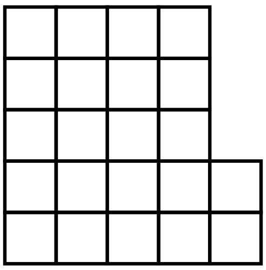
k	po dosadení	o
0	$3o = 22 - 0$ $3o = 22$	nie je celé číslo
1	$3o = 22 - 4$ $3o = 18$	6
2	$3o = 22 - 8$ $3o = 14$	nie je celé číslo
3	$3o = 22 - 12$ $3o = 10$	nie je celé číslo
4	$3o = 22 - 16$ $3o = 6$	2
5	$3o = 22 - 20$ $3o = 2$	nie je celé číslo
6	$3o = 22 - 24$ $3o = -2$	nie je celé a ani nezáporné číslo

Tabuľka 1: Dosadzujeme za k

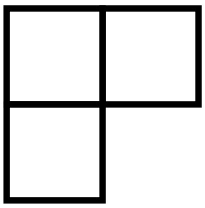
Vzorové riešenia 3. kola zimnej série 2017/2018

Príklad č. 1 (opravovali Sára, Miro):

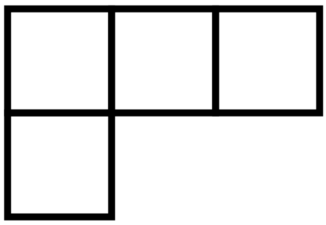
Zadanie: Presný tvar záhrady je znázornený na obrázku 1. Všetko čo na záhrade rástlo bolo vždy usporiadané v špeciálnych kúskoch. Zajffaello tvrdil, že ovocie a zelenina rastú na častiach záhrady, ktoré vyzerajú ako kúsok na obr. 2, a kvety rastú na kúskoch ako obr. 3. Na každom políčku záhrady rastie buď ovocie so zeleninou alebo kvety a to vždy práve v takých kúskoch aké sú nakreslené na obrázkoch. Koľko kúskov s ovocím a zeleninou sa podľa Zajffaella nachádza v kráľovskej záhrade (nájdite všetky možnosti)?



Obr. 1: Záhrada



Obr. 2: Ovocie a zelenina

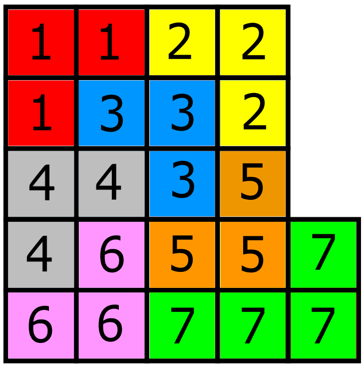


Obr. 3: Kvety

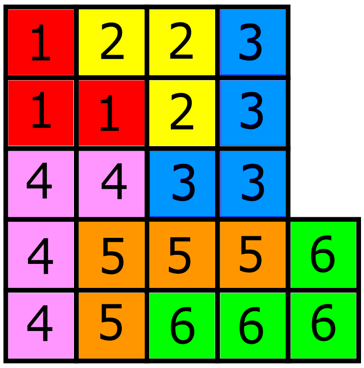
Riešenie: Najprv spočítame koľko políčok majú záhrada a jednotlivé kúsky. Zistíme, že záhrada má 22 políčok, kúsok s ovocím a zeleninou má 3 políčka a časť s kvetmi má 4 políčka. Počet kúskov s ovocím a zeleninou si označíme ako o a počet kúskov s kvetmi ako k. Preto celkový počet políčok s ovocím a zeleninou je $3o$ a celkový počet políčok s kvetmi je $4k$. Kedže záhrada sa skladá len z políčok, na ktorých rastie ovocie so zeleninou alebo kvety, musí platiť $3o + 4k = 22$. To si upravíme odčítaním $4k$ na $3o = 22 - 4k$. Teraz si spravíme tabuľku 1 a budeme za k dosadzovať čísla. Na základe k potom dopočítame o. Vieme, že obe čísla musia byť celé nezáporné, lebo nemôžeme mať polovicu políčka.

Ďalej netreba skúšať, lebo sa nám o bude len zmenšovať ($4k$ je väčšie ako 22) a naše číslo musí byť nezáporné. Už len stačí vyskúšať, či vieme do záhrady vložiť 6 kúskov s ovocím a zeleninou a 1 kúsok s kvetmi alebo 2 kúsky s ovocím a zeleninou a 4 kúsky s kvetmi. Ako môžeme vidieť na obrázkoch 4 a 5, tak sa nám to podarilo.

Odpoveď: Podľa Zajffella sa v kráľovskej záhrade nachádza 6 alebo 2 kúsky s ovocím a zeleninou.



Obr. 4: Záhrada so 6 kúskami ovocia a zeleniny a s 1 kúskom kvetov



Obr. 5: Záhrada s 2 kúskami ovocia a zeleniny a so 4 kúskami kvetov

Komentár: Pri dosadzovaní, veľa z vás neskúsilo možnosť $k = 0$, niektorý ste vypísali len správne možnosti ale inak to bolo všetko v pohode.

Príklad č. 2 (opravovali Dada, Sára):

Zadanie: Paľonardo a Zajffaello sa hrali hru s mincami. Ich hracia plocha bol riadok s n políčkami. Hráči sa postupne striedajú v ťahoch, pričom v jednom ťahu hráč položí mincu na ľubovoľné políčko, na ktorom sa nenachádza minca a zároveň sa nenachádza ani na dvoch(resp. jednom ak je to na kraji) tesne susedných políčkach. Hráč, ktorý už nemá kam umiestniť mincu prehráva. Paľonardo ako veľký majster začína. Zistite a zdôvodnite pre každú možnosť, kto má víťaznú stratégiu ak:

- $n = 5$
- $n = 6$
- $n = 8$

Riešenie: Idem si ja idem po ulici a vidím na zemi mincu. Jeeeej, pomyslím si, a idem ju zdvihnúť. Už sa zohýbam, keď na mňa vybehnú dvaja malí chlapci a kričia nech sa mince ani nedotýkam. Nerozumiem a dožadujem sa jednak mince aj vysvetlenia. Vraj sú to Rieškari, ktorí sa hrajú nejakú čudnú hru a majú pomôcť Paľonardovi zistiť ako môže poraziť Zajfaella. No tak pomáhajme spolu:

Najprv si zopakujeme, čo to znamená nájsť víťaznú stratégiu. Treba písať všetky možnosti celej hry? Treba napísať presne jednu možnosť? Alebo iba výsledok?

Víťazná stratégia pre nejakéh hráča (zoberme si ako príklad Paľonarda) je taký postup ťahov, ktorý mu zaručí výhru, nech hrá druhý hráč (pre náš príklad teda Zajfaello) úplne hocijako. To znamená, že ak povieme, že víťazná stratégia pre Paľonarda je dať mincu na pozíciu 23, neznamená to, že musíme vyskúšať aj čo sa stane ak ju dá na pozíciu 22. Čo ale musíme, je ukázať, že nech dá Zajfello druhú micu úplne hocikam, tak Paľonardo vie hrať tak, aby vyhral.

Po krátkom teoreickom úvode sa teda môžeme vrhnúť na riešenie.

Zoberme si prvý prípad, keď $n = 5$. Označme si pozície zľava od 1 po 5. Víťazná stratégia pre Paľonarda je umiestniť mincu do stredného políčka. Potom Zajfaello má „voľné“ (podľa pravidiel zadania) políčka 1 a 5. Ak však umiestni mincu do prvého, Paľonardo vyhráva tým, že ju dá do piateho, a ak naopak Zajfello položí mincu na políčko 5, pre Paľonarda zostáva políčko 1.

Pozrime sa teraz na $n = 6$. Označenie políčok ponecháme ako v predošlom prípade, od 1 po 6. Teraz ale navrhujeme Paľonardovi umiestniť prvú mincu do prvého políčka. Potom má Zajfaello ale viac možností kam dať mincu, konkrétne pozície $3, 4, 5$ a 6.

- Ak dá Zajfello svoju mincu na pozíciu 3, pre Paľonarda zostáva 5 a 6, pričom v oboch možnostiach už pre Zajfella nezostane ďalší voľný ťah.
- Ak dá Zajfaello svoju mincu na pozíciu 4, pre Paľobarda zostáva iba pozícia 6 a Zajfaello už nemá možný ťah.
- Ak dá Zajfaello svoju mincu na pozíciu 5, Paľonardova jediná možnosť je na pozícii 3 a Zajfaello už znovu nemá možný ťah.

- Pre poslednú Zajfaellovu možnosť na záchranu skúša dať mincu na pozíciu 6 a Paľonardo ťahom na pozíciu 3 vyhráva boj aj tentokrát.

Supeer, teda pre $n = 6$ má tiež víťaznú stratégiu Zajfaello.

Fuh, hotovo, ešte pre $n = 8$. To zas bude vypisovania, hovoríte si. Že? Nie nie nie nie :) Netreba. Sledujte!

Povedzme, že Paľonardo položí svoju mincu na prvé políčko. Potom pre Zajfaella zostáva voľných 6 políčok. A to už sa teší, raduje. Lebo pre $n = 6$ poznáme víťaznú stratégiu, a má ju ten hráč, ktorý je práve na ťahu! Takže Zajfello vyhrá nech sa Paľonardo bude snažiť hocijako. Tak inak. Nech Paľonardo položí mincu na druhé políčko. No potom zostáva voľných 5 políčok, a Zajfaello sa teší rovnako, pretože pre $n = 5$ znovu vyhrá prvý hráč.

Poďme ďalej, ak obsadí Paľonardo tretie políčko, Zajfello má možnosti $1, 5, 6, 7$ a 8. Zajfaello uloží svoju mincu na prvé políčko a pre Paľonarda zostanú $5, 6, 7$ a 8. Z Týchto 4 políčok vie Paľonardo svojím ťahom „zničiť“ najviac 3 (jedno kam mincu uloží, a najviac dve okolo) takže pre Zajfella stále zostáva ťah.

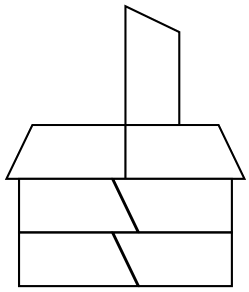
Naposledy rozoberieme možnosť, keď položí mincu Paľonardo na políčko 4. Teraz Zajfaello položí mincu na políčko 8, čím nechá pre Paľonarda dve trojice políčok. Do každej z nich vieme položiť maximálne jednu mincu, preto nám zostávajú ešte dva ťahy hry - Paľonardo a druhý pôjde Zajfaello, čím vyhrá.

Teda pre prípad $n = 8$ sme našli víťaznú stratégiu pre Zajfaella.

Komentár: Otázka, ktorú by ste sa mohli spýtať je, ako si vyberáme človeka, pre ktorého stratégiu hľadáme. V našom postupe sme si totiž vždy vybrali jedného, pre ktorého sme stratégiu hľadali, a prehľadávali možnosti hry druhého hráča. No odpoveď je, že vyskúšame. Je úplne vporiadku si pre začiatok vybrať hráča, ktorý nám je sympatickejší, a hľadať stratégiu preňho. Ak nájdeme, tešíme sa (pretože nie je možné aby v hre mali víťaznú stratégiu dvaja hráči). Ak nenájdeme, nemôžeme ešte povedať, že ju má hneď ten druhý, musíme si preskúšať možnosti preňho, a až potom vyhlásiť, čo sme zistili.

Príklad č. 3 (opravovala Timka):

Zadanie: Na obrázku 6 je plán domu, ktorý si chce Paľonardo postaviť zložený zo siedmich rovnakých štvoruholníkových stavebných dosiek. Aký je obvod Paľonardovho domu ak obvod jednej stavebnej dosky je 17 cm?



Obr. 6: Plán domu

Riešenie: Každá doska má 4 strany: dlhú, oproti ktorej je stredná strana, šikmú a oproti nej je malá strana. Začneme tým, že si spočítame obvod všetkých použitých dosiek a potom od toho odpočítame tie časti, ktoré nie sú na obvode.

Dosiek je 7, teda obvod je $7 \cdot 17 = 119$cm. Teraz poďme po poschodiach domčeka a pri každom si povedzme koľko strán dosiek sa nenachádza v obvode.

Na prvom poschodí sú dve šikmé strany, ktoré sa dotýkajú v strede. Tam kde sa prvé poschodie dotýka s druhým, sa dotýajú aj dve dlhé a dve stredné časti dosky. Na druhom poschodí sa opäť dotýkajú dve šikme strany. Druhé poschodie sa dotýka strechy strednou a dlhou stranou, teda tieto dĺžky započítame tiež dvakrát. Na streche sa dotýkajú dve krátke strany. Komín sa dotýka strechy malou stranou, teda aj túto dĺžku zarátame dvakrát.

Keď to teraz všetko sčítame, zistíme, že sme vlastne dostali 4-krát obvod dosky. To je $4 \cdot 17 = 68$cm. Obvod domčeka je teda 119cm - 68cm = 51cm.

Odpoveď: Obvod domčeka je 51cm.

Príklad č. 4 (opravovali Teri, Mati):

Zadanie: Na obrazku je tehla tvaru kocky s hranou dĺžky 2 tvorená ôsmimi kocôčkami s hranou dĺžky 1. Niektorých osem stien na kocôčkach nafarbíme na čierno, ostatné budú biele (na jednej kocôčke môže byť aj viac čiernych strán a zároveň tam nemusí byť ani jedna). Platí, že z kocôčok sa dá zložiť kocka s hranou dĺžky 2, ktorej povrch je celý biely. Koľkými spôsobmi môžu byť kocôčky nafarbené (na otočení nezáleží a jednotlivé kocôčky od seba nevieme rozlíšiť)?

Pozn.: Napr. predná strana čierna na jednej kocke a zvyšok biely je rovnaké zafarbenie ako ľavá strana čierna inej kocky a zvyšok biely.

Riešenie:

(1 bod) Najprv sa poďme pozrieť koľko stien jednej kocôčky môžeme zafarbiť na čierno. Po prestavaní budeme vidieť na povrchu kocky 3 steny z každej kocôčky. Podľa zadania musí byť povrch celej kocky biely. Preto 3 zo 6 stien musia byť biele, ostatné 3 môžu ale nemusia byť čierne.

Ak na kocke vyfarbíme 1 stenu, tak je nám jedno, ktorú, lebo kocôčku môžeme pootáčať.

(1 bod) Ak na kocke vyfarbíme 2 susedné steny, tak je nám jedno ktoré, lebo kocôčku môžeme pootáčať. Protiľahlé nemôžeme vyfarbiť, lebo by jedna z nich bola na povrchu kocky.

Ak na kocke vyfarbíme 3 steny so spoločným vrcholom, tak je nám jedno ktoré, lebo kocôčku vieme otáčať. Kďže k žiadnej vyfarbenej stene nemôžeme vyfarbiť protiľahlú tak je to jediné rozmiestnenie 3 stien.

Tieto podmienky nám však značne menia príklad, už nás nezaujíma rozmiestnenie čiernych stien na kocôčkach, ale iba počet kocôčiek s daným počtom načierno zafarbených stien (a, b, c, d sú počty kocôčok, ktoré majú zafarbené nejaký počet stien, ktorý je predstavovaný číslom $a = 0$, $b = 1$, $c = 2$, $d = 3$). Celkový počet kocôčiek bude súčet jednotlivých počtov $a + b + c + d$, pričom to bude dokopy 8 kocôčiek. Zo zadania taktiež vieme, že počet nafarbených stien je 8, čo vieme vyjadriť aj ako $0 \cdot a + 1 \cdot b + 2 \cdot c + 3 \cdot d = 8$.

(8 bodov) Teraz už iba hľadáme jednotlivé možnosti. Je dobré si zvoliť určitú stratégiu, podľa ktorej si možnosti budeme rozpisovať, aby sme žiadnu nevynechali. Napríklad sa snažme najskôr použiť vždy čo najväčší počet kocôčiek s čo najviac zafarbenými stenami. Postupne budeme pridávať do ďalších kombinácií menej zafarbené kocôčky a znižovať počet čo najviac zafarbených kocôčiek. Všetky možnosti spĺňajúce dané podmienky sú uvedené v tabuľke 2.

	$d \cdot 3$	$c \cdot 2$	$b \cdot 1$	$a \cdot 0$
1.	2	1	0	5
2.	2	0	2	4
3.	1	2	1	4
4.	1	1	3	3
5.	1	0	5	2
6.	0	4	0	4
7.	0	3	2	3
8.	0	2	4	2
9.	0	1	6	1
10.	0	0	8	0

Tabuľka 2:

Odpoveď: Existuje 10 rôznych spôsobov zafarbenia kocôčiek pre ktoré platí, že sa dá poskladať kocka, ktorá bude mať po prestavaní, všetky steny biele.

Komentár: Väčšina z vás vyrátala tento príklad naozaj pekne, najčastejšie ste strácali body na tom, že ste nedostatočne zdôvodnili prečo môžete počítať iba počet kocôčiek s daným počtom načierno zafarbených stien, a nemusíte sa trápiť s viacerými kombináciami pre dvoj a trojčiernostené kocky.

Príklad č. 5 (opravovali Paľo, Dada):

Zadanie: Paľonardov číselný kód bol v tvare $ABCD$. Keďže Paľonardo sa, ako človek na dôchodku, rozhodol, že si pamätať kód nebude napísal si následovné rovnice:

$$AAA \times BC = A0A0A$$

$$AA + CA = BD$$

Teraz stojí pred domom a nevie sa do neho dostať. Písmenká nahraďte číslami a zistite štvorciferný kód $ABCD$ od Paľonardovho domu.

Riešenie: Nevideli ste ho? Ako vyzeral? Kde sa vyskytoval naposledy?

Takéto otázky sa nás pýtali na polícií, keď sme hovorili, že kód je nezvestný. Oni to vôbec nepochopili, tak sme si museli pomôcť sami.

Pozrime sa bližšie na rovnicu $AAA \times BC = A0A0A$. Číslo AAA vieme jednoducho vydeliť číslom A, a dostaneme $AAA : A = 111$ (predpokladáme, že A nie je nula, prípad keby $A = 0$ preveríme neskôr).

Aj číslo $A0A0A$ vieme dobre deliť číslom A, $A0A0A : A = 10101$. Predelíme teda obe strany našej rovnice číslom A a dostávame

$$111 \times BC = 10101$$

Potom môžeme ďalej riešiť rovnicu a dostaneme $BC = 10101 : 111 = 91$. Teda sme zistili dve cifry z nášho kódu! $B = 9$ a $C = 1$, poďme hľadať ďalej.

Ďruhú rovnicu si teraz vieme napísať ako $AA + 1A = 9D$. Číslo $99 \geq 9D \geq 90$ a $11 \leq 1A \leq 19$. Preto $AA > 70$, a teda $A = 7$ alebo $A = 8$.

V prvom prípade v druhej rovnici máme $77 + 17 = 94$ a teda $D = 4$. Našli sme riešenie, ale skúšame ďalej, možno nie je jediné.

V druhom prípade máme $88 + 18 = 106$, ale my by sme chceli na pravej strane iba dvojciferné číslo, preto z tejto možnosti nezískavame ďalšie riešenie.

Vrátime sa ešte k možnosti, kedy $A = 0$. Potom prvá rovnica platí pre ľubovoľné BC. Druhá rovnica má potom tvar $0 + C0 = BD$, teda $B = C$ a $D = 0$.

Dostávame sa teda k dvom riešeniam $ABCD = 7914$ a $ABCD = 0BC0$ pre ľubovoľné čísla B a C.

Príklad č. 6 (opravovali Mišo, MaťoU):

Zadanie: Na Paľonardovej oslave bolo 25 slávnych umelcov a architektov. Na oslave sa chceli zvítať a porovnať si svoje umelecké znalosti. Niekoľkí si potriasli ruky s niekoľkými prítomnými. Nech n je číslo hostí, ktorí si potriasli rukou s nepárnym počtom hostí (so sebou si nikto ruku nepotriasol).

a) Dokážte, že n je párne.

b) Dokážte, že n by bolo párne aj v prípade, kedy by na oslave bolo 100 hostí.

Riešenie: Pozrime sa na začiatočný stav, keď si ešte nikto s nikým nepodal ruku. Hodnota n je 0 lebo každý si podal ruku s 0 ľuďmi. 0 je párne číslo a teda aj n je párne. Teraz ukážeme, že pri ľubovoľnom podaní ruky n zostane stále párne.

Človeka, ktorý si doteraz podal ruku s párnym počtom ľudí budeme označovať, že je „párny“ a toho, čo si podal ruku s nepárnym počtom „nepárny“. To koľko krát si už niekto podal ruku budeme jednoducho nazývať „počet podaní“. Pozrime sa teda čo sa stane s n, keď si dvaja ľudia podajú ruky. Rozdelíme to na 3 prípady:

1. **Ruky si podajú dvaja párni**
   Potom ako si podajú ruky sa obidvom zvýši počet podaní o 1. Vieme, že ich počet podaní bol predtým párne číslo. Po každom párnom čísle nasleduje hneď nepárne číslo a preto sa obaja stanú nepárnymi. Takto nám pribudnú dvaja nepárni, čo znamená, že n sa zväčší o 2.
2. **Ruky si podajú dvaja nepárni**
   Tu sa im počet podaní taktiež zvýši o 1. Rozdiel je v tom, že predtým bol ich počet podaní nepárny a teda potom ako si podajú ruky, bude pre oboch párny. Takto sa dvaja nepárni stanú párnymi a teda n sa o 2 naopak zmenší.
3. **Ruky si podajú párny s nepárnym**
   Tu sa pozrieme čo sa stane s tým párnym a čo s tým nepárnym . Vieme, že ako aj v ostatných možnostiach sa obom zvýši počet podaní o 1. Párny sa takto zmení na nepárneho (ako v 1. možnosti) a n sa zvýši o 1. Nepárni sa zas zmení na párneho (ako v 2. možnosti) a tým sa n o 1 zmenší. Celkovo sa teda n nezmení.

Vo všetkých z týchto možností sa n mení o párne číslo(0 alebo 2). Keďže vieme, že súčet alebo rozdiel dvoch párnych čísel je vždy párny a na začiatku je n párne, n bude vždy párne nech si podávajú ruky akokoľvek. Taktiež to nijak nezávisí od počtu ľudí, ktorí si ruky podávajú.

Odpoveď: Takto sme teda dokázali, že n je vždy párne aj keď je na oslave 25 hostí a aj keby ich bolo 100.

Komentár: Väčšina z vás zvládla príklad veľmi pekne, niektorým však chýbalo poriadne zdôvodnenie niektorých častí vášho riešenia. Body sme taktiež ztrhávali ak vaše riešenie neobjasňovalo všetky situácie, ktoré mohli nastať.

Príklad č. 7 (opravoval Lámač):

Zadanie: Karinthos a Sarincelo sa hrali takúto hru. Do vrecka vložili 26 kartičiek, pričom na každej kartičke bolo jedno písmeno z anglickej abecedy, teda každé písmeno sa vo vrecúšku nachádza práve raz. Postupným ťahaním kartičiek z vrecka za seba ukladajú písmená. Vždy vytiahnu práve jedno písmeno, bez toho aby mohli zmeniť to, čo vytiahli. Víťaz je ten, koho celé meno sa dá vyskladať z písmenok, ktoré boli vytiahnuté. Ak sa bude dať vyskladať meno oboch z nich zároveň nastáva remíza. Aká je pravdepodobnosť remízy?

Pozn.: anglická abeceda obsahuje 26 *písmen* $a,b,c,d,e,f,g,h,i,j,k,l,m,n,o,p,q,r,s,t,u,v,w,x,y,z$

Riešenie: Príjemne sa usaďte, dnes si s určitou pradepodobnosťou ukážeme ako si zjednodušiť život. Ako teda na pravdepodobnosti?

Najskôr sa pozrieme na výskyt písmen v menách. Karinthos a Sarincelo majú určité písmená spoločné, niektoré rôzne a ostatné písmená sa v ich menách ani nevyskytujú. Spoločných písmen je 6 a sú to A, R, I, N, O a S. Navzájom rôznych písmen, vyskytujúcich sa len v jednom z mien, je taktiež 6 - sú to K, T, H, C, E a L. Ostatných písmen je teda $26 - 6 - 6 = 14$.

Zamyslime sa nad tým, čo sa stane po vytiahnutí niektorého z ostatných písmen. Hra sa nemôže skončiť, kedže samotné písmeno nie je obsiahnuté ani v jednom z mien a nepomôže hráčke doskladať meno. Vytiahnutie ostatných písmen nemá vplyv ani na jednu hráčku, nakoľko ani jedna z nich nie je bližšie k výhre. Preto ťahanie ostatných písmen môžeme ignorovať/zanedbať.

Bude nás zaujímať iba ťahanie písmen, ktoré tvoria mená našich hráčok. Dôležité je zistiť, kedy nastáva remíza. Remíza nastane vtedy, ak posledné vytiahnuté písmeno zapríčini výhru oboch dievčat. Takéto písmeno musí mať v mene každá z nich, čiže to je jedno zo šietich spoločných písmen.

Hra sa skončí keď jedna z hráčiek je schopná vyskladať celé svoje meno. V tom ťahu muselo byť vytiahnuté jedno z písmen vyskytujúcich sa v aspoň jednom z mien hráčiek. To sú buď navzájom rôzne písmena alebo spoločné písmená. Všetkých písmen, ktoré môžu zakončiť hru, je preto dokopy 12.

Pravdepodobnosť je hodnota šance, že určitý jav nastane. Je to vlastne pomer počtu udalostí, v ktorých jav nastal, k počtu všetkých možných udalostí. V našom príklade je týmto javom remíza. Remíza nastane v prípade vytiahnutia jedného zo šietich spoločných písmen a celkovo ako posledné písmeno môže byť vytiahnutých 12 písmen.

Pravdepodobnosť remízy je preto:

$$P = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

Odpoveď: Karinthos a Sarincelo remízujú s pravdepodobnosťou $\frac{1}{2}$, čiže v 50% prípadov.
Komentár: Na tento príklad sa dá ísť veľmi jednoducho, stačí sa len poriadne zamyslieť. Pár riešiteľov sa snažilo zistiť pravdepodobnosť remízy bez zanedbania ostatých písmen. Zbytočne si s tým komplikujete život, nakoľko je to omnoho ťažšie spočítať, či zahrnúť všetky možnosti. Ani sa nenazdáte a spravili ste chybu. Načo používať zložité vzorce, ktoré na riešenie nepotrebujete, keď sa to dá tak jednoducho :) Nezabúdajte si skontrolovať, či ste správne spočítali počty písmeniek, respektíve koľko je možnosti ich potiahnutia.

Príklad č. 8 (opravoval MaťoPaťo):

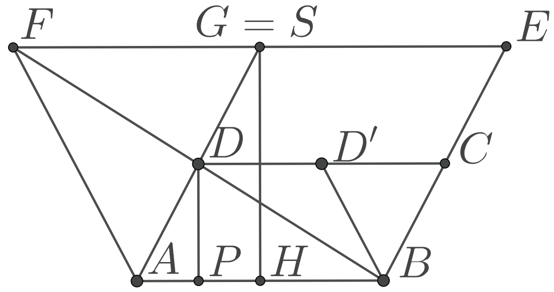
Zadanie: Zajffaello sa rozhodol ísť do Fínska lietadlom. Lietadlo so 100 miestami na sedenie je plne vypredané a cestujúci začínajú po jednom nastupovať. Zajffaello, ktorý naštastie nastupoval prvý, ale stratil svoj palubný lístok a tak sa rozhodol usadiť sa na náhodné miesto. Každý ďaľší cestujúci sa zachová nasledovne. Ak je jeho/jej miesto (podľa palubného lístka) voľné, tak sa posadí naň. Ak je jeho/jej miesto obsadené tak sa posadí náhodne na jedno z voľných miest. Aká je pravdepodobnosť, že cestujúci, ktorý nastupuje posledný, bude sedieť na svojom vlastnom mieste?
Riešenie: Začnime tým, že si rozpíšeme, kam si môže sadnúť Zajffaello. Má 3 možnosti.

1. Sadne si na svoje miesto s pravdepodobnosťou $\frac{1}{100}$ (je 1 vyhovujúce sedadlo zo 100). V tomto prípade si všetci ostatní cestujúci posadajú na svoje miesta.
2. Sadne si na miesto posledného cestujúceho s pravdepodobnosťou $\frac{1}{100}$ (je 1 vyhovujúce sedadlo zo 100). V tomto prípade si všetci ostatní okrem posledného posadajú na svoje miesta a posledný si sadne na miesto Zajffaella.
3. S pravdepodobnosťou $\frac{98}{100}$ (takých sedadiel je 98 zo 100) obsadí miesto inému cestujúcemu ako poslednému.

Všimnime si, že pravdepodobnost javu 1 ($P(1)$) a pravdepodobnosť javu 2 ($P(2)$) sa rovnajú. Čo sa stane, ak Zajffaello obsadí napríklad miesto 3. cestujúceho (alebo ľubovoľného iného medzi 2. a 99. cestujúcim vrátane)?

2. cestujúci bude mať jednoznačne určené kam si má sadnúť a 3. cestujúci sa bude opäť náhodne rozhodovať. A opäť bude mať rovnaké možnosti, ako mal Zajffaello, len s inými pravdepodobnosťami. Dôležité ale je, že $P(1) = P(2)$ (pre obe je 1 vyhovujúce miesto z ostávajúcich 98 - alebo iného počtu sedadiel v závislosti od toho, ktorý cestujúci sa musí rozhodovať). Ak si vyberie možnosť 3, tak sa bude musieť opäť niekto rozhodovať. Ak si vyberie možnosť 1 alebo 2, už sa nikto rozhodovať nebude. Keďže si všetci sadnú, niekto sa bude musieť rozhodvať ako posledný a ten bude mať rovnakú pravdepodobnosť, že vyberie možnosť 1, ako že vyberie možnosť 2. A preto pravdepodobnosť, že si posledný cestujúci sadne na svoje miesto je 50%.
Odpoveď: Pravdepodobnosť, že si posledný cestujúci sadne na svoje miesto je 50%.

Príklad č. 9 (opravovali Lámač, Kubo, Teri):
Zadanie: Zajffaellova deka má tvar kosodlžníka $ABCD$. Ďalej nech E leží na polpriamke BC, $|BC| = |CE|$. Rovnobežku cez E s AB označme l, bod F leží na prieniku priamky BD a l. P označme pätu kolmice z D na AB. Určte pomer $\frac{|AP|}{|PB|}$ ak viete, že $ABEF$ je rovnoramenný lichobežník.
Riešenie:



Obr. 7: Zajffaellova deka

Skúsme sa najprv zamyslieť nad tým, ako by sa dali rozumne vyrátať pomery v geometrií. Dobré nástroje sú napríklad podobnosť trojuholníkov, či viac komplikované ako napríklad analitická geometria, ktorá sa vyskytla v pár riešeniach. Pre jednoduchosť sa zameriame na podobnosť.

Na použitie podobnosti potrebujeme trojuholníky, ktoré bohužial na obrázku zatiaľ nemáme žiadne. Preto by mohol byť dobrý nápad si nejaké domyslieť. Keďže zisťujeme pomer $\frac{|AP|}{|PB|}$, tak by sme chceli aby existovali trojuholníky obsahujúce úsečky AP a PB. Trojuholník obsahujúci AP nájdeme ľahko, stačí si uvedomiť, že P je pätou kolmice z bodu D. Máme teda prvý trojuholník APD, ktorý je pravouhlý, lebo P je päta kolmice z D. Je však nejasné, ktorý trojuholník obsahujúci PB by sme mohli použiť pri podobnosti s trojuholníkom APD.

Tento problém spočíva len v potrebe vyjadrenia $|PB|$. Dá sa to jednoducho vyriešiť pozretím sa na úsečku PB ako na doplnok do AB. Tým sa myslí to, že AP a PB dávajú dokopy stranu AB. Teda sa na dĺžku $|PB|$ môžeme pozerať ako $|AB| - |AP|$. Takto sme prišli k tomu, že na zistenie pomeru $\frac{|AP|}{|PB|}$ stačí zistiť pomer $\frac{|AP|}{|AB|}$.

Zo zadania je $ABEF$ rovnoramenný lichobežník, čo je celkom užitočná vlastnosť, ktorú sme ešte nepoužili. Podstatná je v tom, že taký lichobežník je osovo symetrický podľa priamky prechádzajúcej stredmi jeho strán. Osovo symetrický znamená, že ho môžeme podľa tejto priamky preložiť, pričom nebudeme mať žiadnu časť, kde by bol po preložení iba v jednej vrstve (obe časti sú identické). Takáto vlastnosť je dobrá na to, že keď si spravíme stred úsečky FE, označíme ho G, tak kolmica z G na FE pretne AB presne v polovici (bod pretnutia označíme H), lebo spojnica stredov protiľahlých základní je zároveň aj os súmery a os základní v rovnoramennom lichobežníku.

Teraz by sa hodilo ukázať, že body A, D a G ležia na jednej priamke. Tým by sme dostali dva podobné trojuholníky APD a AHG. Na to musíme napríklad ukázať, že priamka cez body A a D pretína stred EF, teda bod G.

AD je strana kosodlžníka, ktorej predĺženie pretína úsečku FE, pretože F je na priamke BD a AD je rovnobežné s BE, teda spojnica BE prtína priamku AD. Bod prieniku AD s EF označím S. $SE = AB$, lebo AS je rovnobežné s BE a AB je rovnobežné s SE, teda $ABES$ je rovnobežník.

FS je však tiež rovnako dlhé ako AB, lebo trojuholníky DSF a DAB sú si zhodné. Zhodné sú si preto, lebo zo zadania F, D, B ležia na priamke, teda uhly $\measuredangle SFD$ a $\measuredangle ABD$ sú striedavé. Podobne A, D a S ležia na priamke, teda uhly $\measuredangle BAD$ a $\measuredangle SFD$ sú striedavé. Už teda vieme, že sú aspoň podobné. Na zhodnosť však treba ukázať, že majú aspoň jednu stranu zhodnú. Keďže vieme, že $ABES$ je kosodlžník a $|BC| = |CE|$, tak $|BE| = 2 \cdot |AD| = |AS|$. Z tohto jasne vidno, že $|AD|$ je rovnako dlhé ako $|DS|$, lebo $|DS|$ je $|AS| - |AD|$, čo dopĺňa práve $|AD|$. Úspešne sme teda dokázali, že trojuholníky DSF a DAB sú si zhodné. Preto $|FS| = |AB|$.

Body S a G sú teda jeden bod, lebo S musí ležať v polovici EF. Tak je definovaný bod G. Teraz sme dokázali, že A, D a G ležia na jednej priamke. Nakoľko trojuholníky APD a AHG sú oba pravouhlé a majú spoločný uhol pri vrchole A, sú si navzájom podobné. Navyše pre ich podobnosť platí, že $\frac{|AG|}{|AD|} = 2$, teda aj $\frac{|AP|}{|AH|} = 2$. $|AH|$ je však polovica $|AB|$, teda $|AP|$ je štvrtina $|AB|$.

Teraz treba už len zistiť dĺžku $|PB|$. Vieme ju vyrátať ako $|AB| - |AP|$:

$$|PB| = |AB| - |AP|$$

$$|PB| = |AB| - \frac{1}{4}|AB|$$

$$|PB| = \frac{3}{4}|AB|$$

Dostávame sa k tomu, že $|PB|$ je trikrát dlhšia ako $|AP|$.

Pozorný riešiteľ by si však všimol, že sme predpokladali, že bod P leží na úsečke AB. Aby sme vyvrátili všetky pochybnosti, tak dokážeme, že ak $ABEF$ je rovnoramenný, tak bod P leží na úsečke AB.

Ak je $ABEF$ rovnoramenný, tak potom vieme bod D prehodiť cez os súmery tohto lichobežníka, čím dostaneme ďalší lichobežník $ABD'D$, kde D' je obraz D. Zároveň AB bola kratšia základňa pôvodného lichobežníka, lebo sme všeobecne dokázali, že $|FE|$ je dvojnásobok $|AB|$. Už sme ukázali, že $ABES$ je kosodlžník. Z toho pomocou dorátania uhlov v lichobežníkoch $ABD'D$ a $EFAB$ ukážeme ich podobnosť, nakoľko majú rovnaké vnútorné uhly. To v riešení neuvádzame, môžete si to premyslieť. Potom $D'D$ musí byť kratšia základňa rovnoramenného lichobežníka $ABD'D$. Teda kolmica z D musí preťať úsečku AB.

Odpoveď: Pomer $|AP|$ ku $|PB|$ je 1:3.

Komentár: Väčšina z vás príklad pekne vyriešila. Avšak najmä v geometrií si treba dávať pozor, či to čo popisujete naozaj existuje, alebo to len tak vyzerá na obrázku. Príklad nebol úplne tradičný, čomu zodpovedá aj fakt, že ho veľa z vás neodovzdalo. Treba však brať do úvahy, že väčšina odovzdaných riešení bola správna. Preto si myslím, že ste podali slušný výkon.

Prémia (opravoval Zajo):

Zadanie: Zajffaello vymýšla kódové meno pre Paľonarda na svojom telefóne. Chce, aby to bola postupnosť rôznych písmen, ktorá nemusí byť nutne čitateľná. Keď sa však tieto písmená zmenia na čísla (podľa toho, koľké v poradí v anglickej abecede je dané písmeno, t.j. $a \to 1, \ldots\ z \to 26$), musia spĺňať veľmi dôležité podmienky:

- Rozdiel dvoch susedných čísiel je najmenej 11.
- Žiadne prvočíslo nesusedí s párnym číslom.
- Nesusedia spolu čísla s rovnakým zvyškom po delení číslom 7.
- Keď sa čísla napíšu hneď za sebou, 2 rovnaké cifry nikdy nesusedia $(12, 24$ nemôže byť)

Aké najdlhšie kódové meno viete vymyslieť pre Paľonarda?

Pozn.: anglická abeceda obsahuje 26 *písmen a,b,c,d,e,f,g,h,i,j,k,l,m,n,o,p,q,r,s,t,u,v,w,x,y,z.*

Riešenie: Najdlhšia dosiahnuteľná postupnosť bola dlhá 21 znakov. Bolo potrebné si dať pozor najmä na štvrtú podmienku, podľa ktorej nemôžeme použiť čísla ako $11, 22$, pretože by hneď obsahovali dve rovnaké cifry vedľa seba.

Zdôvodnenie nebolo také ťažké nájsť, stačilo si povypisovať, aké čísla môžu za akými nasledovať a trocha nad tým porozmýšľať. Keďže sme ale v prémii, trápiť sa tým nebudeme a rovno uvádzame jednu z viackrát uvedených postupností, ktoré ste našli:

$$16, 4, 15, 3, 19, 7, 23, 5, 17, 1, 20, 8, 24, 9, 25, 14, 26, 10, 21, 6, 18$$

PDOCSGWEQATHXIYNZJUFR