Vzorové riešenia 2. kola zimnej série 2017/2018

Príklad č. 1 (opravoval Paľo):

Zadanie: Obe sochy sa pôvodne skladali z 27 malých kociek $1 \times 1 \times 1$ zlepených dokopy tak, aby tvorili kocku $3 \times 3 \times 3$.

Paľonardo si zobral prvú kocku a spravil cez ňu tri „tunely“ tak, že vybral kocky v strede každej steny a aj v úplnom strede kocky. Vznikol mu tak útvar pripomínajúci kostru kocky.

Keď sa Zajffaello hral s druhou kockou, odstránil jej všetky rohové kocky.

Koho nová socha má väčší povrch a o koľko?

Riešenie: Označíme si jednotlivé kocky $1 \times 1 \times 1$ podľa toho, kde sa nachádzajú na pôvodnej kocke $3 \times 3 \times 3$. Konkrétne kocku v rohu označíme A, kocku v strede hrany označíme B, kocku v strede steny C a kocku v strede veľkej kocky označíme D. Vypočítame povrchy jednotlivých útvarov a následne ich porovnáme.

Paľonardov útvar sa skladá z ôsmich kociek typu A a z dvanástich kociek typu B. Týchto 20 kociek by samostatne malo povrch $20 \cdot 6 = 120$. Ale každá kocka typu A sa dotýka tromi svojimi stenami inej kocky a každá kocka typu B sa dotýka dvomi svojimi stenami inej kocky. To znamená, že na kockách typu A je dokopy zakrytých $8 \cdot 3 = 24$ stien a na kockách typu B je zakrytých $12 \cdot 2 = 24$ stien. Teda povrch Paľonardovho útvaru je $120 - 24 - 24 = 72$.

Zajfaellov útvar sa má 12 kociek typu B, 6 kociek typu C a 1 kocku typu D. Jeho útvar má 19 kociek. Každá kocka typu B sa dotýka dvoch kociek, každá kocka typu C sa dotýka piatich kociek a kocka typu D sa dotýka šiestich kociek. Kocky typu B teda poskytuje do povrchu iba 4 steny, každá kocka typu C poskytuje iba 1 stenu a kocka typu D nie je na povrchu vôbec. Teda povrch kocky je $12 \cdot 4 + 6 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 54$.

Vidíme, že Paľonardov útvar má väčší povrch.

Odpoveď: Paľonardov útvar má teda väčší povrch a je väčší o 18 stien malej kocky.

Príklad č. 2 (opravovala Sára):

Zadanie: Nové ohrady a klientky prišli rovno aj so zvieratami. Dokopy v nich bol aspoň jeden klokan, aspoň jeden papagáj a aspoň jeden tiger. Zajffaello sa snažil zistiť, koľko je ktorých zvierat, no tie sa tam toľko pohybovali, že ich nevedel zrátať. Aspoň že ich končatiny vedel zrátať s istotou. Nôh Zajffaello narátal dvakrát toľko ako krídel a hláv narátal 11. Koľko je v ohradách a klietkach ktorých zvierat, ak vieme, že klokanov je najmenej?

Pozn.: Klokan má pre účely tohto príkladu dve nohy.

Riešenie: Draky! Draky! Videli ste to? No, to či ste videli draky je jedna vec, to, že v tejto úlohe nevystupujú je vec druhá. Prečo to spomíname? Ľahko by sme vám uverili, že 11-hlavý drak vie celkom zamotať zadanie tejto úlohy, preto sme radi, že tam také zvieratká nie sú. A keďže draky nemáme, ak Zajffaello porátal 11 hláv, budeme rátať, že v ohradách a klietkach je dokopy 11 zvieratiek.

Čo ďalej? Zamyslime sa teraz nad obmedzeniami, ktoré nám dáva zadanie. Z každého zvieratka máme aspoň jedno. Ešte niečo? Ešte vieme, že klokanov je najmenej. To znamená, že ak vezmeme iba jedného malého klokana, aj tigre, aj papagáje musia byť aspoň dva.

Posledná informácia zo zadania, ktorú sme nevyužili je, že máme mať dvakrát toľko nôh ako krídel. Teda nie my, ale zvieratká dokopy.

Poďme sa najskôr zamyslieť nad minimálnym počtom nôh v klietkach a ohradách. K počtu nôh najviac prispievajú tigre, teda sa budeme snažiť mať ich čo najmenej. Dohodli sme sa, že najmenej môžeme mať dvoch tigrov, a zvyšných $11 - 2 = 9$ zvierat bude mať po dve nohy. Dokopy nôh teda bude $9 \cdot 2 + 2 \cdot 4 = 26$. Aspoň toľko ich v klietach a ohradách určite bude. Ďalej podľa zadania vieme, že nôh je dvakrát viac ako krídel, teda ak máme nôh 26, tak určite bude v ohradách a klietkach aspoň 13 krídel. To však nie je možné, keďže každý poriadny papagáj má presne 2 krídla, teda poček krídel musí byť párny. Takže nôh musí byť v ohrade viac. To znamená, že v ohrade musí byť minimálne 28 nôh a teda 14 krídel. No a keďže ani tigre ani klokany nemajú krídla v ohrade je určite aspoň 7 papagájov. Ďalej sme mali jedného klokan a 2 tigre, čo je dokopy $7 + 2 + 1 = 10$ zvierat, ktoré majú 14 krídel a 24 nôh. Vieme, že v ohade je ale zvierat 11, teda pridať môžeme už len jedno zviera s tým, že počet nôh sa má zvýšiť o 4 a počet krídel má zostať rovnaký, teda pridáme 1 tigra.

Toto je zároveň jediné riešenie, pretože sme postupovali podľa podmienok zadania a žiadne iné kombinácie zvieratiek nám podmienky nespĺňali.

Odpoveď: V ohradách a klietkach bolo dokopy 7 papagájov, 3 tigre a 1 klokan.

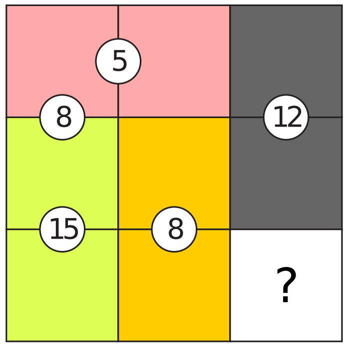
Komentár: Táto úloha sa dala riešiť aj pomocou rovníc a následne skúšaním. Častokrát sa ale stávalo, že ste rozmýšlali len nad niektorými možnosťami a nezdôvodnili ste prečo sa ostatné nedajú.

Príklad č. 3 (opravoval Zajo):

Zadanie: Zemiakový záhon má tvar mriežky 3×3. Do každého políčka mriežky potrebujeme zasadiť odrody zemiakov očíslované 1 až 9, každú práve raz. Háčikom ale je, že krúžky na hraniciach políčok vždy určujú súčet čísel odrôd na dvoch susedných políčkach. Ktorá odroda zemiakov bude v pravom dolnom políčku?

Riešenie: K takejto úlohe je možné zvoliť niekoľko prístupov. Jeden z nich by mohol byť, že by sme sa pozreli na konkrétne políčko a rozobrali, aké čísla v ňom môžu byť. Napr. vľavo hore môžeme mať len čísla $1, 2, 3, 4$ (ak by tam bolo väčšie číslo, tak by sme nevedeli nič doplniť do súčtu k 5-ke naľavo). Z toho by sme 3 a 4 vylúčili, keby sme rozobrali možnosti na vyplnenie políčok v ľavom stĺpci. Takto by sme mohli pokračovať ďalej a prísť k riešeniam, ktoré majú vľavo hore 1 a 2.

V tomto vzorovom riešení si ale ukážeme iný, trocha trikovejší, ale o to krajší prístup. Kľúčovým v úlohe je, že sa nepýtame na to, ako môže vyzerať celá tabuľka, ale len aké políčko bude vpravo dole. Ak použijeme súčty dvojíc políčok, tak si môžeme všimnúť, že štyri z nich nám dajú dokopy súčet na 8 políčkach, teda všetkých okrem pravého dolného. Takéto rozdelenie vidíme na obrázku 1.



Obr. 1: Dvojice políčok, v ktorých strede sú súčty

Sčítaním týchto štyroch čísel - $5, 8, 12, 15$ (jeden zo súčtov - 8 v prvom stĺpci nepoužívame) dostaneme súčet čísel vo všetkých políčkach okrem pravého dolného. Súčet všetkých čísel poznáme, pretože dopĺňame čísla od 1 po 9, každé práve raz. Ostáva nám odrátať od súčtu všetkých čísel súčet čísel v políčkach okrem hľadaného a dostaneme náš výsledok:

$$(1 + 2 + 3 + \cdots + 9) - (5 + 8 + 12 + 15) = 45 - 40 = 5$$

Odpoveď: V pravom dolnom políčku sa bude nachádzať odroda zemiakov č. 5.

Príklad č. 4 (opravovali Paľo, Teri, MaťoU, Miško):

Zadanie: Paľonardo má šesť poschodí visutej záhrady a šesť druhov rastlín, z toho každá môže byť iba na jednom poschodí. Zajffaello mu o nich povedal tieto informácie:

- Agát biely je na nižšom poschodí ako fialka voňavá
- Fialka voňavá je na nižšom poschodí ako cesnak okrasný;
- Cesnak okrasný je na nižšom poschodí ako bodliak kučeravý;
- Ďatelina lúčna je na nižšom poschodí ako cesnak okrasný;
- Ebenovník ďatlový je na nižšom poschodí ako bodliak kučeravý.

Potom mu Zajffaello povedal, že by mu musel prezradiť ešte aspoň štyri takéto informácie (ktoré by hovorili, že istá rastlina je na nižšom poschodí ako istá iná rastlina), aby tieto rastliny vedel s určitosťou usporiadať od najnižšieho poschodia po najvyššie.

Vie ich teraz Paľonardo usporiadať? Ako?

Riešenie: Dobrý deň, milí záhradkári, poďme zasadiť nejaké tie kvetinky. Viete ako vyzerá ebenovník? A viete, čo je to hurmikaki?

Ak si myslíte, že sú to úplne nesúvisiace otázky, mýlite sa. Pekne poporiadku. Hurmikaki je také super ovocie, ktoré viete na jeseň (hlavne na jeseň) nájsť v obchodoch a chutí ako niečo medzi mangom, jablkom, mrkvou a tekvicou. Dobré čo? A viete, kde rastie? Na ebenovníku! No a teraz už môžeme smelo riešiť príklad.

Ďalej sa dohodneme, že agát biely budeme označovať A. Rovnako bodliak kučeravý - B, cesnak okrasný - C, ďatelina lúčna - D, ebenovník ďatlový - E, fialka voňavá - F. Bude sa nám lepšie písať.

Najprv si musíme ozrejmiť jednu vec. Keď nám niekto povie, že $A > B$, neznamená to nutne, že agát je o jedno poschodie vyššie ako bodliak, znamená to len, že je proste vyššie. Niekde nad. A keď nám niekto povie že $A > C$, tiež vieme iba, že agát je vyššie ako cesnak. Čo vieme teraz povedať o vzájomných polohách B a C? Viete? Odpoveď je, že nič. Keby nám ale niekto namiesto $A > C$ povedal, že $B > C$, hneď by sme vedeli, že $A > B > C$. Takže nie je informácia ako informácia. Pozrime sa na to trochu bližšie.

Povedzme, že checeme usporiadať čísla $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$ od najmenšieho po najväčšie pričom platí, že $a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5 < a_6$. Na to aby sme ich vedeli usporiadať nám očividne stačí vedieť, že $a_1 < a_2$, $a_2 < a_3$, $a_3 < a_4$, $a_4 < a_5$ a $a_5 < a_6$. Čo by sa ale stalo, keby sme nemali jednu z týchto informácií? V tom prípade by sme nevedeli v akom poradí je daná dvojica. Pomocou ostatných informácií by sme vedili určiť najviac to, že sú obidve medzi a_1 a a_4. Vyzerá to tak, že na to aby sme vedeli určiť výsledné poradie, musíme vedieť informáciu o každej susediacej dvojici (v našom príklade sú to informácie o rastlinách ktoré sú priamo nad sebou). Tieto informácie budem označovať ako užitočné. Ostatné informácie budeme označovať ako zbytočné. Vráťme sa teda k samotnému príkladu.

Informácie ktoré máme zo zadania sú:

$$A < F$$
$$F < C$$
$$C < B$$
$$D < C$$
$$E < B$$

Podľa tohto vieme, že $A < F < C < B$. Niekde medzi nimi ešte musia byť D a E. Ako sme si už ukázali, užitočné sú iba tie informácie, ktoré hovoria o rastlinách priamo nad sebou. Takýchto dvojíc je medzi šiestimi rastlinkami (alebo ak chcete šiestimi poschodiami) presne 5. Keďže podľa zadania potrebujeme ešte 4 informácie aby sme vedeli určiť poradie, je užitočná iba jedna z informácií ktoré máme zo zadania. To tiež znamená, že iba jedna z informácií v zadaní hovorí o dvojici, ktorá je priamo nad sebou.

Keby sme umiestnili D a E obe do jednej „medzery“ medzi $A < F < C < B$ (napríklad medzi A a F), zostali by nám FCB presne vedľa seba a teda by za zadania boli užitočné až dve informácie. Preto musíme umiestniť D do jednej medzery a E do nejakej inej.

Pozrieme sa kde môže byť D. Keďže $D < C$ nemôže byť nad C a teda nám odpadá možnosť medzery medzi CB. Tiež môžeme vylúčiť možnosť medzi FC, pretože potom by bolo C priamo nad D a to by znamenalo, že informácia $D < C$ bola užitočná (a teda by nám stačilo menej ďalších informácií). Ostáva možnosť AF, kde už nie je žiaden takýto problém. Pre E nám ostali dvojice FC a CB. Dvojicu CB môžem vylúčiť, lebo by bolo B priamo nad E, čo nemôže. Ostáva možnosť že to bude medzi F a C. Usporiadanie teda bude $A < D < F < E < C < B$. V tomto prípade sú užitočné informácie $A < D$, $D < F$, $F < E$, $E < C$, $C < B$. Z toho iba $C < B$ vieme zo zadania a na usporiadanie potrebujeme ešte zvyšné 4 informácie.

Odpoveď: Paľonardo ich vie usporiadať. Správne usporiadanie je $ADFECB$ (od najnižšieho poschodia po najvyššie).

Komentár: Dosť veľa z vás nie úplne pochopilo zadaniu a riešili ste iba prvú časť úlohy. Takéto riešenia ak boli celé správne dostali 4 body. Na druhú stranu sme tiež dostali veľa pekných riešení. Väčšinou ste to riešili tak, že ste našli všetky riešenia iba podľa informácií v zadaní a potom ste pre ne určovali koľko na ne treba ďalších informácií.

Bodovanie: Za čo sme u týchto riešení najčastejšie strhávali body bolo to, že ste neukázali prečo na dané možnoti treba toľko informácií. Ak chcete presne vedieť za čo ste dostávali koľko bodov tu je tabulka:

1. Keď ste ukázali, že bodliak musí byť najvyššie - 1 bod
2. Keď ste ukázali, že $A < F < C < B$ a niekde medzi nimi sú D a E - 1 bod
3. Keď ste vypísali všetkých 15 možností - 2 body
4. Keď ste pre jednotlivé možnosti správne určili koľko na ne treba ďalších informácií - 1 bod
5. Keď ste buď tieto informácie vypísali alebo ste nejak rozumne zdôvodnili prečo ich treba toľko - 2 body
6. Keď ste určili správnu možnosť - 1 bod

7. Zdôvodnenie správneho riešenia (z tohto sme strhávali body keď ste niečo poriadne nezdôvodnili) - 2 body

Príklad č. 5 (opravovali Mišo, Miro):

Zadanie: Zajffaello chcel okúzliť Paľonarda. Povedal mu, aby si vybral ľubovoľné 3 po sebe idúce čísla menšie ako 60. Potom si mal Paľonardo vybrať ešte ľubovoľné číslo menšie ako 100 deliteľné tromi. Toto číslo Zajffaellovi povedal. Ďalší krok, ktorý Paľonardo urobil, bolo sčítanie týchto štyroch čísel a vynásobenie tohto súčtu číslom 67. Paľonardo Zajffaellovi nepovedal výsledok, no povedal mu posledné dve číslice. Teraz prišlo na rad okúzľovanie. Zajffaello z týchto informácii vedel určiť pôvodné 3 čísla aj Paľonardov celý výsledok. Ako to dokázal?

Riešenie: Označme si prostredné z trojice po sebe idúcich čísel a. Číslo pred ním bude číslo o jedna menšie, $a-1$, číslo po ňom bude o jedna väčšie, teda $a+1$. Okrem nich si Paľonardo myslel ešte nejaký násobok 3. Zajffaello ho pozná, my však nie. Vďaka tomu, že je deliteľné tromi existuje nejaké číslo, ktoré keď vynásobíme 3, výsledkom bude práve Paľonardov násobok 3. Pre nás to znamená, že vieme Paľonardovo číslo zapísať ako $3 \cdot b$.

Pozrime sa teraz na ďaľší krok. Zistíme súčet všetkých týchto čísel a ten následne vynásobíme 67.

$$(a-1+a+a+1+3\cdot b)\cdot 67 = (3\cdot a+3\cdot b)\cdot 67 =$$

roznásobíme zátvorku a dostaneme:

$$201\cdot a+201\cdot b = 201\cdot(a+b)$$

Vidíme, že Paľonardov výsledok je násobkom 201. Keď tento výsledok predelíme práve 201 zostane nám súčet $a+b$. Keďže a je prostredné číslo z pôvodnej trojice musí byť menšie ako 60, teda najviac 59. Najväčší násobok 3 menší ako 100 je 99, čo je $3 \cdot 33$. b teda musí byť najviac 33.

Teraz vieme, že $a+b$ nebude viac ako $92 (92 = 33 + 59)$. Toto číslo Paľonardo vynásobil 201, čo je v podstate to isté ako vynásobiť 200 a pripočítať pôvodné číslo. Po vynásobení číslom 200 budú posledné dve cifry 0. To znamená, že ak prirátame pôvodné číslo, posledné dvojčíslie sa zmení na posledné dve cifry tohoto čísla. Tým pádom bude posledné dvojčíslie rovné pôvodnému číslu, v našom prípade $a+b$. Paľonardo Zajffaellovi toto dvojčíslie a teda aj hodnotu $a+b$ povie.

Paľonardo Zajffaellovi povedal násobok 3, ktorý keď Zajffaello vydelí tromi, zistí hodnotu b. Z posledného dvojčíslia pozná súčet $a+b$ a teda vie vypočítať a, čo je prostredné číslo z pôvodnej trojice, prirátaním a odrátaním 1 vie vyrátať aj zvyšné dve a zostáva už len zistiť celý výsledok. Na to si buď zopakuje postup, ktorý predtým v hlave prešiel Paľonardo, alebo teraz už známu hodnotu súčtu $a+b$ vynásobí číslom 201.

Komentár: Veľa z vás poľahky našlo spôsob, ktorým Zajffaello zisťoval čísla, avšak mnohí z vás nevysvetlili prečo to takto funguje, alebo ste postup predviedli len pre jeden prípad a nepopísali ste ako by to mohlo fungovať všeobecne. Na to si treba dávať pozor, v príkladoch sa pýtame na všeobecné riešenia a postupy (hovoríme tomu aj dôkazy), na ktoré sa budeme vedieť spoľahnúť vo všetkých prípadoch, ktoré pripúšťa zadanie.

Príklad č. 6 (opravovala Dada):

Zadanie: Presvedčiť kráľovského záhradníka, aby im pomohol, nebolo také ľahké, ako si Paľonardo a Zajffaello mysleli. Záhradník totiž povedal, že im pomôže len vtedy, keď si s ním Paľonardo zahrá hru. Paľonardo začína. Hru začínajú s 420 okrasnými kvetináčmi na kope. Striedajú sa v ťahoch. V každom ťahu odoberú z kopy niekoľko kvetináčov podľa nasledujúcich pravidiel:

- Ak počet kvetináčov na kope nie je mocnina čísla 2, hráč môže odobrať počet kvetináčov rovný najväčšej mocnine 2, menšej ako aktuálny počet kvetináčov.
- Ak počet kvetináčov na kope je párny, hráč môže odobrať polovicu kvetináčov.

Hráč, ktorý už nevie vykonať ťah prehráva. Kto z nich má vyhrávajúcu stratégiu? Paľonardo alebo kráľovský záhradník?

Pozn.: Mocnina čísla 2 *je číslo, ktoré vzniklo opakovaným násobením čísla* 2 *so samím sebou. Sú to čísla* $1, 2, 4, 8, 16, \ldots$

Riešenie: Dámy a páni, vítam Vás pri sledovaní prestížneho boja o kvetináče. Je to tak. Dnes sa rozhodne. Dnes zistíme, kto vyhrá. Bude to Paľonardo? Alebo to bude kráľovský záhradník? Poďme sa na to pozrieť.

Hráme milionára, prvá otázka znie... či nie? Takto to nebolo, dobre, poďme sa hrať kvetinára. V prvom kole začína Paľonardo, ako nám vraví zadanie. Zadanie nám ďalej vraví, že máme dve možnosti. Keďže 420, čo je aktuálny počet kvetináčov, nie je mocnina čísla 2, môžeme odobrať najväčšiu mocninu 2 menšiu ako 420, teda môžeme odobrať 256 a zostane nám $420 - 256 = 164$. No keďže 420 je aj párne, rovnako môžeme odobrať aj 210 pričom zostane $420 - 210 = 210$. Čo Paľonardo spraví? Čo sa mu viac oplatí? Vieme to už teraz určiť? No nevieme. Preto sa musíme venovať obom možnostiam.

Je tu druhé kolo, na rade je pán kráľovský záhradník. Koľko to máme tých kvetináčov teraz? No buď 164 alebo 210. Naozaj musíme preskúmať obe, tak poďme na to.

1. Máme 164 kvetináčov. Máme teda znovu párne číslo, a môžeme sa rozhodnúť, buď delíme dvoma a zostanem nám $164 - 82 = 82$ alebo odpočítavame najväčšiu mocninu dva menšiu ako 164 a zostáva $164 - 128 = 36$ kvtetináčov.
2. Máme 210 kvetináčov. Opäť sa teda rozhodujeme, či vezmeme polovicu, $210 - 105 = 105$, alebo či vezmeme mocninu dva a zostane nám $210 - 128 = 82$ kvetiáčov.

Po druhom kole teda môžeme mať zostatok 82, 34 alebo 105 kvetináčov. Všimnime si teraz, že ak sme sa raz dostali k nepárnemu číslu, nemôžeme odoberať polovicu, ale musíme odoberať najbližšiu menšiu moncninu čísla 2. Mocniny dvojky sú ale párne čísla (až na číslo 1), teda aj po odpočítaní mocniny budeme mať zase iba nepárne číslo. Teda vieme, že Paľonardo vezme 64 a zostane nám $105 - 64 = 41$, potom kráľovský záhradník vezme $41 - 32 = 9$, nasleduje ťah Paľonarda a teda $9 - 8 = 1$ a náš kráľovský záhradník prehral, lebo nemôže spraviť žiaden ťah. Vyhral Paľonardo, tešíme sa s ním.

V treťom kole nám na preriešenie zostávajú dva prípady, a to keď máme 82 alebo 34 kvetináčov.

1. Ak máme 82, a vezmeme polovicu, zostane nám $82 - 41 = 41$ a pri odobratí mocniny dvojky zostáva $82 - 64 = 18$
2. Ak máme 36, buď vezmeme polovicu a zostane $34 - 17 = 18$, alebo $36 - 32 = 4$ ketináče.

Ak nám zostalo 41 kvetináčov, záhradník berie 32, zostalo 9, Paľonardo berie 8 a vyhral.

Do štvrtého kola teda vstupujú počty 18 alebo 4 kvetináče a na ťahu je záhradník.

1. Ak máme 18 kvetináčov, môžeme zobrať polovicu a dostať 9, alebo zobrať mocninu 2 a skončiť s $18 - 16 = 2$ kvetináčmi.
2. V prípade 4 kvetináčov odoberáme 2 a zostávajú 2 (nemôžeme zobrať 4, lebo to je mocnina čísla 2)

Blíži sa piate kolo, čo chvíľa sa rozhodne. Na ťahu je Paľonardo.

1. Ak nám zostali 2 kvetináče tak vezme polovicu, zostane jeden kvetináč a záhradník už nemá čo robiť.
2. Ak nám zostalo 9 kvetináčov, vezme 8 čo je najbližšia menšia mocnina čísla dva, a zostane takisto jeden kvetináč a smutný záhradník.

Odpoveď: Ukázali sme, že v každom prípade hry Paľonardo vyhráva, a teda má víťaznú stratégiu on.
Komentár: Príklad všeobecne dopadol veľmi dobre. Väčšina z Vás pomocou obrázku ukázali, ako by mohli vyzerať jednotlivé kolá a odtiaľ odvodili výsledok. Vyskytlo sa zopár nejasností ohľadom zadania, a to konkrétne, že ak ste dostali párne číslo, automaticky ste odoberali polovicu a neuvažovali nad možnosťou odpočítať mocninu. Ostatné strhnuté body boli väčšinou za nedovysvetlené možnosti. Rovnako dobrý ako takýto slovný postup je aj obrázok alebo tabuľka, ku ktorej je ale tiež potrebné doplniť slovný komentár.

Príklad č. 7 (opravovali Zajo, Kubo):

Zadanie: Záhrada má tvar 99-uholníka. Na obvode 99-uholníka je farebný plot, ktorého každá strana je nejakej farby. Robotníci plot postavili tak, že farby jeho strán boli postupne červená, modrá, červená, modrá, ..., červená, modrá a žltá. Malo to jediný problém. Kráľ by rád vymenil farbu posledných dvoch strán, čiže strany by postupne mali farby červená, modrá, červená, modrá, ..., červená, žltá, modrá. Plot sa dá prefarbovať tak, že vždy zamaľujeme jednu zo strán na červenú, modrú alebo žltú. Podmienkou šľachty žijúcej v okolí však je, že v žiadnom momente nesmie byť farba dvoch susedných strán rovnaká. Vedia Zajffaelo a Paľonardo vyhovieť kráľovej požiadavke? Ak áno, ako by to urobili? Ak nie, prečo by to nikdy nezvládli?
Riešenie: Po chvíli zamýšľania sa nad tým, ako by sa plot dal prefarbiť plnej neúspešných pokusov, sa môžeme začať zamýšľať nad tým, ako by sme dokázali, že plot prefarbiť nepôjde.

Celé prefarbovanie prebieha v krokoch, a po každom prefarbení je plot v nejakom „stave“. Typickým spôsobom ako dokázať, že sa plot nebude dať prefarbiť, tj. že sa nebudeme vedieť prefarbeniami dostať do cieľového „stavu“, je použiť nejakú vlastnosť tohto stavu (Napr. počet, alebo paritu niečoho). Túto vlastnosť použijeme tak, že sa pozrieme aká je na začiatku, aká má byť na konci a dokážeme, že sa „neprefarbíme“ zo začiatku na koniec (táto technika sa zvykne nazývať aj hľadanie invariantu - niečoho čo sa nemení).

Za vlastnosť si v tomto prípade zvolíme niečo pomerne netradičné. Predstavíme si, že sa postavíme pred jednu latku plotu a začneme chodiť dookola 99-uholníka. Budeme si zapisovať dvojice susedných farieb, ktoré postupne uvidíme. Najprv teda dostaneme dvojicu ČM (červená-modrá), potom MČ, ... Takto dostaneme 49 dvojíc ČM, 48 dovjíc MČ, 1 dvojicu MŽ a 1 dvojicu ŽČ.

Na konci, v hľadanom rozostavení je 48 dvojíc ČM, 49 dvojíc MČ, 1 dvojica ČŽ, 1 dvojica ŽM. Farbu vieme prefarbiť na inú len keď je obklopená 2 rovnakými farbami (ak by nebola, tak ju prefarbíme na farbu jednej zo susedných lát a tým porušíme podmienku zo zadania).

Máme preto šesť možností na zmenu: ČMČ $\rightarrow$ ČŽČ, MČM $\rightarrow$ MŽM, ŽMŽ $\rightarrow$ ŽČŽ a naopak. Problémom ale je, že keď rátame počet dvojíc po zmene, tak sa nám nemení to, že dvojica ČM je viac krát ako MČ. Prečo? Ak odstránime ČM, tak nutne odstránime aj MČ (naopak, keď jedno pridáme, tak pribudne aj druhé).

Našou vlastnosťou je teda to, že na začiatku je počet ČM na plote väčší ako počet MČ. Akokoľvek prefarbujeme plot, tak táto vlastnosť „stavu“ v ktorom je plot ostáva zachovaná. V konečnom stave je ale opak pravdou a preto sa do neho nevieme nikdy dofarbiť.
Odpoveď: Plot na nedá prefarbiť tak, aby to vyhovovalo kráľovej požiadavke.
Komentár: Tešíme sa správnym riešeniam, ktoré boli každé odlišné od ostatných. Sme tiež radi, že aj keď ste príklad nevyriešili, tak ste posielali aspoň čiastočné riešenia, za ktoré ste dostali nejaké tie bodíky podľa toho, koľko ste toho vyskúšali.

V niektorých riešeniach, ste dokazovali obdobné vlastnosti pre 5 a 9-uholníky s nasledovným zovšeobecnením. Tento prístup je v tomto príklade pomerne náročný, často sa pri ňom môže stať, že sa pomýlime a skončíme spokojne s pocitom, že príklad máme vyriešený správne, aj keď sme len prehliadli nejaký dôležitý detail.

Príklad č. 8 (opravoval Lámač):

Zadanie: Paľonardo vie, že v kráľovskom amfiteáteri musia byť všetky stoličky usporiadané do niekoľkých zarovnaných radov s rovnakým počtom stoličiek a teda musia tvoriť obdĺžnik. Musí na ne vedieť usadiť dámy a pánov nasledovne. V každom rade bude presne 14 pánov. V každom stĺpci bude presne 10 dám. Práve 3 stoličky budú prázdne. Ukážte, že stoličiek budú potrebovať najmenej 567.

Riešenie: V prvom rade si uvedomme, čo znamená ukázať, že stoličiek budú potrebovať najmenej 567. Znamená to dokázať, že stoličiek nemôže byť menej ako 567 tak aby to vyhovovalo zadaniu. Neznamená to nájsť riešenie pre 567 stoličiek.

Označme počet radov ako R a počet stĺpcov ako S. Kedže stoličky sú usporiadané v obdĺžniku, ich počet bude $R \cdot S$. Počet pánov celkovo je $14R$ nakoľko ich je v každom rade 14, počet dám je podobným odvodením $10S$ a prázdne zostanú 3 stoličky. Preto pre počet stoličiek platí nasledujúca rovnica:

$$10S + 14R + 3 = RS \tag{1}$$

Našim cieľom je zistiť pre aké dvojice R a S má zadanie riešenie. Následne budeme schopní vypočítať a nájsť najmenší súčin RS, teda počet stoličiek. Rovnicu 1 sa budeme snažiť upraviť do tvaru:

$$(R - k)(S - l) = m \tag{2}$$

kde k, l a m sú čísla. Všimnime si, že ak roznásobíme zátvorky, dostaneme $RS - lR - kS + kl$. Z toho môžeme konštatovať $l = 14$, kedže v rovnici 1 je R násobené 14 a $k = 10$, nakoľko je S násobené 10. Násobok $kl = 140$ je o 3 menší ako m, takže $m = 143$. Pre lepšiu prehľadnosť si to vieme z rovnice 1 zapísať nasledovne:

$$RS - 14R - 10S = 3$$

Z čoho odvodíme pripočítaním kl:

$$RS - 14R - 10S + kl = 3 + kl$$

Ale naspäť k riešeniu. Rovnicu 2 sme upravili do tvaru:

$$(R - 10)(S - 14) = 143 \tag{3}$$

Využijeme poznatok prvočíselného rozkladu čísla $143 = 11 \cdot 13$. Aby súčin zátvoriek v rovnici 3 bol rovný 143, musí nastať jeden z nasledujúcich štyroch prípadov:

1. $(R - 10) = 1$ a $(S - 14) = 143$
2. $(R - 10) = 11$ a $(S - 14) = 13$
3. $(R - 10) = 13$ a $(S - 14) = 11$
4. $(R - 10) = 143$ a $(S - 14) = 1$

V prvom prípade sa $R = 11$ a $S = 157$, v druhom $R = 21$ a $S = 27$, v treťom $R = 23$ a $S = 25$, a v poslednom štvrtom $R = 153$ a $S = 15$. Toto sú všetky možnosti počtu radov a stĺpcov v amfiteátri. V jednotlivých prípadoch bude počet stoličiek, teda RS:

1. $11 \cdot 157 = 1727$
2. $21 \cdot 27 = 567$
3. $23 \cdot 25 = 575$
4. $153 \cdot 15 = 2295$

Kedže v druhom prípade je počet stoličiek najmenší, bude to minimálny počet stoličiek. Ten je 567, čím sme dokázali, že v kráľovskom amfiteátri budú potrebovať najmenej 567 stoličiek.

Komentár: Riešitelia by sa dali až na pár výnimiek zaradiť do dvoch kategórií. Prvou boli riešitelia, ktorí nepochopili, že treba dokázať aký je najmenší počet stoličiek a nie ukázať ako obsadiť 567 stoličiek, alebo použili nekorektný argument na dokazovanie. Lepšie riešenia sa vyznačovali správnymi dokazovacími metódami, aj keď nie vo všetkých prípadoch boli dotiahnuté do konca. Kedže tieto kategórie sa veľkosťou zhruba rovnajú, dalo by sa podľa nich riešiteľov rozdeliť na polovice.

Prvej polovici by som určite odporučil zamyslieť sa nad zadaním: ako viem ukázať, že najmenej treba toľko? Čo ak sa dá menej? Teda najmenej je toľkoto iba ak ukážem prečo sa menej nedá dať. Ďalej sa treba zamyslieť, akým spôsobom budem postupovať. Naozaj som nevynechal žiadnu možnosť? Prečo by malo moje tvrdenie platiť, neexistuje protipríklad?

V druhej polovici nastali chyby v nepokrytí všetkých možností alebo bolo nepostačujúco vysvetlené prečo ďalšie možnosti nemusíme hľadať.

Avšak spôsobov riešenia bolo mnoho, preto je komentár viacej všeobecný a nedá sa ním vystihnúť každý riešiteľ. Niektoré riešenia boli obzvlášť kreatívne :)

Príklad č. 9 (opravovala Timka):

Zadanie: V záhradníckom obchode je $n^2 + 1$ kvetov. Všetky kvety majú istú výšku, pričom medzi nimi nie sú žiadne dva kvety, ktoré by boli rovnako vysoké. Sú vystavené v jednom dlhom rade od začiatku predajne. Jumajleo z nich chce vybrať $n + 1$ kvetov. Dokážte, že nezávisle na ich poradí vo výklade, vie vybrať také kvety, ktorých výšky v poradí ako stoja za sebou v obchode, tvoria rýdzo rastúcu, alebo rýdzo klesajúcu postupnosť.

Pozn. "Rýdzo" rastúca (resp. klesajúca) postupnosť je taká, ktorej každý prvok je väčší (resp. menší) ako všetky predchádzajúce.

Riešenie: Ako ste sami zistili, tento príklad bol ťažší, než by sme čakali. Vo vzorovom riešení sa preto snažíme vniesť do riešenia aspoň trocha intuície pri jednotlivých krokoch. Riešenie takýchto príkladov už nemusí byť priamočiare, ako pri ostatných úlohách, ale jednoducho treba niečo vymyslieť. Napriek tomu Vám odporúčame prekúsať sa aj týmto vzorovým riešením, veríme že sa naučíte pár užitočných trikov.

Skúsme najskôr nadobudnúť intuíciu ohľadom toho, čo by sme mali skúsiť urobiť. Máme hľadať niečo dlhé $n + 1$ a v zadaní je niečoho $n^2 + 1$. Máme ukázať, že bez ohľadu na rozostavenie kvetín, tam bude existovať nejaká postupnosť $n + 1$ kvetov. Jednou z metód, ktorá sa na to dá použiť je Dirichletov princíp, tj. zovšeobecnená myšlienka toho, že keď máme k krabičiek a $k + 1$ vecí čo do nich strkáme, tak v niektorej krabičke budú musieť byť aspoň dve veci (v prípade, že ste sa s touto myšlienkou doteraz nestretli, odporúčame si ju rozmyslieť). *Pozn. V skutočnosti je to iba slušný názov pre niečo, čo by mohlo byť kľudne súčasťou sedliackeho rozumu.*

Zrealizujme nasledovný nápad (ktorý zatiaľ môže vyzerať, že padol z neba): Ku každému kvetu si zapíšme, aká najdlhšia rastúca a aká najdlhšia klesajúca postupnosť končí pri tomto kvete. Ak by X bolo poradie kvetov tak Y sú dĺžky najdlhších rastúcich a Z klesajúcich postupností. Ako vidíme tieto „postupnosti" ktorých dĺžky zapisujeme sa neskladajú z nutne po sebe idúcich čísel (môžeme si to predstaviť ako čiastkové odpovede na otázku zo zadania, že akú najdlhšiu postupnosť daného druhu by sme vedeli vybrať po tú kvetinu).

$$X = (5, 6, 2, 1, 4, 3, 7) \quad Y = (1, 2, 1, 1, 2, 2, 3) \quad Z = (1, 1, 2, 3, 2, 3, 1)$$

Napríklad šiesty prvok Z má hodnotu 3, pretože postupnosť $5, 4, 3$ (aj $6, 4, 3$) je klesajúca a končí na šiestom mieste (to, že 7 nie je $n^2 + 1$ nám v tomto čisto ilustračnom príklade nevadí).

Keď pozorujeme Y (resp. Z), tak prvky v nich často rastú (resp. klesajú) o 1, alebo naopak a kľudne aj o viac. Skúsme ale dokázať takúto vlastnosť - pre každú pozície bude dvojica čísel z Y a Z rôzna. Inými slovami, nebudú existovať dva kvety, pre ktoré by platilo, že dĺžky najdlhšej rastúcej aj klesajúcej postupnosti, ktoré končia na ich miestach sú rovnaké.

Ak by také dva kvety existovali - označme ich k a l (pričom k je ten, čo sa v rade nachádza skôr), tak platí buď $k > l$, alebo $k < l$. Ak ale platí $k > l$, tak dĺžka najdlhšej klesajúcej postupnosti, ktorá končí v l musí byť aspoň o jedna väčšia ako takej, čo končí v k (zoberieme tú čo končí v k, pridáme k nej l a dostávame dlhšiu klesajúcu postupnosť). Podobne pri $k < l$ a rastúcich postupnostiach.

Práve sme ukázali, že každé dva kvety majú priradenú rôznu dvojicu čísel (jedno v Y a jedno v Z), označme ju (y, z). V jednoduchšom prípade sa nám stane, že pre niektorý z kvetov platí $y \geq n + 1$, alebo $z \geq n + 1$. Daná postupnosť končiaca týmto kvetom je potom hľadaná postupnosť zo zadania.

Zaujímavejší je ale prípad, kedy by pre všetky kvety malo platiť, že $y < n + 1$ a zároveň $z < n + 1$, to by zmanenalo, že odpoveďou na otázkou zo zadania by bolo, že hľadanú postupnosť vybrať nevieme. Ako to už chodí, skúsme dokázať, prečo tento prípad nemôže nastať.

Koľko je možných dvojíc (y, z) spĺňajúcich podmienky z predchádzajúceho odseku? Máme n možností $(1 \ldots n)$ aké y vieme vybrať a podobne pre z. To je dokopy n^2 možností. A práve teraz prichádza na scénu v úvode spomínaný Dirichletov princíp, kvetov máme v obchode n^2+1 a ak by mali spĺňať $y < n+1, z < n+1$, niektoré dve dvojice (y, z) by boli rovnaké. To sme ale už vylúčili, preto bude musieť existovať taký kvet, ktorý má dostatočne veľké y, alebo z a teda v ňom končí hľadaná postupnosť zo zadania.

Odpoveď: Jumaejlo dokáže vždy vybrať rýdzo rastúcu alebo rýdzo klesajúcu postupnosť.

Na záver má možno viacero z Vás na jazyku otázku, ako sme na toto mali prísť? Ako vodítko pri rozmýšľaní v tejto úlohe mohla slúžiť práve snaha nejakým spôsobom nájsť niečo, čoho bude najviac n^2, ale kvetov je viac a preto bude musieť platiť nejaké tvrdenie. My sme na to použili práve všetky možné dvojice čísel menších ako $n + 1$. Pri riešení sa dalo tiež využiť zamyslenie na základe menších prípadov, tj. ak by bolo kvetov menej, akú postupnosť budeme vedieť vybrať? Ak by bola klesajúca, alebo len rastúca? Pri skúšaní týchto možností pre malé konkrétne n, a následovne pre iné výrazy od n, než priamo $n^2 + 1$ bolo možné prísť k pozorovaniam o postupnostiach spomínaných v riešení. Napríklad to, že pri n^2 kvetoch to bude „akurát“ vychádzať a dĺžky rastúcich a klesajúcich postupností tam budú každá práve raz. Následne sme mohli skúmať, čo presne sa pokazí pri pridaní toho posledného kvetu.

Na konci dňa stále platí, že sa s tým bolo treba pohrať a jednoducho spraviť pár šikovných pozorovaní. Dúfame, že ste si z tohto čítania odniesli nápady a myšlienky, ktoré využijete v budúcnosti :)

Komentár: Niektorí ste úlohu riešili tak, že ste našli „najhoršie“ rozmiestnenie. Je to pomerne intuitívny prístup, ale pri tejto metóde riešenia si vždy treba dať pozor, aby ste mali vysvetlené, že situácia je naozaj najhoršia, prípadne najlepšia. Zvyčajne ale existuje iný prístup k riešeniu úlohy, ako aj teraz, kde sa dá tomuto vyhnúť.

Prémia (opravovali Mišo, Miro):

Zadanie: Prehliadka sa začala, no niečo sa pokazilo. Zachráňte Paľonarda, Zajffaella a kráľa tým, že ich dostanete z políčka „štart“ na políčko „cieľ“ (Obr. 2). V každom ťahu sa môže pohnúť ľubovoľný počet z našich troch hrdinov na niektoré zo stranou susediacich políčok. Na každom políčku s číslom môže stáť v jednom momente len jeden z nich. Navyše po každom ťahu musí súčet čísel, na ktorých stoja Zajffaello, Paľonardo a kráľ, byť deliteľný ôsmimi. Nájdite cestu na čo najmenej ťahov. (Figúrky na políčkach „štart“ a „cieľ“ akoby stáli na nule.)

Riešenie: Najlepšie riešenie bolo na dvanásť krokov a jedno si ukážeme na ďalšej strane.

Cieľ

37	40	31	57	49	28	41	48
11	12	33	22	58	42	27	15
19	63	16	55	20	25	64	28
10	34	35	50	58	43	23	45
53	37	37	37	37	37	37	37
36	60	17	26	42	21	14	59
32	13	39	52	47	56	29	9
8	1	2	3	4	5	6	7

Všetci Štart

Obr. 2: Začiatok (Zadanie)

Komentár: Skoro všetci ste to zvládli na najmenší počet ťahov, alebo ste boli k tomuto počtu strašne blízko, ale odmenili sme každého kto zvládol zachrániť Paľonarda, Zajffaella aj kráľa.

Cieľ

37	40	31	57	49	28	41	48
11	12	33	22	58	42	27	15
19	63	16	55	20	25	64	28
10	34	35	50	58	43	23	45
53	37	37	37	37	37	37	37
36	60	17	26	42	21	14	59
32	13	39	52	47	56	29	9
8	**1**	**2**	3	4	**5**	6	7

Štart

Obr. 3: Prvý krok

Cieľ

37	40	31	57	49	28	41	48
11	12	33	22	58	42	27	15
19	63	16	55	20	25	64	28
10	34	35	50	58	43	23	45
53	37	37	37	37	37	37	37
36	60	17	26	42	21	14	59
32	13	**39**	52	47	**56**	29	9
8	**1**	2	3	4	5	6	7

Štart

Obr. 4: Druhý krok

Cieľ

37	40	31	57	49	28	41	48
11	12	33	22	58	42	27	15
19	63	16	55	20	25	64	28
10	34	35	50	58	43	23	45
53	37	37	37	37	37	37	37
36	60	**17**	26	42	**21**	14	59
32	13	39	52	47	56	29	9
8	1	**2**	3	4	5	6	7

Štart

Obr. 5: Tretí krok

Cieľ

37	40	31	57	49	28	41	48
11	12	33	22	58	42	27	15
19	63	16	55	20	25	64	28
10	34	35	50	58	43	23	45
53	37	37	37	**37**	37	37	37
36	**60**	17	26	42	21	14	59
32	13	**39**	52	47	56	29	9
8	1	2	3	4	5	6	7

Štart

Obr. 6: Štvrtý krok

Cieľ

37	40	31	57	49	28	41	48
11	12	33	22	58	42	27	15
19	63	16	55	20	25	64	28
10	34	35	50	58	**43**	23	45
53	37	37	37	37	37	37	37
36	60	**17**	26	42	21	14	59
32	13	39	52	47	56	29	9
8	1	2	3	4	5	6	7

Štart

Obr. 7: Piaty krok

Cieľ

37	40	31	57	49	28	41	48
11	12	33	22	58	42	27	15
19	63	16	55	20	25	64	28
10	34	35	50	58	43	**23**	45
53	37	**37**	37	37	37	37	37
36	**60**	17	26	42	21	14	59
32	13	39	52	47	56	29	9
8	1	2	3	4	5	6	7

Štart

Obr. 8: Šiesty krok

Cieľ

37	40	31	57	49	28	41	48
11	12	33	22	58	42	27	15
19	63	16	55	20	25	**64**	28
10	34	**35**	50	58	43	23	45
53	**37**	37	37	37	37	37	37
36	60	17	26	42	21	14	59
32	13	39	52	47	56	29	9
8	1	2	3	4	5	6	7

Štart

Obr. 9: Siedmy krok

Cieľ

37	40	31	57	49	28	41	48
11	12	33	22	58	42	**27**	15
19	63	16	55	20	25	64	28
10	**34**	**35**	50	58	43	23	45
53	37	37	37	37	37	37	37
36	60	17	26	42	21	14	59
32	13	39	52	47	56	29	9
8	1	2	3	4	5	6	7

Štart

Obr. 10: Ôsmy krok

Cieľ

37	40	31	57	49	28	**41**	48
11	12	33	22	58	42	27	15
19	**63**	**16**	55	20	25	64	28
10	34	35	50	58	43	23	45
53	37	37	37	37	37	37	37
36	60	17	26	42	21	14	59
32	13	39	52	47	56	29	9
8	1	2	3	4	5	6	7

Štart

Obr. 11: Deviaty krok

Cieľ

37	40	31	57	49	28	41	48
11	**12**	**33**	22	58	42	**27**	15
19	63	16	55	20	25	64	28
10	34	35	50	58	43	23	45
53	37	37	37	37	37	37	37
36	60	17	26	42	21	14	59
32	13	39	52	47	56	29	9
8	1	2	3	4	5	6	7

Štart

Obr. 12: Desiaty krok

Cieľ

37	**40**	**31**	57	49	28	**41**	48
11	12	33	22	58	42	27	15
19	63	16	55	20	25	64	28
10	34	35	50	58	43	23	45
53	37	37	37	37	37	37	37
36	60	17	26	42	21	14	59
32	13	39	52	47	56	29	9
8	1	2	3	4	5	6	7

Štart

Obr. 13: Jedenásty krok

Všetci Cieľ

37	40	31	57	49	28	41	48
11	12	33	22	58	42	27	15
19	63	16	55	20	25	64	28
10	34	35	50	58	43	23	45
53	37	37	37	37	37	37	37
36	60	17	26	42	21	14	59
32	13	39	52	47	56	29	9
8	1	2	3	4	5	6	7

Štart

Obr. 14: Posledný krok