

Zadania 2. kola zimnej série 2017/2018

Termín: 13.11.2017

Naša adresa: Riešky, Mgr. Viera Babišová, Gymnázium Grösslingová, Grösslingová 18, 811 09 Bratislava 1

Elektronické riešenia: <http://riesky.sk/>

„Vaše veličenstvo, dostal som váš list. Ako vám môžeme pomôcť?“ spýtal sa Paľonardo da Tomči. Zamyšlený kráľ sa otočil a upriamil jeho pozornosť na majstra Paľonarda a jeho učňa Zajffaella. „Dnes som si vás zavolať, lebo potrebujem vašu pomoc s jedným projektom,“ predniesol kráľ svojím zvonivým hlasom. „S akým projektom?“ spýtal sa Paľonardo. „Nie tak rýchlo,“ povedal kráľ: „Najprv si vás musím preskúšať, či ste hodní takejto dôležitej úlohy. Začneme niečím jednoduchším. Už dlhší čas sa mi nepáčia sochy, ktoré mám v mojom ružovo-slóníkovom salóniku. Urobte mi z nich zaujímavejšie sochy.“

Príklad č. 1: Obe sochy sa pôvodne skladali z 27 malých kociek $1 \times 1 \times 1$ zlepených dokopy tak, aby tvorili kocku $3 \times 3 \times 3$.

Paľonardo si zobral prvú kocku a spravil cez ňu tri „tunely“ tak, že vybral kocky v strede každej steny a aj v úplnom strede kocky. Vznikol mu tak útvar pripomínajúci kostru kocky.

Keď sa Zajffaello hral s druhou kockou, odstránil jej všetky rohové kocky.

Koho nová socha má väčší povrch a o koľko?

Paľonardo so Zajffaellom sa ľahkou úlohou hravo prelúskali a predviedli svoje nové sochy kráľovi. „Vidím, že ste schopní umelci. Tak teda počúvajte pozorne, čo vám teraz poviem. Ja s mojou kráľovnou sme sa rozhodli, že je na čase renovovať našu záhradu. A od vás by som žiadal aby ste mi navrhli jej novú podobu.“ „Vaše slovo je naším rozkazom, Vaše veličenstvo. Hneď sa do toho pustíme.“

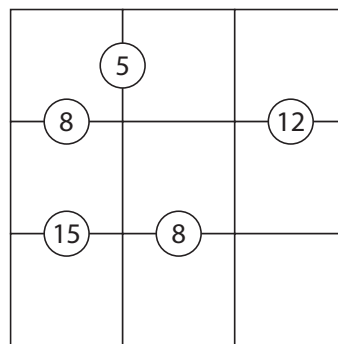
Zajffaello mal hneď veľa inovatívnych nápadov. „Nezdá sa vám táto záhrada nejaká tichá?“ spýtal sa Zajffaello. „Máš pravdu, mladý Zajffaello. Treba s tým niečo spraviť. Čo keby sme spravili menšie ohrady a kliecky a dali do nich nejaké zvieratá?“ spýtal sa Paľonardo. „Vynikajúci nápad. Pustíme sa do toho,“ povedal Zajffaello.

Príklad č. 2: Nové ohrady a kliecky prišli rovno aj so zvieratami. Dokopy v nich bol aspoň jeden klokan, aspoň jeden papagáj a aspoň jeden tiger. Zajffaello sa snažil zistiť, koľko je ktorých zvierat, no tie sa tam toľko pohybovali, že ich nevedel zrátať. Aspoň že ich končatiny vedel zrátať s istotou. Nôh Zajffaello narátal dvakrát toľko ako krídel a hláv narátal 11. Koľko je v ohradách a klieckach ktorých zvierat, ak vieme, že klokanov je najmenej?

Pozn.: Klokan má pre účely tohto príkladu dve nohy.

„Toto bola naozaj dobrá myšlienka,“ pochválil Paľonardo Zajffaella. „Myslím si však, že kráľ by v jeho záhrade ocenil aj nejaké rastliny, je to predsa záhrada. Ďalšiu časť renovácii nechám na teba. Už si dospel a je načas, aby si sa realizoval. Kráľ potrebuje v svojej záhrade zemiakový záhon. Skús nesklamať mňa a ani kráľa.“ Zajffaello mal s rozložením trochu problémy. Zistil totiž, že potrebuje, aby mu sedeli isté súčty.

Príklad č. 3: Zemiakový záhon má tvar mriežky 3×3 . Do každého políčka mriežky potrebujeme zasadiť odrody zemiakov očíslované 1 až 9, každú práve raz. Háčikom ale je, že krúžky na hraniciach políčok vždy určujú súčet čísel odrôd na dvoch susedných políčkach. Ktorá odroda zemiakov bude v pravom dolnom políčku?



Obr. 1: Mriežka v záhone

Keď Zajffaello dokončil svoj plán zemiakového záhonu, rýchlo sa ponáhlal za svojim majstrom. Ten už navrhoval ďalšie časti záhrady. „Prišiel som na revolučnú myšlienku. Urobíme tu visuté záhrady. To ešte nikdy nikto nikde určite neurobil. Som si istý, že tým budú nadšené aj ich veličenstvá,“ povedal Paľonardo nadšene. Zaffaello si radšej kusol do jazyka a neopravoval svojho majstra. Veď to vôbec nebola viac revolučná myšlienka, ako jeho nápad so zvieratami.

Príklad č. 4: Paľonardo má šesť poschodí visutej záhrady a šesť druhov rastlín, z toho každá môže byť iba na jednom poschodí. Zajffaello mu o nich povedal tieto informácie:

- Agát biely je na nižšom poschodí ako fialka voňavá
- Fialka voňavá je na nižšom poschodí ako cesnak okrasný;
- Cesnak okrasný je na nižšom poschodí ako bodliak kučeravý;
- Ďatelina lúčna je na nižšom poschodí ako cesnak okrasný;
- Ebenovník d'atlový je na nižšom poschodí ako bodliak kučeravý.

Potom mu Zajffaello povedal, že by mu musel prezradiť ešte aspoň štyri takéto informácie (ktoré by hovorili, že istá rastlina je na nižšom poschodí ako istá iná rastlina), aby tieto rastliny vedel s určitosťou usporiadať od najnižšieho poschodia po najvyššie.

Vie ich teraz Paľonardo usporiadať? Ako?

Za ten svet sa však nevedeli dohodnúť, koľko rastlín zasadia na každé poschodie. Zajffaello skúšal rôzne taktiky presvedčania. Keď už podplácanie sladkosťami ani vyhrážanie sa klebetami nezabralo, skúsil na to istý úplne inak.

Príklad č. 5: Zajffaello chcel okúzliť Paľonarda. Povedal mu, aby si vybral ľubovoľné 3 po sebe idúce čísla menšie ako 60. Potom si mal Paľonardo vybrať ešte ľubovoľné číslo menšie ako 100 deliteľné tromi. Toto číslo Zajffaellovi povedal. Ďalší krok, ktorý Paľonardo urobil, bolo sčítanie týchto štyroch čísel a vynásobenie tohto súčtu číslom 67. Paľonardo Zajffaellovi nepovedal výsledok, no povedal mu posledné dve číslice. Teraz prišlo na rad okúzľovanie. Zajffaello z týchto informácií vedel určiť pôvodné 3 čísla aj Paľonardov celý výsledok. Ako to dokázal?

Paľonardo nakoniec ustúpil. „Teraz už len záhradníka potrebujeme získať. Ten za nás spraví všetko ostatné,“ vydýchol si unavený Zajffaello. „Zajffaello, Zajffaello, ty sa nikdy nepoučíš. Lenivosť je dobrá vlastnosť, ale netreba to s ňou preháňať. Ale máš pravdu, záhradník nám určite tú zostávajúcu prácu uľahčí,“ pokrútil hlavou Paľonardo: „Poďme teda navštíviť kráľovského záhradníka.“

Príklad č. 6: Presvedčiť kráľovského záhradníka, aby im pomohol, nebolo také ľahké, ako si Paľonardo a Zajffaello mysleli. Záhradník totiž povedal, že im pomôže len vtedy, keď si s ním Paľonardo zahrá hru. Paľonardo začína. Hru začínajú s 420 okrasnými kvetináčmi na kope. Striedajú sa v ťahoch. V každom ťahu odoberú z kopy niekoľko kvetináčov podľa nasledujúcich pravidiel:

- Ak počet kvetináčov na kope nie je mocnina čísla 2, hráč môže odobrať počet kvetináčov rovný najväčšej mocnine 2, menšej ako aktuálny počet kvetináčov.
- Ak počet kvetináčov na kope je párny, hráč môže odobrať polovicu kvetináčov.

Hráč, ktorý už nevie vykonať ťah prehráva. Kto z nich má vyhrávajúcu stratégiu? Paľonardo alebo kráľovský záhradník?

Pozn.: Mocnina čísla 2 je číslo, ktoré vzniklo opakovaným násobením čísla 2 so samým sebou. Sú to čísla 1, 2, 4, 8, 16, ...

„No dobre, pomôžem vám,“ povedal záhradník Jumajleo: „Úplne ste však zabudli na to, že záhrada sa stavia od plotu. Ten je síce už postavený, no tí robotníci to úplne poplietli, keď ho maľovali. Však sa naň poďte pozrieť.“

Príklad č. 7: Záhrada má tvar 99-uholníka. Na obvode 99-uholníka je farebný plot, ktorého každá strana je nejakej farby. Robotníci plot postavili tak, že farby jeho strán boli postupne červená, modrá, červená, modrá, ..., červená, modrá a žltá. Malo to jediný problém. Kráľ by rád vymenil farbu posledných dvoch strán, čiže strany by postupne mali farby červená, modrá, červená, modrá, ..., červená, žltá, modrá. Plot sa dá prefarbovať tak, že vždy zamaľujeme jednu zo strán na červenú, modrú alebo žltú. Podmienkou šľachty žijúcej v okolí však je, že v žiadnom momente nesmie byť farba dvoch susedných strán rovnaká. Vedia Zajffaello a Paľonardo vyhovieť kráľovej požiadavke? Ak áno, ako by to urobili? Ak nie, prečo by to nikdy nezvládli?

„Tak to by sme mali,“ povedal Paľonardo. „Teraz už len navrhnuť poslednú stavbu a tou je amfiteáter. Ten by nemal byť veľmi zložitý,“ rozmýšľal Zajffaello. „Tak to teda vonkoncom nie. Amfiteáter je tá najzložitejšia stavba, akú môžeš kedy stavať!“

Príklad č. 8: Paľonardo vie, že v kráľovskom amfiteáteri musia byť všetky stoličky usporiadané do niekoľkých zarovnaných radov s rovnakým počtom stoličiek a teda musia tvoriť obdĺžnik. Musí na ne vedieť usadiť dámy a pánov nasledovne. V každom rade bude presne 14 pánov. V každom stĺpci bude presne 10 dám. Práve 3 stoličky budú prázdne. Ukážte, že stoličiek budú potrebovať najmenej 567.

Vtedy sa ozval Jumajleo: „Na čo ste ma to vlastne potrebovali? O amfiteátroch toho teda veľa neviem. A keď už sme pri tom, tak ani o dámach.“ „Priznám sa, na teba som skoro aj zabudol. Potrebovali by sme, aby si nám vybral kvety, ktoré dáme do nových záhonov,“ povedal Paľonardo.

Príklad č. 9: V záhradníckom obchode je $n^2 + 1$ kvetov. Všetky kvety majú istú výšku, pričom medzi nimi nie sú žiadne dva kvety, ktoré by boli rovnako vysoké. Sú vystavené v jednom dlhom rade od začiatku predajne. Jumajleo z nich chce vybrať $n + 1$ kvetov. Dokážte, že nezávisle na ich poradí vo výklade, vie vybrať také kvety, ktorých výšky v poradí ako stoja za sebou v obchode, tvoria rýdzo rastúcu, alebo rýdzo klesajúcu postupnosť.

Pozn. „Rýdzo“ rastúca (resp. klesajúca) postupnosť je taká, ktorej každý prvok je väčší (resp. menší) ako všetky predchádzajúce.

„Nádhera,“ povedal Zajffaello. „Nádherné,“ nadchýnal sa Jumajleo. „Prekrásne. Ale ešte si negratulujeme priatelia, ešte to nevidel kráľ,“ poznamenal Paľonardo: „Poďme to oznámiť kráľovi.“ Paľonardo a Zajffaello sa rozlúčili s Jumajleom a poďakovali mu za pomoc. Potom sa pobrali za kráľom. Ten ich už očakával. Keď vošli do miestnosti, tak sa postavil a povedal: „Prosím vás, majstri, prevedte ma po mojich nových záhradách.“

Prémia: Prehliadka sa začala, no niečo sa pokazilo. Zachráňte Paľonarda, Zajffaella a kráľa tým, že ich dostanete z políčka „štart“ na políčko „cieľ“ (Obr. 2). V každom ťahu sa môže pohnúť ľubovoľný počet z našich troch hrdinov na niektoré zo stranou susediacich políčok. Na každom políčku s číslom môže stáť v jednom momente len jeden z nich. Navyše po každom ťahu musí súčet čísel, na ktorých stoja Zajffaello, Paľonardo a kráľ, byť deliteľný ôsmimi. Nájdite cestu na čo najmenej ťahov. (Figúrky na políčkach „štart“ a „cieľ“ akoby stáli na nule.)

Cieľ							
37	40	31	57	49	28	41	48
11	12	33	22	58	42	27	15
19	63	16	55	20	25	64	28
10	34	35	50	58	43	23	45
53	37	37	37	37	37	37	37
36	60	17	26	42	21	14	59
32	13	39	52	47	56	29	9
8	1	2	3	4	5	6	7
Štart							

Obr. 2: Plán prehliadky záhrad