

## Zadania 3. kola zimnej série 2017/2018

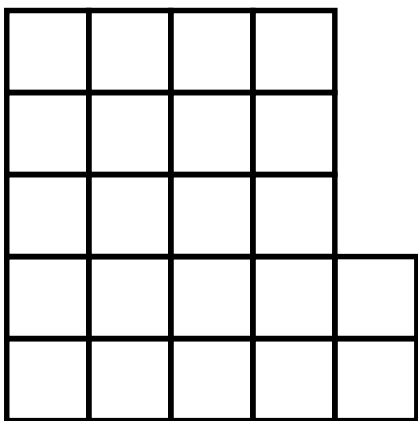
Termín: 11.12.2017

Naša adresa: Riešky, Mgr. Viera Babišová, Gymnázium Grösslingová, Grösslingová 18, 811 09 Bratislava 1

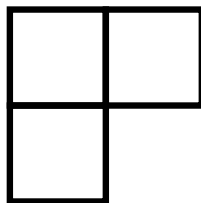
Elektronické riešenia: <http://riesky.sk/>

Naštastie sa Paľonardovi, Zajffaellovi aj ctenému kráľovi podarilo prejsť cez celú záhradu. Kráľ však stále nebol úplne spokojný: “Ako má moje služobníctvo vedieť kde sú nasadené kvety a kde sa nachádzajú polia s ovocím a zeleninou? Potreboval by som od vás plán ako táto záhrada vyzerá, aby som vedel koľko jedla z mojej záhrady môžem očakávať.” Paľonardo si bohužiaľ už nepamätal čo v záhrade bolo, ale Zajffaello o nej vedel jednu dôležitú vec.

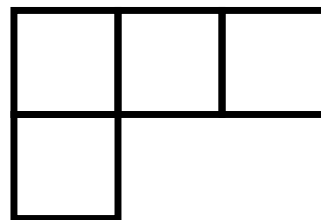
**Príklad č. 1:** Presný tvar záhrady je znázornený na obrázku 1. Všetko čo na záhrade rástlo bolo vždy usporiadané v špeciálnych kúskoch. Zajffaello tvrdil, že ovocie a zelenina rastú na častiach záhrady, ktoré vyzerajú ako kúsok na obr. 2, a kvety rastú na kúskoch ako obr. 3. Na každom políčku záhrady rastie buď ovocie so zeleninou alebo kvety a to vždy práve v takých kúskoch aké sú nakreslené na obrázkoch. Koľko kúskov s ovocím a zeleninou sa podľa Zajffaella nachádza v kráľovskej záhrade (nájdite všetky možnosti)?



Obr. 1: Záhrada



Obr. 2: Ovocie a zelenina



Obr. 3: Kvety

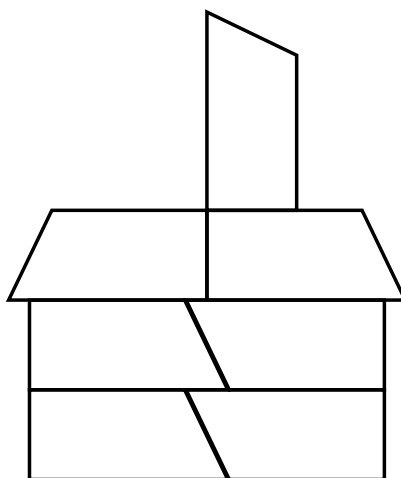
Po tom, čo Paľonardo kráľovi odpovedal a povedal mu, koľko čoho mu na záhrade rastie ich kráľ štedro odmenil. Oba sa vedeli, čo s toľkými peniazmi spravia - plánovali si kúpiť vlastný ostrov. Zistili však, že im stále niekoľko mincí zostane, tak sa rozhodli zahrať si hru.

**Príklad č. 2:** Paľonardo a Zajffaello sa hrali hru s mincami. Ich hracia plocha bol riadok s  $n$  políčkami. Hráči sa postupne striedajú v ťahoch, pričom v jednom ťahu hráč položí mincu na ľubovoľné políčko, na ktorom sa nenachádza minca a zároveň sa nenachádza ani na dvoch (resp. jednom ak je to na kraji) tesne susedných políčkach. Hráč, ktorý už nemá kam umiestniť mincu prehráva. Paľonardo ako veľký majster začína. Zistite a zdôvodnite pre každú možnosť, kto má víťaznú stratégiu ak:

- $n = 5$
- $n = 6$
- $n = 8$

Prvá vec, ktorú sa rozhodli na ich ostrove spraviť je, samozrejme, postaviť si dom, aby mali kde bývať.

**Príklad č. 3:** Na obrázku 4 je plán domu, ktorý si chce Paľonardo postaviť zložený zo siedmich rovnakých štvoruholníkových stavebných dosiek. Aký je obvod Paľonardovho domu ak obvod jednej stavebnej dosky je 17 cm?

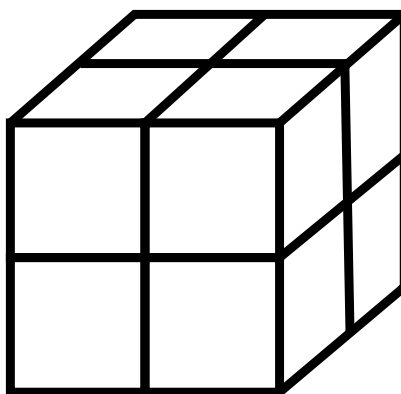


Obr. 4: Plán domu

Keď už mal Paľonardo predstavu o svojom príbytku prišlo na, akoby sme povedali, lámanie chleba. Paľonardo nelámal chlieb naozaj, to sa iba tak hovorí. Ale už naozaj išiel postaviť svoj dom. Pán veľký majster architekt, ten Paľonardo, povedali by ste si. Paľonardo však na svojom ostrove bol na dôchodku a rozhodol sa, že prenechá postavenie domu miestnym, aby aj ich trochu zamestnal.

**Príklad č. 4:** Na obrázku 5 je tehla tvaru kocky s hranou dĺžky 2 tvorená ôsmimi kocôčkami s hranou dĺžky 1. Niektorých osem stien na kocôčkach nafarbíme na čierne, ostatné budú biele (na jednej kocôčke môže byť aj viac čiernych strán a zároveň tam nemusí byť ani jedna). Platí, že z kocôčok sa dá zložiť kocka s hranou dĺžky 2, ktorej povrch je celý biely. Koľkými spôsobmi môžu byť kocôčky nafarbené (na otočení nezáleží a jednotlivé kocôčky od seba nevieme rozlíšiť)?

*Pozn.: Napr. predná strana čierna na jednej kocke a zvyšok biely je rovnaké zafarbenie ako ľavá strana čierna inej kocky a zvyšok biely.*



Obr. 5: Tehla

Paľonardo mal isté pochybnosti o postupe výroby tehiel domorodcov, ale oni mu vysvetlili, že takto tehly na dome dlhšie vydržia a dom bude stabilnejší. Paľonardo im veril ale uvedomil si, že sú všetci veľmi múdri a

dychtiví po vedomostiach. Rozhodol sa teda, že si na svoj dom dá číselný zámok, aby mu do domu nechodili ľudia, nečítali jeho knihy a nekopírovali jeho umenie.

**Príklad č. 5:** Paľonardov číselný kód bol v tvare  $ABCD$ . Keďže Paľonardo sa, ako človek na dôchodku, rozhodol, že si pamätať kód nebude napísal si následovné rovnice:

$$AAA \times BC = A0A0A$$

$$AA + CA = BD$$

Teraz stojí pred domom a nevie sa do neho dostať. Písmenká nahraďte číslami a zistite štvorciferný kód  $ABCD$  od Paľonardovho domu.

Paľonardo sa rozhodol, že nemôže bývať v neskolaudovanom dome. Spravil teda, ako sa patrí, poriadnu kolaudáciu spojenú s oslavou. Pozval na ňu veľa svojich priateľov, medzi nimi aj Zajffaella, Jumajlea a dokonca aj Mišelangella. Na oslave sa všetci náramne zabávali.

**Príklad č. 6:** Na Paľonardovej oslave bolo 25 slávnych umelcov a architektov. Na oslave sa chceli zvítať a porovnať si svoje umelecké znalosti. Niekoľkí si potriasli ruky s niekoľkými prítomnými. Nech  $n$  je číslo hostí, ktorí si potriasli rukou s nepárnym počtom hostí (so sebou si nikto ruku nepotriasol).

- Dokážte, že  $n$  je párne.
- Dokážte, že  $n$  by bolo párne aj v prípade, kedy by na oslave bolo 100 hostí.

Medzi vzácnymi hosťami boli aj Karinthos a anglický umelec Sarincelo. Keďže sa na oslave začínali trošičku nudiť, rozhodli sa zahrať si hru. Víťaz tejto hry získava príležitosť vyliezť na sochu Paľonardovho psa, ktorú má postavenú na druhom poschodí.

**Príklad č. 7:** Karinthos a Sarincelo sa hrali takúto hru. Do vrečka vložili 26 kartičiek, pričom na každej kartičke bolo jedno písmeno z anglickej abecedy, teda každé písmeno sa vo vrecúšku nachádza práve raz. Postupným ťahaním kartičiek z vrečka za seba ukladajú písmená. Vždy vytiahnu práve jedno písmeno, bez toho aby mohli zmeniť to, čo vytiahli. Víťaz je ten, koho celé meno sa dá vyskladať z písmenok, ktoré boli vytiahnuté. Ak sa bude dať vyskladať meno oboch z nich zároveň nastáva remíza. Aká je pravdepodobnosť remízy?

*Pozn.: anglická abeceda obsahuje 26 písmen  $a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n, o, p, q, r, s, t, u, v, w, x, y, z$*

Paľonardova oslava sa naozaj vydarila. Nakoniec sa aj Karinthos a Sarincelo zabávali, aj keď nevieme čo si o tom myslel Paľonardov pes. Ale nebojte sa, v našom príbehu sme nezabudli ani na Zajffaella. Ten sa rozhodol, že za peniaze ktoré získal za služby kráľovi pôjde na cestu okolo sveta. Ako prvé sa rozhodol ísť do Fínska, aby zistil, čo to vlastne je tá zima.

**Príklad č. 8:** Zajffaello sa rozhodol ísť do Fínska lietadlom. Lietadlo so 100 miestami na sedenie je plne vypredané a cestujúci začínajú po jednom nastupovať. Zajffaello, ktorý našťastie nastupoval prvý, ale stratil svoj palubný lístok a tak sa rozhodol usadiť sa na náhodné miesto. Každý ďalší cestujúci sa zachová nasledovne. Ak je jeho/jej miesto (podľa palubného lístka) voľné, tak sa posadí naň. Ak je jeho/jej miesto obsadené tak sa posadí náhodne na jedno z voľných miest. Aká je pravdepodobnosť, že cestujúci, ktorý nastupuje posledný, bude sedieť na svojom vlastnom mieste?

Zajffaello priletel a prekvapila ho nepríjemná skutočnosť. Vo Fínsku je naozaj zima! Toto pod pojmom zima neočakával. Preto sa rozhodol, že si hneď v prvom obchode kúpi deku, aby to aspoň nejako vydržal.

**Príklad č. 9:** Zajffaellova deka má tvar kosodlžníka  $ABCD$ . Ďalej nech  $E$  leží na polpriamke  $BC$ ,  $|BC| = |CE|$ . Rovnobežku cez  $E$  s  $AB$  označme  $l$ , bod  $F$  leží na prieniku priamky  $BD$  a  $l$ .  $P$  označme päť kolmice z  $D$  na  $AB$ . Určte pomer  $\frac{|AP|}{|PB|}$  ak viete, že  $ABEF$  je rovnoramenný lichobežník.

“Trochu zvláštna deka,” povedal si Zajffaello. Putoval si tak po Fínsku a veľmi sa mu tam páčilo. Nechcel si všetky krásy Škandinávsej krajiny nechať pre seba, tak sa rozhodol, že bude posilať fotky svojmu ctenému majstrovi Paľonardovi. Nechcel však, aby všetci vedeli, že si píše práve s Paľonardom. Rozhodol sa teda, že si ho uloží pod kódovým menom.

**Prémia:** Zajffaello vymýšľa kódové meno pre Paľonarda na svojom telefóne. Chce, aby to bola postupnosť rôznych písmen, ktorá nemusí byť nutne čitateľná. Keď sa však tieto písmená zmenia na čísla (podľa toho, koľké v poradí v anglickej abecede je dané písmeno, t.j.  $a \rightarrow 1, \dots, z \rightarrow 26$ ), musia spĺňať veľmi dôležité podmienky:

- Rozdiel dvoch susedných čísiel je najmenej 11.
- Žiadne prvočíslo nesusedí s párnym číslom.
- Nesusedia spolu čísla s rovnakým zvyškom po delení číslom 7.
- Keď sa čísla napíšu hneď za sebou, 2 rovnaké cifry nikdy nesusedia (12, 24 nemôže byť)

Aké najdlhšie kódové meno viete vymyslieť pre Paľonarda?

*Pozn.: anglická abeceda obsahuje 26 písmen  $a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n, o, p, q, r, s, t, u, v, w, x, y, z$ .*

Paľonardo sa náramne potešil všetkým fotkám, ktoré dostal od Zajffaella. Rozhodol sa, že v svojom dome na svojom ostrove vyhradí celú izbu iba na to, aby si tam vystavoval fotky, ktoré dostal zo Zajffaellových potulkách po svete. Tak mohli cestovať obaja umelci.