

Zadania 3. kola letnej série 2017/2018

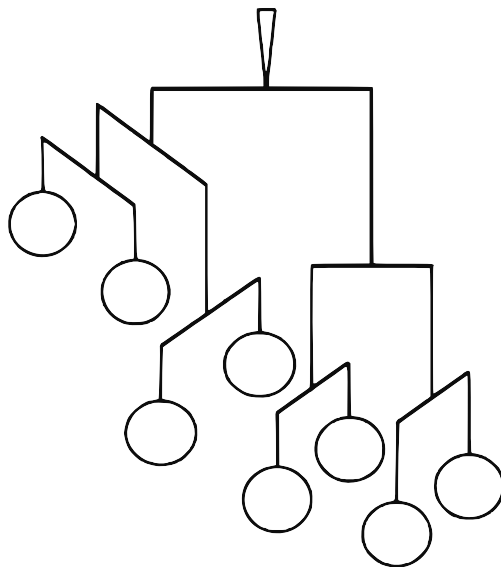
Termín: 18.05.2018

Naša adresa: Riešky, Mgr. Viera Babišová, Gymnázium Grösslingová, Grösslingová 18, 811 09 Bratislava 1

Elektronické riešenia: <http://riesky.sk/>

„Hej, Mathe? Si si istý, že nejdeme zle?“ spýtala sa Hanah, ktorá sa po niekoľkých hodinách spánku opäť objavila na hlavnej palube ich vesmírnej rakety. „Ideme dobre. Za chvíľku sme tam,“ odpovedal Mathe nezdvíhajúc oči od mapy. „Čo to bolo za zvuk?!“ skríkla zo spodnej paluby Helia. „Helia, si v poriadku?“ zakričal naspäť Mathe, ktorý prvýkrát odkedy dostal mapu do rúk, od nej odtrhol pohľad. „Ja som v poriadku, ale naša raketa nie,“ odpovedala Helia, ktorá stála zadychčaná vo dverách na hlavnú palubu. „Čo sa stalo?“ spýtal sa Misqi, ktorý tiež prišiel na hlavnú palubu s Mateyom v päťach. „Čo bol ten rachot?“ spýtal sa Matey, ktorý vyzeral ako keby sa práve zobudil. „Do našej rakety pred chvíľou narazil menší asteroid a zničil nám celú strojársku miestnosť. Zničil dva motory a prístroj na vyrovnávanie rakety. To znamená, že keď o pár minút narazíme do tej planéty, čo je priamo pred nami, tak zomrieme, lebo máme zničené spomaľovacie aj vyrovnávacie moduly,“ ozval sa Miroy. „Čože?!“ skríkli všetci prítomní.

Príklad č. 1: Miroy zistil, že jediná možnosť ako zachrániť loď a jej cestujúcich je, aby opäť vyvážili vyvažovací modul (obr.1). Miroy vyvážil modul zavesením závaží s hmotnosťami 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 a 13. Určite, ktoré závažie (kruh) má ktorú hmotnosť, ak viete, že na kraji nie je ani najťažšie ani najľahšie závažie a váhy sa prevážia ťažšou stranou nadol.



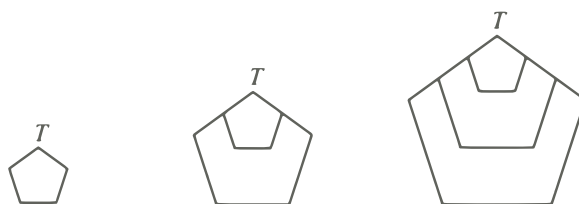
Obr. 1: Rozmiestnenie závaží

„Ste všetci v poriadku?“ spýtal sa Matey z oblaku prachu, čo sa zdvihol z planéty po havárii ich lode. „Hej, nejako sme to prežili,“ odpovedal Misqi. „Čo budeme teraz robiť?“ spýtala sa Hanah, „Naša raketa je v troskách!“ „Opravíme ju,“ vyhlásil Miroy, ktorý sa už pobral poobzerať si vrak ich lode, „ale najprv si musíme nakresliť plán opravy.“

Príklad č. 2: Na pláne opravy máme vyznačené dva body vo vzdialenosti 7 cm. Ako vie Hanah nájsť nejaké body od seba vzdialené 21cm len za pomoci kružidla?

„Čo ďalej Miroy?“ spýtal sa Matey. „Musíme nájsť materiál na opravu,“ odpovedal Miroy. „To znamená, že zahajujeme prieskum, všakže?“ spýtal sa nadšený Mathe. „Hej,“ odpovedal Miroy, „ale predtým musíme ešte rozvrhnúť ako budú vyzerat pláty na obal rakety.“ „Ja viem, ja viem!“ prihlásil sa nadšený Misqi, „spravme ich v tvare päťuholníkov!“

Príklad č. 3: Misqi nakreslil postupnosť obrazcov tak, ako na obr. 2. Prvý obrazec je obyčajný päťuholník so stranou dĺžky 1. Každý ďalší obrazec získame dokreslením päťuholníka k predošlému obrazcu tak, že majú spoločný vrchol (T) a strany z neho vychádzajúce sa im prekrývajú, pričom nový päťuholník má svoje strany o 1 dlhšie ako najväčší päťuholník v starom obrazci. Zistite dĺžku všetkých čiar 100-ho obrazca.



Obr. 2: Obrazce

„Fajn, keď na tom tak trváš, ale teraz treba zozbierať materiál,“ povedal Miroy. Naša skupinka dobrodruhov sa vybrala na prieskum planéty. Počas prieskumu narazili na hrajúce sa deti, ktoré sa hrali s kartičkami takúto hru:

Príklad č. 4: Deti majú 85 kartičiek s číslami 1 až 85. Trojicu po sebe idúcich kartičiek si označili mydlová, ak najmenšie z týchto čísel je v strede. Koľko najviac mydlových trojíc vedia deti dosiahnuť usporiadaním kartičiek?

„Ahoj,“ prerušil deti v ich hre Matey, „vedeli by ste nám pomôcť?“ Deti sa na neho opatrne pozreli, no potom sklopili zrak a vrátili sa k svojej hre. Matey sa pobral späť k svojej skupinke a spýtal sa: „Nieкто nejaký nápad?“ „Musíme ich rozveseliť, veď pozrite aké sú smutné,“ povedala Hannah a tak sa aj stalo. Naša skupinka sa rozbehla naspäť do rakety, pozbierala všetky hlavolamy a hračky ktoré v nej našla, zabalila ich do farebných papierikov a rýchlo sa vrátila naspäť k deťom aby im ich porozdávala ako darčeky. Deti boli šťastné a jedno z nich sa obrátilo na našich dobrodruhov a povedalo: „Toto mi pripomína jednu oslavu, ktorej som sa zúčastnil.“

Príklad č. 5: Máme oslavu a deti si dávajú darčeky. Detí je 20. Najmenej koľkým deťom musí dať každé dieťa darček, aby sme si boli istí, že bude existovať aspoň 13 dvojíc (nie nutne obsahujúcich rôznych ľudí) detí, ktoré si dali navzájom darček?

„Radi vám pomôžeme,“ povedali deti. „Potrebujeme nájsť materiál na opravu našej vesmírnej lode. Viete nám s tým nejakو pomôcť?“ spýtal sa Mathe. „Áno, s tým vám vieme pomôcť, poďte tadiaľto, niečo vám ukážeme,“ odpovedali deti.

Príklad č. 6: Deti priviedli vesmírnych dobrodruhov k podlahe s rozmermi $a \times b$, kde a, b sú prirodzené čísla s najväčším spoločným deliteľom n . Podlaha je vydláždená kachličkami veľkosti $n \times n$. Ak prejdeme rovno z jedného rohu podlahy do druhého, cez koľko kachličiek prejdeme?

„To je všetko pekné, ale ako nám to pomôže nájsť materiál?“ spýtal sa Miroy, ktorý bol už mierne podráždený. „Kúsok odtiaľto je postavený zázračný automat, ktorý obsahuje všetko, čo človek potrebuje, ale na to, aby niekto mohol ten automat použiť, musí byť šikovný a tak sme vás chceli vyskúšať, či viete logicky uvažovať,“ odpovedali deti a už súrili našich dobrodruhov, aby sa ponáhľali za nimi.

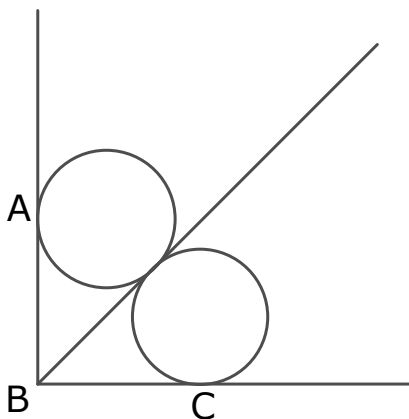
Príklad č. 7: Do čarovného automatu musí človek vhodiť všetky mince, ktoré má pri sebe. Predtým ich ale musí rozložiť na kôpky. Čím viac kôpok vyrobí, tým viac vecí dostane. Kôpky mincí musia byť vytvorené podľa týchto pravidiel: - Na prvej kôpke je párný počet mincí. - Na každej ďalšej kôpke je o dve mince viac ako na predchádzajúcej. Keď sa dobrodruhovia vybrali po veci, mali mince práve na 17 kôpok. Po ceste k automatu ich však stretli isté nepríjemnosti a o dve mince prišli. Zo zvyšných mincí pred automatom postavili práve 13 kôpok. Koľko mincí im zostalo? (Nájdite najmenšie riešenie.)

„Teraz musíme tento materiál odnieť na loď,“ povedal Miroy a obrátil sa na deti, „nemáte tu nejaké vozidlo alebo vozík, na ktorom by sme to mohli odviezť?“ „No, niečo by sa možno aj našlo. Keď vyriešite túto úlohu, tak vám kúpime v čarovnom automate vozík. Čo vy na to?“ spýtali sa deti. „Fajn, aké je zadanie?“ spýtal sa Matey pripravený vyhrať im vozík.

Príklad č. 8: Deti sa pustili do vysvetľovania svojej úlohy: Vezmime si 6 ľubovoľných prirodzených čísel a zistíme rozdiely každej dvojice z nich. Dokážte, že súčin všetkých týchto rozdielov je deliteľný 6.

„Konečne sme naspäť pri našej rakete,“ vydýchla si Hanah. „Nerozprávej toľko a pomôž nám s opravou,“ zahriakla Helia Hanah. „Dobre, čo mám robiť?“ spýtala sa Hanah Miroya. „Vy dve choďte opraviť jeden z motorov. V pláne je napísané ako,“ odpovedal Miroy, ktorý bol už pohrúžený do opráv. „Nie je ten plán toho motora nejaký divný?“ spýtala sa Hanah Helie. „Možno trochu, ale Miroy povedal, že to máme opraviť presne tak, ako je to napísané v pláne.“

Príklad č. 9: Motor bol na pláne nakreslený tak, ako vidíte na obr. 3. Uhol ktorý zvierajú priamky AB a BC je pravý. Obidve kružnice majú polomer 12cm. Priamka BS a obidve kružnice sa stretávajú v bode S . Akú dĺžku má BC ?

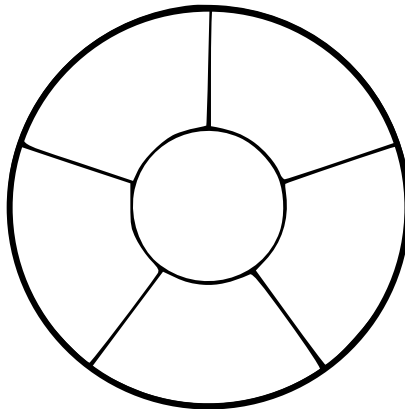


Obr. 3: Plán motoru

„Hotovo,“ vydýchol si s radosťou Misqi a ľapol si s ostatnými. „Tešilo nás,“ povedali deti, ktoré sa celým opravám prizerali, „toto je od nás darček na rozlúčku.“ „Ďakujeme!“ povedala Hanah a zobrala si od detí nemotorne zabalenú krabicu, „Čo je to?“ „Zistíte, keď to otvoríte. Majte sa!“ odpovedali deti a kývajúc na rozlúčku sa pobrali preč. „Nastupovať! Inak vás tu všetkých nechám!“ skríkol od dverí Miroy. „Ideme!“ zakričala Hanah a všetci sa pobrali do rakety. Kým Miroy s Mateyom štartovali motory, Hanah, Helia, Mathe a Misqi rozbalili krabicu, ktorú dostali od detí na rozlúčku. „Čo to je?“ spýtala sa Hanah, ktorá nevedela

na čo sa pozerá. „To je točiaci sa kruh na šípky?“ spýtal sa Misqi. „Vyzerá to tak,“ odpovedala Helia, „aha, tu sú aj vrhacie šípky k tomu.“ „Ideme si zahrať?“ spýtala sa Hanah, „Ja by som sa to totiž rada naučila.“ „Fajn, zatiaľ sa ale len pozeraj,“ povedal Misqi.

Prémia: Kruh na šípky vyzeral tak, ako to vidíte na obr. 4. Do každého políčka doplňte nejaké kladné celé číslo tak, aby sme sčítaním čísel jedného alebo viacerých políčok, ktoré tvoria súvislú oblasť, mohli získať všetky čísla od 1 po n . Aké najväčšie n vieme dostať?



Obr. 4: Kruh na šípky

„To nebolo také zábavné ako som očakávala,“ povedala sklamaná Hanah. „Asi máš pravdu,“ povedal Misqi. „Mathe, už odlietame. Zobral by si si tú mapu a navigoval by si nás?“ spýtal sa Matey. „Jasné, hneď som tam,“ povedal Mathe a pobral sa ku kormidlu. „Idem si nachvíľu ľahnúť,“ povedala Hanah. „Ja pôjdem asi tiež. Bol to náročný deň,“ pridala sa Helia a obidve zmizli do svojich izieb. „Idem tiež. Mathe, Miroy máte to tu na starosti,“ povedal Matey, potom čo odišiel aj Misqi. „Dobre,“ odpovedal Mathe. Po pár hodinách sa celá posádka lode zobudila na ohromný rachot a všetci sa rýchlo ponáhľali na hlavnú palubu rakety. „Čo sa deje?!“ snažil sa prekričať hluk Matey. „Neviem!“ zakričal Mathe naspäť, „zrazu sme vleteli do atmosféry nejakej planéty, ktorá tu vôbec nemala byť!“ „Čože?!“ skríkol Misqi: „Nemohla sa tu len tak objaviť!“ „Dámy a páni, prosím pripútajte sa a pripravte sa na stret so zemou za 10, 9, 8...“ začal odratúvať Miroy, ktorý bol pripútaný pri kormidle. „Toto nie je vtipné Miroy prestaň!“ skríkla Hanah. „Sadni si a pripútaj sa hneď teraz, ak nechceš zomrieť!“ skríkol Miroy. Celá posádka si rýchlo posadala a čo najpevnejšie sa snažila pripútať k sedadlám. „Pripravte sa na náraz za 3, 2, 1...“ odratúval Miroy. Celá raketa sa zatriasla a dobrodruhovia počuli obrovský šplech. Keď sa pozreli von cez okno, uvideli mútnu vodu. Raketa sa za chvíľu pohla smerom hore a naši dobrodruhovia sa pomaly premiestnili von z rakety a poobzerali sa okolo seba. „Robíš si z nás srandu, Mathe?!“ obrátil sa na Matheho Misqi, „veď sme naspäť tam, kde sme začali! Sme späť na Zemi! A ešte k tomu v Bratislave!“ „No, nebol to zlý výlet. Škoda, že trval tak krátko,“ ozvala sa Helia a celá posádka jej pritakala. „A zajtra ideme späť do školy,“ vzdychol si Mathe. „Tak to teda nikdy!“ skríkol zvyšok posádky.