a spýtal sa jej jednu jedinú otázku: „Si skutočná?“ Deva sa naňho otočila a príjemným hlasom, takým jemným a nežným ako nič, čo kedy Paľko počul, riekla: „Áno som to ja, Paľko, deva zo zastávky, Tánička, pod' so mnou,“ povedala mu a tiahla ho za ruku preč. A Paľkovi nezostávalo nič iné, len s ňou ísť do neznáma.