Vzorové riešenia 1. kola zimnej série 2017/2018

Príklad č. 1 (opravovala Gabika):

Zadanie: Postavil pred neho do radu 5 rovnakých plechových nádob a povedal: „V týchto nádobách je 5 rozličných farieb. Tyrkysová nie je v strede, ani na kraji. Žltá je napravo od tyrkysovej. Na kraji je oranžová. Na druhom mieste je farba, ktorá je prvá v abecede. Okrem spomenutých troch farieb sa v nádobách nachádzajú ešte fialová a modrá farba. V ktorej nádobe je modrá farba?

Riešenie: V nádobách sa nachádzajú tyrkysová, žltá, oranžová, fialová a modrá farba. Spomedzi nich je prvá v abecede, a teda v druhej plechovke, fialová farba. Vieme, že tyrkysová farba sa nenachádza ani na kraji, ani v strede, teda môže byť buď v druhej, alebo v štvrtej nádobe. Keď už vieme, že v druhej nádobe je fialová farba, tak tyrkysová môže byť iba v štrtej nádobe. Napravo od štvrtej nádoby s tyrkysovou farbou sa nachádza iba piata nádoba, ktorá teda musí obsahovať žltú farbu. Oranžová farba sa nachádza na kraji. Keď už vieme, že v poslednej plechovke je žltá, znamená to, že oranžová môže byť už jedine v prvej nádobe. Ostala nám iba jedna nádoba, pre ktorú sme zatiaľ neurčili aká farba sa v nej musí nachádzať – nádoba uprostred. V tretej nádobe teda môže byť už iba modrá farba.

Odpoveď: Modrá farba sa nachádza v tretej, prostrednej nádobe.

Komentár: K prvému príkladu ste nám poslali veľa riešení, čo nás samozrejme teší. A čo potešilo ešte viac je, že väčšina vašich riešení bola správna. Najčastejší dôvod straty bodov bolo riešenie, ktoré obsahovalo iba odpoveď, ale chýbal mu postup. V Rieškach nás ale práve ten postup zaujíma viac ako samotný výsledok, preto je zaň aj väčšina bodov. Čo má taký postup obsahovať? Jednotlivé kroky ako si príklad riešil či riešila. Treba popísať tvoje myšlienky a kroky, ktorá ťa priviedli k riešeniu. Na prvýkrát môže písanie postupu vyzerať zložito, ale neboj, pôjde to.

Príklad č. 2 (opravovali Zajo, Teri, Hanka):

Zadanie: V Mišelangelovom akváriu sa nachádzajú presne štyri ghobotnice. Ghobotnice so siedmimi chápadlami vždy klamú, zatiaľ čo ghobotnice, ktoré majú 6 alebo 8 chápadiel, vždy hovoria pravdu (pokiaľ je známe, iné počty chápadiel ghobotnice nemajú). Tie každú chvíľu postupne opakujú tieto tvrdenia:

1. ghobotnica: „Spolu máme 28 chápadiel."
2. ghobotnica: „Spolu máme 25 chápadiel."
3. ghobotnica: „Spolu máme 26 chápadiel."
4. ghobotnica: „Spolu máme 27 chápadiel."

Koľko majú ghobotnice v akváriu dokopy chápadiel? Pomôžte Zajffaellovi zistiť správnu odpoveď a svoje tvrdenie zdôvodnite.

Riešenie: Ako prvé si uvedomíme, že každá ghobotnica tvrdí niečo iné. Naraz nemôžu byť dve rozdielne trvdenia pravdivé a preto pravdu môže hovoriť najviac jedna ghobotnica.

Teraz máme dve možnosti:

1. všetky ghobotnice klamú (ani jedna ghobotnica nehovorí pravdu)
2. jedna ghobotnica hovorí pravdu a ostatné tri klamú

Ghobotnice čo klamú majú 7 chápadiel ak by platila možnosť 1. tak by ghobotnice v akváriu mali spolu $28 = 7 \cdot 4$ chápadiel. Prvá ghobotnica tvrdí, že spolu majú 28 chápadiel, preto by musela hovoriť pravdu. Tento prípad však nemôže nastať, lebo sme predpokladali, že všetky štyri klamú.

Ak by platila možnosť (2.) tak ghobotnice čo klamú sú tri a spolu majú $21 = 7 \cdot 3$ chápadiel. Štvrtá ghobotnica, ktorá hovorí pravdu, musí mať 6 alebo 8 chápadiel. Rozoberme preto tieto dve možnosti.

Ak by ghobotnica čo hovorí pravdu mala 8 chápadiel, celkový počet chápadiel ghobotníc by bol $21 + 8 = 29$. Žiadna ghobotnica ale netvrdí, že spolu majú 29 chápadiel, teda sa medzi nimi nenachádza tá, čo by hovorila pravdu.

Ak by pravdovravná ghobotnica mala 6 chápadiel, celkový počet chápadiel bude $21 + 6 = 27$. Štvrtá Ghobotnica tvrdí, že spolu majú 27 chápadiel, teda môže hovoriť pravdu.

Odpoveď: Ghobotnice v akváriu majú spolu 27 chápadiel.

Príklad č. 3 (opravovali Zajo, MaťoV, Gabika Š.):

Zadanie: Vznikol takýto obrazec (Obr. 1). Zistite, akými celočíselnými hodnotami vieme nahradiť písmená T, N, S, D a Z, ak čísla v poslednom riadku a stĺpci označujú súčet v danom riadku alebo stĺpci.

Riešenie:

D	N	T	Z
T	T	T	Z+1
T	T	S	Z
15	20	Z	

Obr. 1: Obraz majstra Paľonarda

Spôsobov a postupov riešenia je kopa rôznych skúsme si vybrať jeden z tých šikovnejších: Úlohu začnime riešiť niekoľkými jednoduchými pozorovaniami, z ktorých postupne dostaneme jednotlivé písmenká.

Ak sčítame prvé dva stĺpce, tak sa musia dokopy rovnať $15 + 20 = 35$. Naopak, ak sčítame prvé dva riadky, musia sa rovnať $Z + (Z + 1) = 2Z + 1$. Teraz si všimnime, že dokopy sa v prvých dvoch riadkoch aj stĺpcoch nachádzajú vnútri tabuľky 3×3 rovnaké písmená: 4-krát T, jedno D a jedno N. Z toho vyplýva, že aj ich súčet bude rovnaký:

$$35 = 2Z + 1 \quad \rightarrow \quad 34 = 2Z \quad \rightarrow \quad 17 = Z$$

Naša tabuľka má teraz tvar ako tabuľka 1.

D	N	T	17
T	T	T	18
T	T	S	17
15	20	17	

Tabuľka 1: Zadanie po doplnení $Z = 17$

Toto nám situáciu značne zjednodušilo. Z druhého riadku priamo máme $3T = 18 \rightarrow T = 6$. Písmená D, N a S vieme dorátať postupne z prvých troch stĺpcov.

$$D + T + T = D + 12 = 15 \quad \rightarrow \quad D = 3$$

$$N + T + T = N + 12 = 20 \quad \rightarrow \quad N = 8$$

$$T + T + S = 12 + S = 17 \quad \rightarrow \quad S = 5$$

Kompletná tabuľka preto vyzerá ako tabuľka 2.

3	8	6	17
6	6	6	18
6	6	5	17
15	20	17	

Tabuľka 2: Kompletne vyplnená tabuľka

Odpoveď: Písmená sme nahradili číslami ako v tabuľke 2: $D = 3, N = 8, T = 6, S = 5, Z = 17$.

Komentár: Často sa v riešeniach vyskytla úvaha, ktorá predpokladala, že T bude podľa prvého stĺpca najviac 7, inak by D v ňom muselo byť záporné, aby dávali v súčte 15. Problém ale je, že v zadaní píšeme, že všetky písmená predstavujú celé čísla, teda mohli byť aj záporné. Nakoniec sme sa však rozhodli za túto maličkosť nestrhávať body, treba si na ňu ale dať pozor.

Príklad č. 4 (opravovali Sára, Tánička):

Zadanie: Dcéra, matka a stará mama mali bonboniéru. Keby zjedla Arianna o 3 bonbóny viac, zjedla by ich práve toľko, koľko Bianca s Caterinou dokopy. A keby si Caterina pochutnala ešte na siedmich bonbónoch, tiež by ich zjedla toľko, ako druhé dve spolu. Ešte vieme, že počet bonbónov, ktoré zjedla matka, je deliteľný tromi a že stará mama si pochutila na siedmich bonbónoch. Ako sa volali jednotlivé dámy? Koľko bonbónov zjedla každá z nich?

Riešenie: Označme si počty cukríkov ktoré zjedla Arianna, Bianca a Caterina ako A, B a C. Potom si vieme informácie zo zadania zapísať ako:

$$A + 3 = B + C \tag{1}$$

$$C + 7 = B + A \tag{2}$$

Máme teda dve rovnice v ktorých sú až 3 neznáme. Čo s nimi vieme spraviť? Jedným z možných postupov pri riešení viacerých rovníc je spočítať ich, alebo ich odčítať a robiť niečo s novo vzniknutými rovnosťami. Skúsme postupne obe tieto možnosti:

Najprv sčítanie. Presnejšie k ľavej strane prvej rovnice pripočítame ľavú stranu druhej rovnice a k pravej strane prvej rovnice pripočítame pravú stranu druhej rovnice, takže rovnosť sa zachová.

$$(A + 3) + (C + 7) = (B + C) + (B + A)$$

Túto rovnicu nasledovne upravujeme (všimnime si, že A a C sa vykrátia), vpravo sú naznačené niektoré úpravy:

$$A + C + 10 = A + C + 2B \qquad / - A - C$$

$$10 = 2B \rightarrow B = 5$$

Bianca preto zjedla 5 bonbónov. To znamená, že nemôže byť ani starou mamou, pretože tá zjedla 7 bonbónov, ani mamou, pretože tá zjedla počet bonbónov ktorý je deliteľný 3. Z toho vyplýva, že Bianca je dcéra.

Teraz naopak odčítajme rovnicu (1) od rovnice (2) a upravujeme:

$$(C+7)-(A+3)=(B+A)-(B+C)$$

$$C+7-A-3=B+A-B-C \qquad /+A-C$$

$$4=2A-2C \quad \rightarrow \quad 2=A-C \quad \rightarrow \quad C+2=A$$

Čo z tohto vieme vyčítať? Arianna zjedla o 2 cukríky viac ako Caterina. Vieme, že jedna z nich musí byť stará mama a tá zjedla 7 bonbónov.

Ak by Arianna bola stará mama, tak Caterina by potom zjedla 5 cukríkov, čo ale nemôže lebo zo zadania vieme, že mama (Caterina v tomto prípade) zjedla počet cukríkov deliteľný 3. Naopak, ak by bola Caterina stará mama, tak Ariana by potom zjedla 9 cukríkov, čo bude riešením, lebo 9 je deliteľné 3.

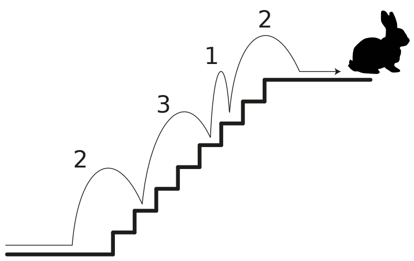
Odpoveď: Našli sme jediné riešenie:

- Dcéra sa volala Bianca a zjedla 5 bonbónov.
- Mama sa volala Arianna a zjedla 9 bonbónov.
- Stará mama sa volala Caterina a zjedla 7 bonbónov.

Komentár: Takmer všetci z vás mali správny výsledok, čo bolo super. Troška viac problémov ste mali s postupom, ktorý bol občas nedokončený alebo ste skúsili len niektoré možnosti. Existovalo viacero správnych postupov, príklad sa dal riešiť aj tak, že ste skúšali dosádzať počet bonbónov, ktoré zjedla stárá mama(7) postupne za A, B a C.

Príklad č. 5 (opravoval Mišo):

Zadanie: Schodisko malo presne osem schodov, pričom každý z nich po došliapnutí naň zahrá iný tón. Na hrade platí pravidlo, že po schodoch môže kráčať iba ten, kto vždy vyjde až úplne hore. Každým krokom pritom postúpi o jeden, dva alebo tri schody vyššie (Obr. 2). Aby na hrade nebehal po schodoch každý, hradný strážca rozkázal, že sa počas jedného dňa nesmie žiadna melódia zopakovať dvakrát. Nesmie sa teda zopakovať ani tá istá postupnosť schodov. Koľko rôznych melódií sa dá na schodoch vytvoriť? Svoje tvrdenie zdôvodnite.



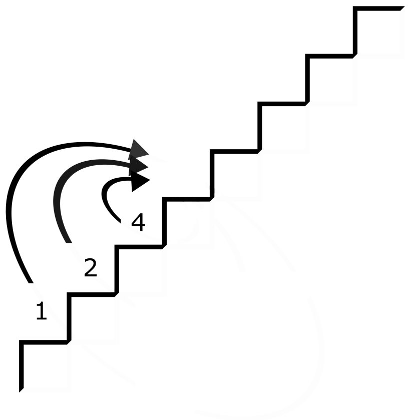
Obr. 2: Schodisko

Riešenie: Na začiatok sa pozrime, koľkými spôsobmi sa dá dostať na prvé tri schody:

1. Na prvý schod sa vieme dostať jedine tak, že naň stúpime zo začiatku schodiska. Máme teda práve 1 spôsob.
2. Na druhý schod sa vieme dostať buď tak, že spravíme krok dĺžky 1 z prvého schodu, alebo spravíme krok dĺžky 2 zo začiatku schodiska. Máme teda 2 spôsoby.
3. Na tretí schod sa vieme dostať buď tak, že spravíme krok dĺžky 1 z druhého schodu, alebo krok dĺžky 2 z prvého schodu, alebo krok dĺžky 3 zo začiatku schodiska.

Podobne sa zamyslime nad tým, ako sa vieme dostať na štvrtý schod. Ako posledný krok vykonáme krok dĺžky 1 z tretieho schodu, krok dĺžky 2 z druhého schodu, alebo krok dĺžky 3 z prvého schodu. Teraz iba zrátame možnosti, ktorými sme sa mohli dostať na tieto schody:

$$\underbrace{1}_{\text{1. schod}} + \underbrace{2}_{\text{2. schod}} + \underbrace{4}_{\text{3. schod}} = \underbrace{7}_{\text{4. schod}}$$



Obr. 3: Postupovanie na ďalšie schody

Rovnaká úvaha prejde aj pre ďalšie schody. Na x-tý schod sme sa mohli dostať buď krokom dĺžky 1 zo schodu $x-1$, alebo krokom dĺžky 2 zo schodu $x-2$, alebo krokom dĺžky 3 zo schodu $x-3$. (Dlhšie kroky robiť nevieme, takže to sú všetky možnosti.)

Teraz si to môžme dať do tabuľky 3:

poradové číslo schodu	koľkými spôsobmi sa dá dostať na o 1 nižší schod?	koľkými spôsobmi sa dá dostať na o 2 nižší schod?	koľkými spôsobmi sa dá dostať na o 3 nižší schod?	koľkými spôsobmi sa dá dostať na tento schod?
1	začiatok	0	0	1
2	1	začiatok	0	2
3	2	1	začiatok	4
4	4	2	1	7
5	7	4	2	13
6	13	7	4	24
7	24	13	7	44
8	44	24	13	81

Tabuľka 3: Možnosti skokov

Odpoveď: Na schodoch sa dá za deň vytvoriť práve 81 rôznych melódii.
Komentár: Väčšina z vás zvládla príklad aj inými postupmi veľmi dobre. Chyby spočívali hlavne v tom, že ste nevysvetlili všetky svoje čiastkové výsledky, alebo ste použili vzorčeky bez popisu. Treba myslieť na to, že vysvetliť treba každý krok. Pri vypisovaní možností zas viacerým chýbal nejaký jasný systém, z ktorého by bolo jasné, že máte ozaj všetky riešenia. Z toho pramenilo mnoho chýb, kvôli ktorým ste prichádzali o body. Do budúcna odporúčame (nielen pri väčšom počte možností) skúsiť nájsť iný, spoľahlivejší postup než vypisovanie.

Príklad č. 6 (opravovali MaťoPaťo, Paťa):

Zadanie: V Sále bolo pravidelne do kruhu rozmiestnených 110 rubínovo červených stoličiek. Stoličky tvorili na zemi pravidelný 110-uholník. Pri nich sa hádalo 5 dvorných dám a 11 rytierov. Dôvodom ich hádky bolo, že sa nevedeli usadiť tak, aby každý sedel na práve jednej stoličke a zároveň aby boli všetci spokojní.

- Dvorné dámy chceli sedieť tak, že stoličky, na ktorých spolu sedia, budú tvoriť vrcholy pravidelného päťuholníka.
- Rytieri chceli sedieť tak, že stoličky, na ktorých spolu sedia, budú tvoriť vrcholy pravidelného 11-uholníka.
- Každý rytier ešte chcel, aby vedľa neho na oboch susedných stoličkách nikto nesedel.

Problém bol v tom, že nech si dvorné dámy a rytieri sadali ako chceli, nedarilo sa im splniť všetky tri podmienky. Sú dvorné dámy a rytieri iba nešikovní alebo to naozaj nejde? Je možné, aby si dvorné dámy a rytieri posadali tak, aby boli všetci spokojní? Svoje tvrdenie zdôvodnite.
Riešenie: Začnime tým, že sa pozrieme na to, ako ďaleko od seba budú sedieť jednotlivé dámy a jednotliví rytieri. Keďže riešime pravidelné útvary tak budú musieť od seba sedieť rovnako ďaleko. Počet stoličiek medzi nimi teda zistíme tak, že vydelíme počet všetkých stoličiek (110) počtom všetkých rytierov alebo dám (11 alebo 5).

$$110 \div 11 = 10$$

$$110 \div 5 = 22$$

Vidíme, že rytieri sedia na každej 10. stoličke a dámy na každej 22. stoličke.

Teraz sa pozrieme na to na akých stoličkách môžu sedieť. Na tom ako sú očíslované stoličky nezáleží, pretože stoličky ležia na obvode kružnice a teda „posledná“ stolička je hneď vedľa „prvej“ stoličky. Označme si teda stoličku, na ktorej bude sedieť „prvý“ rytier 1. „Druhý“ teda sedí na stoličke číslo 11, „tretí“ na stoličke číslo 21 a takto to bude pokračovať až po stoličku číslo 101, na ktorej sedí „posledný“ 11. rytier. Všimnime si dôležitú vec. V každom čísle stoličky sa na mieste jednotiek opakuje rovnaká cifra (pripočítavame 10).

Pozrime sa na to ako budú sedieť dámy. Použime možnosť, ktorú sme si už načrtli a teda, že rytieri začínajú na mieste číslo 1. Najbližšie ku rytierovi môže sedieť dáma na stoličke číslo 3 a preto tam posadíme „prvú“, nasledujúca sedí na stoličke číslo 25, ďalšia na 47, potom je 69 a „posledná“ na čísle 91. Zase si musíme všimnúť dôležitú vec a to, že číslica na mieste jednotiek je vždy o dva väčšia ako na predchádzajúcom čísle. Ak teda „prvá“ dáma sedi na nepárnom čísle vznikne nám celá sada nepárnych cifier na mieste jednotiek $-$ $1, 3, 5, 7$ a 9. Ak by sedela na párnom čísle vznikla by nám celá sada párnych cifier na mieste jednotiek $-$ $0, 2, 4, 6$ a 8.

Vráťme sa ku rytierom. V každej desiatke stoličiek sedí jeden rytier a keďže nechce nikoho okolo seba, môžeme si to predsaviť, že zaberá 3 miesta. Ak sedí na párnom čísle, zaberá nepárne, párne a nepárne číslo. Ak na nepárnom, zaberá párne, nepárne a párne číslo. Ostáva si nám uvedomiť, že nech by si teda rytieri sadli akokoľvek, zaberajú aspoň jedno párne a jedno nepárne číslo, rovnaké v každej desiatke (napr. všetky čísla končiace $0, 1, 2$ v nami uvedenom príklade, kde prvý rytier sedí na 1). To znamená, že zaberajú aspoň jedno číslo, na ktorom by chcela sedieť dáma (lebo aspoň jedna dáma bude chcieť sedieť na danom nepárnom, resp. párnom čísle, ktoré všade obsadzujú rytieri).
Odpoveď: Nie sú nešikovní, naozaj si tak posadať nevedia.
Komentár: Najčastejšou chybou bolo, že ste skúšali možnosti a nevyskúšali ste všetky. Skúšanie je správny postup, ale iba vtedy, pokiaľ vyskúšate všetky možnosti a ukážete, že ste vyskúšali naozaj všetky a viac ich skúšať netreba. Bodovo prevládali desiatky, takže Vás chválime.

Príklad č. 7 (opravovali Paľo, Miško):

Zadanie: Kuchári práve napiekli 8 koláčov, každý označený prirodzeným číslom. Majster a Zajffaello môžu zjesť iba takú dvojicu koláčov, ktorých čísla keď sčítame alebo odčítame, výsledok bude deliteľný 13-timi bezo zvyšku. Ukážte, že nezávisle na číslach koláčov hladní určite neostanú (budú môcť zjesť aspoň jednu dvojicu koláčov).
Riešenie: Pri riešení takéhoto príkladu, je fajn začať napísaním si pár možností. Ak ste to spravili, tak ste zrejme zistili, že nech sa hociako snažíte nejaká dvojica bude mať súčet, alebo rozdiel deliteľný 13. Keď máme pocit, že to bude platiť vždy, je potrebné k príkladu pristupovať trocha inak a síce pokúsiť sa to dokázať. V našom riešení budeme robiť to, že nájdeme isté podmienky, ktoré by osmica čísel musela spĺňať aby tam nebola žiadna dvojica so súčtom (resp. rozdielom) deliteľným 13. Následne ukážeme, že tieto podmienky nemôžu byť všetky naraz splnené, inými slovami, hrdinovia zo zadania sa určite najedia.

Každé číslo vieme vyjadriť ako násobok 13 + zvyšok po delení 13 daného čísla $(13x + a)$. Keď budeme sčitovať alebo odčitovať 2 takto zapísané čísla, $13x + a + 13y + b$ alebo $13x + a - 13y - b$, vieme tento zápis upraviť do tvaru $13(x + y) + (a + b)$ resp. $13(x - y) + (a - b)$.

Z tohto tvaru vidíme, že keď skúmame deliteľnosť súčtu, resp. rozdielu dvoch čísel, tak sú pre nás dôležité práve zvyšky po delení pôvodných čísel (Násobky 13 sa nasčítajú na násobky 13). Konkrétne zvyšok súčtu je súčet zvyškov a podobne pre rozdiel.

Zvyšky po delení 13 môžu byť: $0, 1, 2, \ldots 11, 12$. Pozrime sa na dvojice čísel (od 0 do 12), ktorých súčet alebo rozdiel je násobok 13 (tj. 0 alebo 13).

Žiadne dve rôzne čísla (od 0 do 12) nemajú rozdiel 13, ak by rozdiel nejakej dvojice mal byť násobkom 13 obe čísla by museli mať rovnaký zvyšok. Prvá podmienka, ktorú dostávame je, že dva koláče nemôžu mať rovnaký zvyšok po delení 13.

Pri súčtoch, aby bol zvyšok súčtu dvoch čísel 0, museli by sme spočítať dve 0, ich rozdiel by však bol tiež 0 a tento prípad sme už uvažovali vyššie.

Aby bol súčet dvoch čísel 13, museli by sme spočítať dve čísla z jednej z týchto dvojíc zvyškov:
$1 + 12$, $2 + 11$, $3 + 10$, $4 + 9$, $5 + 8$ alebo $6 + 7$. Druhá podmienka, aby sa Majster a Zajffaello nenajedli je, že z každej dvojice môže byť najviac jeden koláč.

Keď spojíme tieto dve podmienky, najväčší počet koláčov, z ktorých sa nenajedia je 6 (jeden z každej dvojice) a jeden zo zvyškom 0. To je spolu 7 koláčov. Ak by sme jeden koláč pridali, museli by sme buď doplniť jednu dvojicu, alebo pridať koláč, s číslom, ktoré už máme.

Odpoveď: Pri počte koláčov 8, určite nájdeme dvojicu koláčov, ktoré sa dajú zjesť.

Komentár: Väčšina z vás si uvedomila, že sa stačí pozerať na zvyšky po delení 13, no takmer nikto to formálne nedokázal. Pri takýchto príkladoch je potrebné si dať pozor na to, aby sme naše tvrdenia dokázali. Ukážku takého dôkazu je práve toto riešenie, v ktorom je každý krok riadne podložený.

Príklad č. 8 (opravovali Zajo, Miro, MaťoU, Hela):

Zadanie: Mladý princ mal vypočítať príklad $X \cdot Y \div Z$, kde X je dvojciferné číslo a Y trojciferné číslo. Z je tiež trojciferné číslo s číslicou 2 na mieste jednotiek a súčet číslic na mieste desiatok a stoviek je 7. Výsledkom príkladu malo byť prirodzené číslo. Učiteľ však napísal bodku tak, že ju vôbec nebolo vidieť a preto princ súčin $X \cdot Y$ chápal ako jedno päťciferné číslo. Dostal tak sedemkrát väčší výsledok ako mal vyjsť. Aký príklad mal princ počítať pôvodne?

Riešenie: Odporúčaným prvým krokom je prepísať si zadanie do rovnice. Y je trojciferné číslo, preto ak za seba napíšeme X a Z, dostaneme $1000X + Y$. Zadanie vieme preto napísať ako (na ľavej strane sedemnásobok správneho výsledku, na pravej nesprávny):

$$\frac{X \cdot Y}{Z} \cdot 7 = \frac{1000X + Y}{Z}$$

Túto rovnicu postupne upravujeme (vynásobíme Z a odpočítame Y):

$$XY \cdot 7 = 1000X + Y$$

$$7XY - Y = 1000X$$

$$Y(7X - 1) = 1000X$$

Pri takejto rovnici s dvomi neznámymi, kde na oboch stranách sú prirodzené čísla, sa oplatí skúmať delitele jednotlivých členov. Pokúsme sa teraz ukázať, že X a $7X - 1$ sú nesúdeliteľné, potom totiž bude musieť platiť, že $7X - 1$ delí 1000 (lebo $7X - 1$ musí deliť niečo na pravej strane rovnice). Nachvíľu predpokladajme, že X a $7X - 1$ majú spoločného deliteľa väčšieho ako 1, nazvime ho d. Ak X je deliteľné číslom d, tak aj jeho násobok $7X$ musí byť deliteľný d. Zo školy by sme mali vedieť, že dve po sebe idúce čísla majú najväčšieho spoločného deliteľa 1, čo platí aj pre $7X - 1$ a $7X$. Z toho vyplýva ale aj to, že X aj $7X - 1$ sú nesúdeliteľné.

Tým sme ukázali že $7X - 1$ delí 1000. To je fajn, pretože máme len niekoľko možností – deliteľov 1000. Delitele tisíc sú: $1, 2, 4, 5, 8, 10, 20, 25, 40, 50, 100, 125, 200, 250, 500$ a 1000. My hľadáme také delitele, ktoré keď sa budú rovnať $7X - 1$, tak X bude celé číslo. X je dvojciferné číslo, $7X - 1$ je preto minimálne 69 (ak $X = 10$) a maximálne 692 (ak $X = 99$). Preto stačí vyskúšať čísla $100, 125, 200, 250$ a 500. Po prepočítaní dostávame celočíselné X len pri 125:

$$7X - 1 = 125 \quad \rightarrow \quad X = 18$$

Do vyššie získanej rovnice dosadíme X, ktoré sme práve vypočítali (tú následne upravujeme):

$$Y(7X-1) = 1000X \quad \rightarrow \quad Y \cdot 125 = 1000 \cdot 18 \quad \rightarrow \quad Y = \frac{18000}{125} = 144$$

Vypočítali sme X a Y, jediné čo nám chýba k šťastiu je zistiť Z. Zo zadania vieme, že je trojciferné, jeho posledná cifra je 2 a súčet jeho prvých dvoch cifier je 7. Do úvahy preto prichádzajú nasledujúce čísla: $702, 612, 522, 432, 342, 252, 152$ Aby boli $\frac{X \cdot Y}{Z}$ aj $\frac{1000X+Y}{Z}$ celočíselné, musí byť $X \cdot Y = 2592$ a aj $1000X + Y = 18144$, deliteľné Z.

Či už si pozrieme prvočíselný rozklad jednotlivých čísel a možností pre Z, alebo jednoducho vyskúšame týchto 7 možností pre Z, dostaneme dve riešenia ako v tabuľke 4.

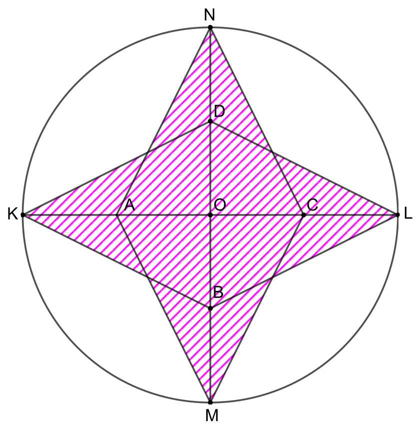
Z:	702	612	522	432	342	252	162
delí 2592	Nie	Nie	Nie	Áno	Nie	Nie	Áno
delí 18144	Nie	Nie	Nie	Áno	Nie	Áno	Áno

Tabuľka 4: Jednotlivé možnosti pre Z

Odpoveď: Princ mal pôvodne počítať príklad $\frac{18 \cdot 144}{162}$ alebo $\frac{18 \cdot 144}{432}$.
Komentár: Častou chybou bolo, keď ste pri skúšaní možností nevysvetlili, prečo ostatné nevyhovujú. Napríklad sa dalo tipnúť si vyhovujúce X a dorátali Y a Z, bolo ale vtedy nutné vysvetliť, prečo iné X nebudú správne.

Príklad č. 9 (opravovali Zajo, Timka, Kubo):

Zadanie: Kruh so stredom O má polomer 6 (Obr. 4). Priemery KL a MN sú na seba kolmé a body A, B, C, D sú stredy úsečiek KO, MO, LO, NO v danom poradí. Aký je obsah zafarbenej časti?
Riešenie:



Obr. 4: Útvar na kachličke

Ako prvé si dokreslíme zopár pomocných bodov. Priesečník úsečiek AN a KD označíme ako E. Pätu kolmice z bodu E na úsečku NO označíme ako F a pätu kolmice z bodu E na úsečku KO ako G. Bod E je zároveň ťažiskom $\triangle KNO$, lebo leží na priesečníku dvoch ťažníc KD, AN.

Všimneme si, že trojuholníky $\triangle AEG$ a $\triangle ANO$ majú oba pravý uhol a aj rovnako veľký uhol pri vrchole A. Z toho vyplýva, že sú podobné. Dĺžka úsečky AE je tretinou dĺžky úsečky AN, lebo E je ťažisko a AN ťažnica. Preto aj dĺžka AG je tretinou z 3, teda 1. Dĺžku GO vieme vyrátať ako rozdiel dĺžok AO a AG, čiže sa rovná 2.

$EGOF$ je obdĺžnik alebo štvorec, keďže má štyri uhly pravé, čiže dĺžky EF a GO sú rovnaké. Teraz vieme vyrátať obsah trojuholníka $\triangle EON$, lebo máme jeho výšku EF a stranu ON. Vyrátame ho nasledovne:

$$S(\triangle EON) = EF \cdot \frac{ON}{2} = 3 \cdot \frac{6}{2} = 9$$

Trojuholníky $\triangle EON$ a $\triangle EOK$ sú zhodné, pretože majú rovnako dlhé strany. Oba majú stranu EO, strany KO a ON sú rovnako dlhé a aj strany KE a EN sú rovnako dlhé, lebo dĺžky KD a AN sú rovnaké a dĺžka KE je rovná dvom tretinám z KD a dĺžka EN je rovná dvom tretinám z AN. Preto obsah štvoruholníka $KENO$ je dvojnásobok obsahu trojuholníka $\triangle EON$. Obsah celej vyšráfovanej časti je štvornásobok obsahu $KENO$, teda osemnásobok obsahu trojuholníka $\triangle EON$.

Odpoveď: Celkový obsah vyšráfovanej časti je preto 48.

Komentár: Veľa z vás robilo chybu pri predpoklade, že dĺžka EO je 3, a teda spolu s bodmi A, B, C, D a ostatnými tromi priesečníkmi vám vznikol pravidelný osemuholník. Avšak EO nie je 3, teda osemuholník nie je pravidelný. Skutočná dĺžka EO je $2\sqrt{2}$, lebo $EF = 2, EG = 2$ ($\triangle EOK$ je zhodný s $\triangle EON$, teda $EF = EG$), čiže $EFOG$ je štvorec. EO je jeho uhlopriečka, teda má dĺžku $2\sqrt{2}$ z Pytagorovej vety. Taktiež niektorí z vás si našli vzorce pre obsah osemuholníka, ktoré však vo veľa prípadoch neboli správne. Vyskytlo sa aj pár originálnych riešení, ktoré využívali štvorcovú sieť. Chválime správne riešenia, ktoré zväčša postupovali podobne ako vo vzoráku.

Prémia (opravovali Teri, Hanka):

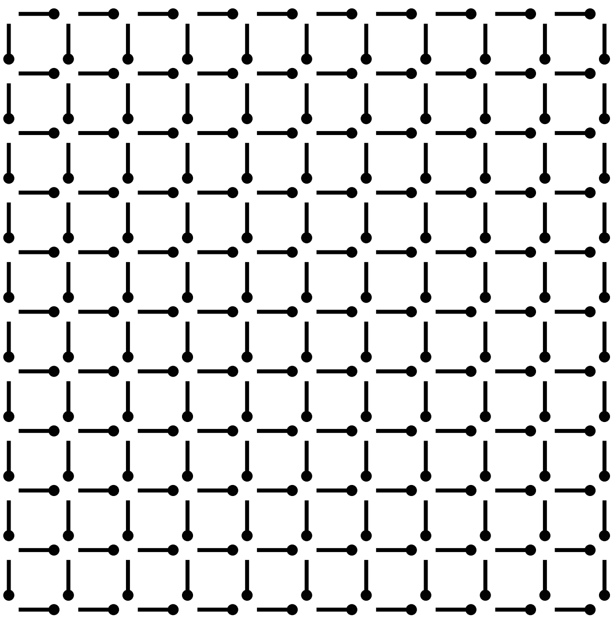
Zadanie: Kráľ má pred sebou na krbe mriežku 10×10 zo zápaliek (Obr. 5, na obvode celého útvaru je tým pádom 40 zápaliek). Niekoľko z nich by rád odobral a zvyšok zapálil. Aby však ostal krb horieť, musí platiť, že zvyšok zápaliek, ktoré na krbe nechá, nesmie obsahovať ani jeden štvorec (akejkoľvek veľkosti od 1 po 10).

Koľko najmenej zápaliek vie odobrať tak, aby krb ostal horieť?

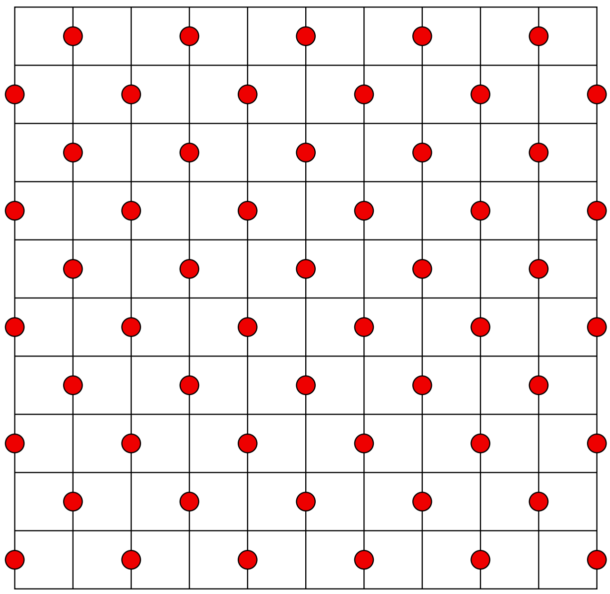
(Pokyn: Pri tomto príklade stačí napísať, ktoré zápalky má kráľ odobrať, aby bola splnená podmienka zo zadania.)

⋆⋆⋆ Tento príklad je bodovaný inak ako ostatné. Viac informácií nájdeš v pravidlách. ⋆⋆⋆

Riešenie: Najlepšie riešenie, ktoré sme našli nám zároveň prišlo a bolo ním odobranie 55 zápaliek, ako je možné vidieť na obrázku nižšie.



Obr. 5: Zadanie



Obr. 6: Riešenie (na odobraných sú krúžky)