

Zadania 1. kola zimnej série 2017/2018

Termín: 09.10.2017

Naša adresa: Riešky, Mgr. Viera Babišová, Gymnázium Grösslingová, Grösslingová 18, 811 09 Bratislava 1

Elektronické riešenia: <http://riesky.sk/>

Paľonardo da Tomči sa ako obvykle včasne po obede prechádzal po svojej komnate v odľahlej časti Florencie. Jeho učeň Zajffaello sedel na skromnej drevenej lavici v rohu miestnosti a študoval Paľonardove spisy o modernej architektúre. Toto poobedie však nebolo tak obvyklé, ako by sa mohlo na prvý pohľad zdať. Majster Paľonardo mal totiž splniť tajnú misiu priamo od hradného pána a práve premýšľal, či do nej zasvätiť aj svojho učňa. Napokon sa rozhodol, že Zajffaellovi tajomstvo prezradí iba vtedy, ak dostatočne preukáže svoje maliarske schopnosti v rozoznávaní farieb.

Príklad č. 1: Postavil pred neho do radu 5 rovnakých plechových nádob a povedal: „V týchto nádobách je 5 rozličných farieb. Tyrkysová nie je v strede, ani na kraji. Žltá je napravo od tyrkysovej. Na kraji je oranžová. Na druhom mieste je farba, ktorá je prvá v abecede. Okrem spomenutých troch farieb sa v nádobách nachádzajú ešte fialová a modrá farba. V ktorej nádobe je modrá farba?“

Zajffaello sa ukázal ako veľmi zdatný učeň, pretože nepotreboval takmer žiadny čas na to, aby vedel určiť, v ktorej nádobe sa nachádza modrá farba. Ostal však trochu smutný, lebo dúfal, že aspoň v jednej nádobe bude indighobová farba, ktorú tak súrne potreboval na dokončenie svojho obrazu, ktorým sa chcel popýšiť majstrovi. V týchto časoch sa dala táto farba získať iba od maliara Mišelangela. Ten však bohužiaľ nemal veľmi dobrý vzťah s Majstrom Paľonardom. Zajffaello sa teda rozhodol, že skúsi zohnať indighobovú farbu sám. Keď prišiel za Mišelangelom, nedočkal sa veľmi pívetivého uvítania, no nebol tam úplne zbytočne. Indighobová farba sa získavala zo špeciálnych hovoriacich gobotníc, ktoré choval Mišelangelo vo veľkom akváriu v zadnej miestnosti svojho domu. Nikto okrem neho ich teda nemohol vidieť, no zato všetci ich mohli počuť. Mišelangelo povedal Zajffaellovi, že mu indighobovú farbu dá, ak zodpovie správne jeho otázku.

Príklad č. 2: V Mišelangelovom akváriu sa nachádzajú presne štyri gobotnice. Gobotnice so siedmimi chápadlami vždy klamú, zatiaľ čo gobotnice, ktoré majú 6 alebo 8 chápadiel, vždy hovoria pravdu (pokiaľ je známe, iné počty chápadiel gobotnice nemajú). Tie každú chvíľu postupne opakujú tieto tvrdenia:

1. gobotnica: „Spolu máme 28 chápadiel.“
2. gobotnica: „Spolu máme 25 chápadiel.“
3. gobotnica: „Spolu máme 26 chápadiel.“
4. gobotnica: „Spolu máme 27 chápadiel.“

Koľko majú gobotnice v akváriu dokopy chápadiel? Pomôžte Zajffaellovi zistiť správnu odpoveď a svoje tvrdenie zdôvodnite.

Keď sa Zajffaello vrátil k domu svojho Majstra, zistil, že Paľonardo niekam odišiel. Dvere boli zamknuté, no pred nimi ležal namaľovaný obraz. Na obraze sa nachádzalo niekoľko portrétov mladých dvorných dám a nejaké čísla usporiadané do zvláštneho obrazca. Zajffaello však hneď tušil, že to nie je len tak nejaký obraz, pretože Majster Paľonardo veľmi rád zanechával v svojich obrazoch rôzne odkazy a šifry. Zajffaello si teda prekreslil na papier obraz a portréty dvorných dám, lady Táňa, Nelka, Sára, Dada a lady Zuzka nahradil začiatočnými písmenami ich mien, aby to mal rýchlejšie.

Príklad č. 3: Vznikol takýto obrazec (Obr. 1). Zistite, akými celočíselnými hodnotami vieme nahradiť písmená T, N, S, D a Z , ak čísla v poslednom riadku a stĺpci označujú súčet v danom riadku alebo stĺpci.

D	N	T	Z
T	T	T	Z+1
T	T	S	Z
15	20	Z	

Obr. 1: Obraz majstra Paľonarda

Táto úloha nebola veľmi náročná a preto po jej vyriešení musel Zajffaello ešte stále čakať na Majstra. Nemal veľmi čo na práci a preto jeho pozornosť upútali tri dámy zo susedstva.

Príklad č. 4: Dcéra, matka a stará mama mali bonboniéru. Keby zjedla Arianna o 3 bonbóny viac, zjedla by ich práve toľko, koľko Bianca s Caterinou dokopy. A keby si Caterina pochutnala ešte na siedmich bonbónoch, tiež by ich zjedla toľko, ako druhé dve spolu. Ešte vieme, že počet bonbónov, ktoré zjedla matka, je deliteľný tromi a že stará mama si pochutila na siedmich bonbónoch. Ako sa volali jednotlivé dámy? Koľko bonbónov zjedla každá z nich?

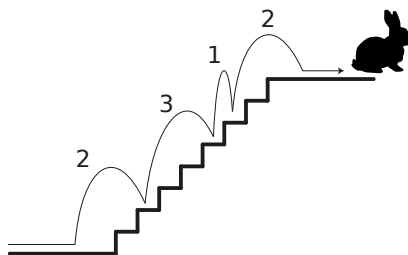
„Zajffaello,“ povedal Paľonardo da Tomči, ktorý práve prišiel a vyrušil tak svojho učňa z myšlienok, „dobre, že už si tu. Ani sa nenamáhaj vojsť do domu, hneď odchádzame.“

„A smiem sa spýtať kam, majster?“ povie Zajffaello zvedavo, schovávajúc nádobku s indighobovou farbou do vrečka na ošúchaných nohaviciach.

„Priamo na hrad.“ odvetí Paľonardo, no ako obvykle, ani sa neunúva objasniť situáciu a nechá mladého Zajffaella hútať, čo sa asi môže diať.

Keď prišli na hrad, museli sa dostať dovnútra cez slávne spievajúce schodisko. Toto schodisko slúžilo čiastočne ako obrana hradu.

Príklad č. 5: Schodisko malo presne osem schodov, pričom každý z nich po došliapnutí naň zahrá iný tón. Na hrade platí pravidlo, že po schodoch môže kráčať iba ten, kto vždy vyjde až úplne hore. Každým krokom pritom postúpi o jeden, dva alebo tri schody vyššie (Obr. 2). Aby na hrade nebehal po schodoch každý, hradný strážca rozkázal, že sa počas jedného dňa nesmie žiadna melódia zopakovať dvakrát. Nesmie sa teda zopakovať ani tá istá postupnosť schodov. Koľko rôznych melódií sa dá na schodoch vytvoriť? Svoje tvrdenie zdôvodnite.



Obr. 2: Schodisko

Zajffaello a Paľonardo nie sú len tak obyčajní obyvatelia Florencie a cez schody sa dostali ľavou zadnou. Za schodami vošli do Veľkej hradnej sály.

Príklad č. 6: V Sále bolo pravidelne do kruhu rozmiestnených 110 rubínovo červených stoličiek. Stoličky tvorili na zemi pravidelný 110-uholník. Pri nich sa hádalo 5 dvorných dám a 11 rytierov. Dôvodom ich hádky bolo, že sa nevedeli usadiť tak, aby každý sedel na práve jednej stoličke a zároveň aby boli všetci spokojní.

- Dvorné dámy chceli sedieť tak, že stoličky, na ktorých spolu sedia, budú tvoriť vrcholy pravidelného päťuholníka.
- Rytieri chceli sedieť tak, že stoličky, na ktorých spolu sedia, budú tvoriť vrcholy pravidelného 11-uholníka.
- Každý rytier ešte chcel, aby vedľa neho na oboch susedných stoličkách nikto nesedel.

Problém bol v tom, že nech si dvorné dámy a rytieri sadali ako chceli, nedarilo sa im splniť všetky tri podmienky. Sú dvorné dámy a rytieri iba nešíkovní alebo to naozaj nejde? Je možné, aby si dvorné dámy a rytieri posadali tak, aby boli všetci spokojní? Svoje tvrdenie zdôvodnite.

Keď sa Paľonardo a Zajffaello konečne dostali cez ten stoličkový rozruch v Sále, pocítili hlad. Deň sa už pomaly chýlil ku koncu a od obeda ani jeden z nich nič nejedol. Preto sa rozhodli okúsiť kráľovskú kuchyňu.

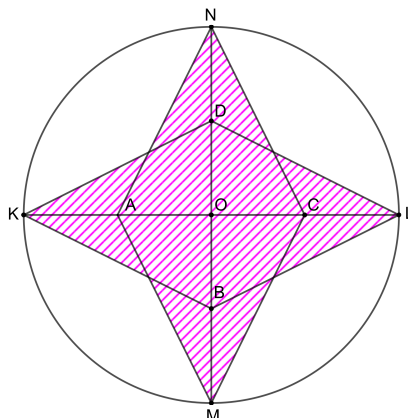
Príklad č. 7: Kuchári práve napiekli 8 koláčov, každý označený prirodzeným číslom. Majster a Zajffaello môžu zjesť iba takú dvojicu koláčov, ktorých čísla keď sčítame alebo odčítame, výsledok bude deliteľný 13-timi bezo zvyšku. Ukážte, že nezávisle na číslach koláčov hladní určite neostanú (budú môcť zjesť aspoň jednu dvojicu koláčov).

Majster a učeň boli opäť v svojom živle, žalúdky mali plné a pokračovali ďalej hradom smerom ku kráľovským komnatám. Paľonardo síce už na hrade bol, no nepamätal si úplne presne, ktoré z dverí viedli do kráľovskej komnaty. Vošli teda do prvých dverí, ktoré videli. Za stolom tam sedeli mladý princ a jeho dvorný učiteľ. Princ mal práve hodinu matematiky. Obaja však krútili hlavou, pretože učiteľ napísal princovi na papier príklad a keď ho princ vypočítal, jeho výsledok sa nezhodoval s učiteľovým vopred vypočítaným výsledkom. Ako sa tak však pozerali na papier, nevedeli nájsť chybu. Nakoniec si ju všimol až Majster Paľonardo.

Príklad č. 8: Mladý princ mal vypočítať príklad $X \cdot Y \div Z$, kde X je dvojciferné číslo a Y trojciferné číslo. Z je tiež trojciferné číslo s číslicou 2 na mieste jednotiek a súčet číslic na mieste desiatok a stoviek je 7. Výsledkom príkladu malo byť prirodzené číslo. Učiteľ však napísal bodku tak, že ju vôbec nebolo vidieť a preto princ súčin $X \cdot Y$ chápal ako jedno päťciferné číslo. Dostal tak sedemkrát väčší výsledok ako mal vyjsť. Aký príklad mal princ počítať pôvodne?

Princ bol veľmi vďačný, že im Majster Paľonardo pomohol vyriešiť tento problém a ochotne ukázal hosťom, ktoré dvere vedú do komnaty jeho otca. Keď im strážne otvorili ťažké mahagónové dvere, ocitli sa v malej predsienke. Zajffaello si všimol, že v tejto miestnosti je podlaha pokrytá zaujímavými kachličkami. Všetky mali namaľované takýto útvar.

Príklad č. 9: Kruh so stredom O má polomer 6 (Obr. 3). Priemery KL a MN sú na seba kolmé a body A, B, C, D sú stredy úsečiek KO, MO, LO, NO v danom poradí. Aký je obsah zafarbenej časti?



Obr. 3: Útvar na kachličke

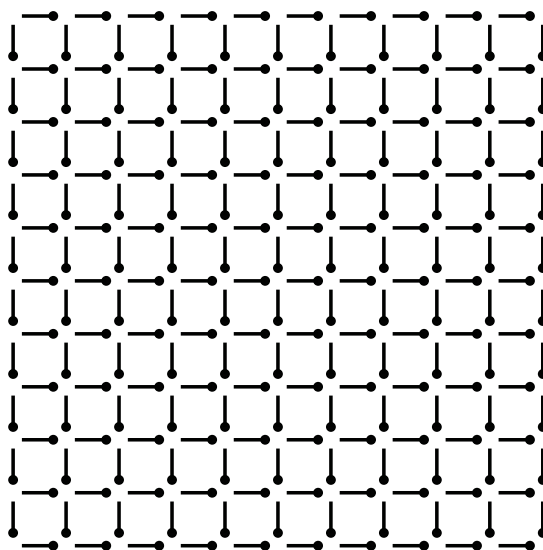
„Nech sa páči, kráľ vás očakáva,“ oznámil im po chvíli komorný a vpustil ich cez ďalšie dvere do komnaty. Kráľ stál pri mohutnom krbe, otočený chrbtom. V krbe nebol oheň, no kráľ sa ho práve snažil založiť. Chcel pritom zapáliť čo najviac zápaliek.

Prémia: Kráľ má pred sebou na krbe mriežku 10×10 zo zápaliek (Obr. 4, na obvode celého útvaru je tým pádom 40 zápaliek). Niekoľko z nich by rád odobral a zvyšok zapálil. Aby však ostal krb horieť, musí platiť, že zvyšok zápaliek, ktoré na krbe nechá, nesmie obsahovať ani jeden štvorec (akejkol'vek veľkosti od 1 po 10).

Koľko najmenej zápaliek vie odobrať tak, aby krb ostal horieť?

(Pokyn: Pri tomto príklade stačí napísať, ktoré zápalky má kráľ odobrať, aby bola splnená podmienka zo zadania.)

*** Tento príklad je bodovaný inak ako ostatné. Viac informácií nájdeš v pravidlách. ***



Obr. 4: Zápalky