Vzorové riešenia 3. kola letnej série 2017/2018

Príklad č. 1 (opravoval Mišo):

Zadanie: Miroy zistil, že jediná možnosť ako zachrániť loď a jej cestujúcich je, aby opäť vyvážili vyvažovací modul. Miroy vyvážil modul zavesením závaží s hmotnosťami 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 a 13. Určite, ktoré závažie (kruh) má ktorú hmotnosť, ak viete, že na kraji nie je ani najťažšie ani najľahšie závažie a váhy sa preváža ťažšou stranou nadol.

Riešenie:

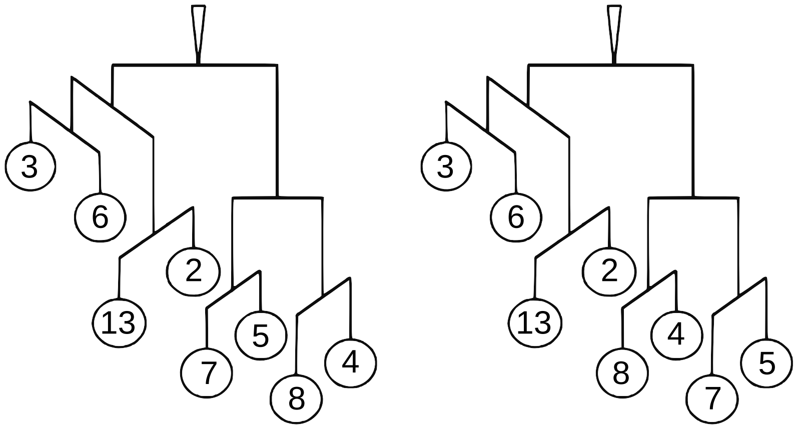
3Z rozloženia závaží vidíme, že hneď prvé rameno modulu je v rovnováhe. Na oboch jeho stranách bude preto celková hmotnosť rovnaká. Pozrime sa teda, koľko by to tak mohlo byť. Celková hmotnosť závaží je $2+3+4+5+6+7+8+13 = 48$. Na každej strane teda musí byť celková hmotnosť $48 : 2 = 24$.

Teraz sa pozrime na pravú stranu modulu. Tu máme opäť rovnovážny stav, takže na každej strane bude súčet hmotností $24 : 2 = 12$. $12-2 = 10$, $12-3 = 9$ a $12-6 = 6$, takže k závažiam s hmotnosťami 2, 3 a 6 neexistuje dvojica, s ktorou dokopy by mohli mať hmotnosť 12. Závažie s hmotnosťou 13 je zase priťažké, takže naše dve dvojice budú $5+7$ a $4+8$. Nevieme však v akom poradí, čiže tu máme dve možnosti.

Zostali nám závažia s hmotnosťami $2, 3, 6$ a 13. Tie treba rozvešať na ľavú stranu. Tu už nemáme rovnosť, takže niektorá dvojica bude musieť byť ťažšia. Keď k 13 pridáme najľahšie závažie - 2, dostaneme hmotnosť 15, čo je viac ako hmotnosť zvyšých dvoch dokopy. To znamená, že 13 bude istotne na ťažšej strane, konkrétne teda to ťažšie závažie, keďže nič nie je ťažšie ako 13.

O závaží s hmotnosťou 2 vieme zas, že je najľahšie. Preto nech bude v ktorejkoľvek dvojici, bude tým ľahším závažím. My však zo zadania vieme, že ako najľahšie závažie nemôže byť na úplnom kraji, preto bude visieť vedľa 13. Zvyšné dve závažia sú 3 a 6 a tie dáme na posledné dve miesta.

Odpoveď: Obr. 1



Obr. 1: Výsledné rozmiestnenie závaží

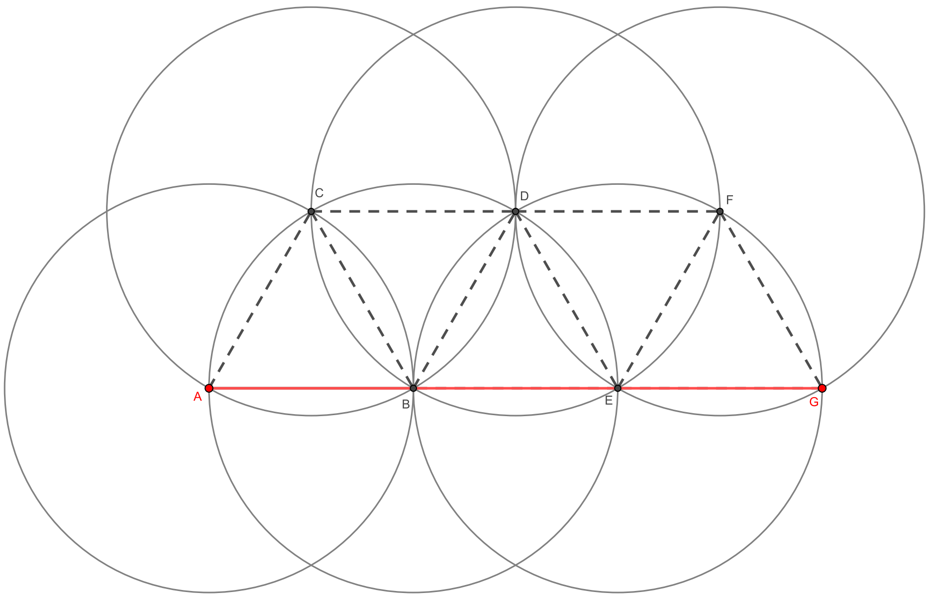
Komentár: Väčšina z vás zvládla príklad výborne, o nejaké body ste prišli, pokiaľ vám chýbalo niečo dôležité vysvetliť.

Príklad č. 2 (opravoval Miro):

Zadanie: Na pláne opravy máme vyznačené dva body vo vzdialenosti 7 cm. Ako vie Hanah nájsť nejaké body od seba vzdialené 21cm len za pomoci kružidla?

Riešenie: Máme úsečku AB s dĺžkou 7 cm. Podľa vety SSS narysujeme bod C tak, aby bol od oboch bodov vzdialený 7 cm. Trojuholník ABC je rovnostranný. Ďalej si môžeme narysovať bod D tak, že trojuholník BCD bude rovnostranný. Tak si postupne narysujeme aj body E,F,G (ako na obrázku). Úsečka AG má dĺžku 21 cm. Samozrejme nesmieme zabudnúť na dôkaz: $|AG| = 21cm$ vtedy, ak body A,B,E,G ležia na jednej priamke. To dokážeme buď na základe toho, že celý obrázok sa skladá len z rovnostranných trojuholníkov, takže súčet uhlov pri bode B aj E je $3 \cdot 60° = 180°$. Alternatívne to môžeme dokázať aj tým, že body A,C,D

a E tvoria polovicu pravidelného šesťuholníka a body A a E tvoria uhlopriečku. Takisto body B a G tvoria uhlopriečku, takže ležia na jednej priamke.

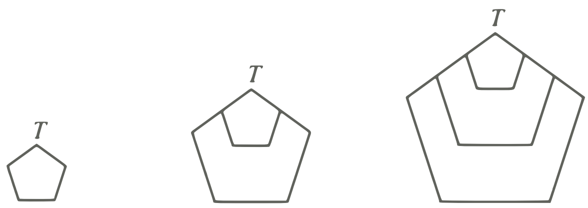


Obr. 2: Narysovaná čiara dĺžky $21cm$ (AG)

Komentár: Tento príklad dopadol vo všeobecnosti výborne, aj keď mnohí z Vás stratili bodíky na tom, že ste nenapísali zdôvodnenie, prečo tie body ležia na jednej priamke.

Príklad č. 3 (opravoval Mati):

Zadanie: Misqi nakreslil postupnosť obrazcov tak, ako na obr. 3. Prvý obrazec je obyčajný päťuholník so stranou dĺžky 1. Každý ďalší obrazec získame dokreslením päťuholníka k predošlému obrazcu tak, že majú spoločný vrchol (T) a strany z neho vychádzajúce sa im prekrývajú, pričom nový päťuholník má svoje strany o 1 dlhšie ako najväčší päťuholník v starom obrazci. Zistite dĺžku všetkých čiar 100-ho obrazca.
Riešenie:



Obr. 3: Obrazce

V tomto príklade máme zrátať dĺžky čiar v obrazci zloženého z 5-uholníkov. Prvé, čo vieme, je, že každý ďalší 5-uholník má stranu o 1 väčšiu ako predchádzajúci. Pre nás to znamená, že máme 5-uholníky s veľkosťami strán od 1 do 100. Obvod 5-uholníka je 5-násobok dĺžky jeho strany. Súčet obvodov všetkých týchto 5-uholníkov je preto:

$$5 \cdot 1 + 5 \cdot 2 + \cdots + 5 \cdot 99 + 5 \cdot 100 = 5 \cdot (1 + 2 + \cdots + 99 + 100)$$

Následne vytvoríme dvojice, ktoré dávajú súčet 101, napr.

$$1 + 100, 2 + 99, \ldots, 49 + 52, 50 + 51$$

Čísel od 1 po 100 je 100, čiže takýchto dvojíc je presne 50. Súčet strán všetkých 5-uholníkov je teda $5 \cdot 101 \cdot 50$.

Musíme však zobrať do úvahy, že 2 strany v každom 5-uholníku majú spoločný vrchol (T) a strany z neho vychádzajúce sa im prekrývajú. Čo to pre nás znamená? Máme stranu dĺžky 100, ktorá prekrýva 2 strany všetkých menších 5-uholníkov. Tieto strany sú už zarátané v súčine $5 \cdot 101 \cdot 50$. Musíme teda odrátať 2 strany každého 5-uholníka menšieho ako 100. Ako to spravíme? Veľkosť týchto strán je $2 \cdot (1 + 2 + \cdots + 99)$, čo vieme upraviť podobne ako predtým. Dáme ich do dvojíc so súčtom 100, napr. $1 + 99, 2 + 98, \ldots, 49 + 51$ a 50, ktorá nemá dvojicu. Máme teda 98 čísel v dvojiciach, ktorých súčet je 100 a jednu samostatnú 50. Súčet 2 strán z 5-uholníkov je teda $2 \cdot (49 \cdot 100 + 50)$.

Ostáva nám to už len odčítať

$$5 \cdot 101 \cdot 50 - 2 \cdot (49 \cdot 100 + 50) = 15350$$

.

Odpoveď: Dĺžka všetkých strán posledného obrazca je 15350.
Komentár: Veľa z vás tento príklad riešilo naozaj dobre, no niektorí ste sa pomýlili v sčitavaní, či nespomenuli, prečo nezarátavate tie 2 splývajúce strany.

Príklad č. 4 (opravoval Paľo):

Zadanie: Deti majú 85 kartičiek s číslami 1 až 85. Trojicu po sebe idúcich kartičiek si označili mydlová, ak najmenšie z týchto čísel je v strede. Koľko najviac mydlových trojíc vedia deti dosiahnuť usporiadaním kartičiek?
Riešenie: Každá mydlová trojica má svoje najmenšie číslo vo svojom strede. Zamerajme sa teda na to, kde všade môžu tieto stredy byť. Je dosť zrejmé, že na úplnom kraji radu týchto 85 kartičiek to byť nemôže. To necháva 83 miest na stredy mydlových trojíc a teda ich bude najviac 83.

Podstatná vec, ktorú si teraz treba uvedomiť, je to, že dva stredy mydlových trojíc nemôžu byť na susedných pozíciach. Vezmime si štyri po sebe idúce čísla a, b, c, d a sporom teraz ukážeme, že trojice abc, bcd nemôžu byť mydlové naraz. Ak je trojica abc mydlová, tak nutne platí $b < c$ a ak je trojica bcd mydlová, tak nutne platí aj $c < b$. To je ale spor, lebo sa to nikdy nemôže stať, a preto stredy mydlových dvojíc nesmú byť na susedných pozíciách. Keďže máme 83 možných pozícií na stred mydlovej trojice a nesmú sa dotýkať, tak naraz môže byť v rade najviac 42 týchto stredov.

Treba ešte ukázať, že naozaj existuje aspoň jedno rozloženie, pri ktorom budeme mať 42 mydlových trojíc. Rad môže vyzerať napríklad takto: $43, 1, 44, 2, 45, 3, 46, 4, 47, 5, 48, 6, ..., 82, 40, 83, 41, 84, 42, 85$.
Odpoveď: Najväčší možný počet mydlových trojíc je 42.
Komentár: Príklad ste zvládali. No vcelku dosť z vás nenapísalo, prečo je 42 najväčší možný počet trojíc. V tomto type úlohy sa väčšinou vyžaduje aj odhad dôkazom - v našom prípade zdôvodnenie, že trojíc nemôže byť viac než 42. A taktiež je treba uviesť popis konštrukcie takého radu, ktorý túto hranicu dosahuje.

Príklad č. 5 (opravovala Zuzka):

Zadanie: Máme oslavu a deti si dávajú darčeky. Detí je 20. Najmenej koľkým deťom musí dať každé dieťa darček, aby sme si boli istí, že bude existovať aspoň 13 dvojíc (nie nutne obsahujúcich rôznych ľudí) detí, ktoré si dali navzájom darček?
Riešenie: Riešenie tohto príkladu si rozdelíme na dve časti. Najskôr ukážeme, že ak každé dieťa rozdá 11 darčekov, tak sa určite vždy vytvorí 13 dvojíc detí, ktoré si dali navzájom darček. Potom aj ukážeme, že ak by každé rozdalo 10 darčekov, tak existuje taký prípad, kde je menej ako 13 dvojíc.

Spočítame, koľko možných dvojíc je medzi deťmi. Každé z 20 dietí vie dať 19 darčekov, čo je spolu $20 \cdot 19 = 380$. Takto sme ale každú dvojicu zarátali dvakrát, takže dvojíc je polovica z 380, čo je 190. Chceme vedieť najväčší možný počet darčekov dokopy, pri ktorom bude dvojíc menej ako 13. To urobíme tak, že v každej dvojici detí len jedno dieťa dá druhému, a nie naopak, čo nám zaberie 190 darčekov. V 12 z týchto dvojíc si môžu dať darčeky obaja. Takže ak bude darčekov 202, tak tam ešte môže byť len 12 dvojíc, no ak tam bude 203 darčekov a viac, tak tam určite v každom prípade bude 13 dvojíc detí, ktoré si navzájom dali darčeky.

Ak každé dieťa dá 11 darčekov, spolu ich bude 220. To je viac ako 202, a preto tam 13 dvojíc určite bude.

Zostáva ukázať, že 11 je to najmenšie číslo. Ak by každé dieťa rozdalo 10 darčekov, mohli by to urobiť nasledovne. Predstavme si, že deti sú postavené po obvode kruhu. Každé dieťa dá darček 10 deťom po jeho pravej strane. Napríklad dieťa číslo 1 dá darčeky deťom číslo 2 až 11. Keďže detí je 20, tak dvojice detí, ktoré si navzájom dali darčeky, budú v kruhu práve oproti sebe. Bude ich teda práve 10. Ak mi neveríte, skúste si to nakresliť. V prípade, že každé dieťa rozdá 10 darčekov, môže byť 10 dvojíc, čo je menej ako 13. Najmeším vyhovujúcim počtom darčekov je preto 11.

Komentár: Je jedna chyba, ktorú urobila väčšina z vás a to že ste zabudli na tú druhú časť. Chyba je v tom, že pre 10 darčekov je tých 10 dvojíc len teoretické minimum, lebo to nezahŕňa všetky podmienky. Preto je treba aj konkrétne ukázať, že sa tých 10 dvojíc urobiť dá. Toto sa niekedy nazýva konštrukcia.

Príklad č. 6 (opravovala Zuzka):

Zadanie: Deti priviedli vesmírnych dobrodruhov k podlahe s rozmermi a x b, kde a, b sú prirodzené čísla s najväčším spoločným deliteľom n. Podlaha je vydláždená kachličkami veľkosti n x n. Ak prejdeme rovno z jedného rohu podlahy do druhého, cez koľko kachličiek prejdeme?

Riešenie: Povedzme, že ideme z ľavého doľného rohu do pravého horného. Nezáleží totiž na tom, ktorú diagonálnu cestu si zvolíme. Počet stĺpcov bude a, a počet riadkov bude b. Najskôr sa pozrime na prípad, že čísla a, b sú nesúdeliteľné, teda ich najväčší spoločný deliteľ je 1.

Vždy, keď prejdeme z jednej kachličky na druhú, tak prejdeme na kachličku susediacu stranou hore alebo vpravo. Je to preto, že stále smerujeme do pravého horného rohu, teda sa nemôže stať, že by sme prechádzali na kachličku vľavo alebo dole.

Musíme tiež ukázať, že nikdy neprejdeme rohom kachličky (mrežovým bodom). To urobíme tak, že si predstavíme, že by sme niekedy mrežovým bodom prešli. Zoberme si prvý taký mrežový bod na našej ceste. Keď od tohto mrežového bodu pôjdeme rovnako (čo pôjdeme, lebo ideme stale priamo do rohu), narazíme na ďalší mrežový bod, ktorý bude od prvého rovnako vzdialený, ako bol prvý mrežový bod od štartu. Takto sa to bude opakovať až do konca, keďže roh podlahy je tiež mrežový bod. Naša cesta bude preto rozdelená mrežovými bodmi na niekoľko častí, nazvime si toto číslo c. Avšak, to by znamenalo, že aj počet stĺpcov vie byť rozdelený na c častí, a takisto aj počet riadkov. Číslo c by preto bolo spoločným deliteľom čísel a, b. To sa ale nemôže stať, lebo sú nesúdeliteľné. Čiže náš predpoklad, že niekedy prejdeme mrežovým bodom, je nesprávny, teda mrežovým bodom nikdy neprejdeme.

Keďže môžeme ísť len doprava a hore, tak za celú cestu musíme hore práve toľkokrát, koľko je počet riadkov zmenšený o 1 (lebo začíname už na prvom riadku). Nikdy nejdeme na kachličku dole, takže sa nemôže stať, že by sme išli hore viackrát. Takisto doprava pôjdeme práve toľkokrát, koľko je počet stĺpcov zmenšený o 1. K týmto číslam treba zarátať ešte aj začiatočnú kachličku. Spolu je preto kachličiek $a + b - 1$.

Teraz to zovšeobecníme pre ľubovoľné a, b. Ich spoločný najväčší deliteľ je n, takže ich vieme vydeliť a dostaneme čísla $\frac{a}{n}$ a $\frac{b}{n}$, ktoré reprezentujú počet stĺpcov a riadkov. Tieto čísla su nesúdeliteľné, teda nemajú žiadneho spoločného deliteľa. Čiže sme sa dostali späť k prípadu, že počty kachličiek v stĺpchoch a riadkoch sú nesúdeliteľné čísla, ktorý je popísaný vyššie. Nezáleží na tom, aké veľké kachličky sú. Správny výsledok je preto $\frac{a}{n} + \frac{b}{n} - 1$.

Príklad č. 7 (opravoval Zajo):

Zadanie: Do čarovného automatu musí človek vhodiť všetky mince, ktoré má pri sebe. Predtým ich ale musí rozložiť na kôpky. Čím viac kôpok vyrobí, tým viac vecí dostane. Kôpky mincí musia byť vytvorené podľa týchto pravidiel: - Na prvej kôpke je párny počet mincí. - Na každej ďalšej kôpke je o dve mince viac ako na predchádzajúcej. Keď sa dobrodruhovia vybrali po veci, mali mince práve na 17 kôpok. Po ceste k automatu ich však stretli isté nepríjemnosti a o dve mince prišli. Zo zvyšných mincí pred automatom postavili práve 13 kôpok. Koľko mincí im zostalo? (Nájdite najmenšie riešenie.)

Riešenie: Vo vzorovom riešení uvedieme dva spôsoby, ako sa s príkladom dalo popasovať. Prvý bude trocha viac exaktný a má väčšiu šancu uspieť pri veľa iných, podobných príkladoch. Druhý spôsob riešenia bude viac technický a ukáže, ako sa občas dajú príklady vyriešiť po lopate.

V oboch riešeniach bude potrebné si vyjadriť, koľko mincí dobrodruhovia mali. Označme si počet mincí pred stratou n_1 a po strate n_2. Podobne, počet mincí na prvej kôpke na začiatku k_1 a po strate k_2. Kôpok bolo najprv sedemnásť a potom trinásť, preto platia nasledovné rovnosti:

$$n_1 = k_1 + (k_1 + 2) + (k_1 + 4) + \cdots + (k_1 + 32) = 17k_1 + 272$$
$$n_2 = k_2 + (k_2 + 2) + (k_2 + 4) + \cdots + (k_2 + 24) = 13k_2 + 156$$

Zo zadania vieme, že platí $n_1 = n_2 + 2$. Z pravých strán rovností tiež vidno, že $k_2 > k_1$. Keď počty porovnáme, dostávame jednu rovnicu o dvoch neznámych:

$$17k_1 + 272 - 2 = 13k_2 + 156$$

Z nej si vieme vyjadriť k_2, ktoré bude musieť byť celé číslo.

$$\frac{17k_1 + 114}{13} = k_2$$

V prvom spôsobe riešenia upravíme, reps. zjednodušíme zlomok:

$$k_1 + 8 + \frac{4k_1 + 10}{13} = k_2$$

Zlomok na ľavej strane musí mať celočíselnú hodnotu, tj. čitateľ musí byť násobkom 13. Samotná trinástka nevyhovuje, ale pri $k_1 = 4$ nadobúda čitateľ hodnotu 26, čo je hľadaným riešením. Následne len dovyjadríme $k_2 = 14$ a $n_2 = 338$.

Pri druhom spôsobe riešenia, kedy nás šikovná úprava zlomku nenapadla, nám stači len vyskúšať pár možností. Keďže hľadáme najmenšie riešenie, tak nám stačí skúšať od najmenšej možnosti a prvá vhodná, čo nájdeme, bude riešením. Skúšajme postupne hodnoty pre k_1 a pomocou rovnice, v ktorej sme si vyjadrili k_2 overujme, či budú obe celé a párne.

- $k_1 = 1 \to k_2 = \frac{17+114}{13} \to k_2 \notin \mathbb{N}$[1]
- $k_1 = 2 \to k_2 = \frac{34+114}{13} \to k_2 \notin \mathbb{N}$
- $k_1 = 3 \to k_2 = \frac{51+114}{13} \to k_2 \notin \mathbb{N}$
- $k_1 = 4 \to k_2 = \frac{68+114}{13} = 14$

V prvom prípade sme sa úspešne vyhli skúšaniu vďaka úprave zlomku, v druhom sme naopak nemuseli upravovať zlomok. Netreba zabudnúť uvedomiť si, že v tomto riešení vychádzajú počty mincí na prvých kôpkach párne, čo je podmienkou zo zadania. Avšak, ak by tam táto podmienka nebola, riešenie by bolo rovnaké, keďže sme ju nepoužili.
Odpoveď: Po strate dvoch mincí im zostalo 338 mincí.

Príklad č. 8 (opravoval Kubo):

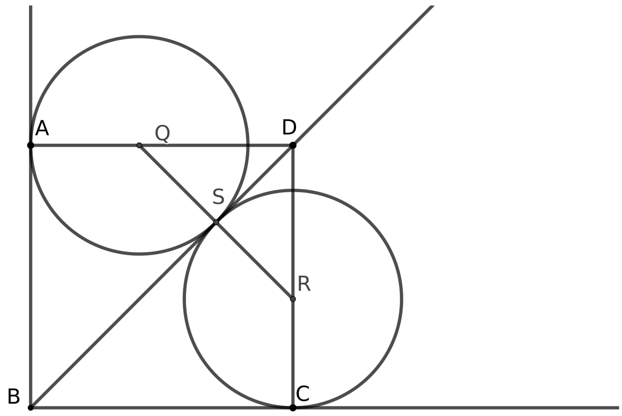
Zadanie: Deti sa pustili do vysvetľovania svojej úlohy: Vezmime si 6 ľubovoľných prirodzených čísel a zistime rozdiely každej dvojice z nich. Dokážte, že súčin všetkých týchto rozdielov je deliteľný 6.
Riešenie: Aby bolo číslo deliteľné číslom 6, musí byť deliteľné číslami 2 a 3. Všeobecne platí, že rozdiel dvoch čísel s rovankým zvyšok po delení K je deliteľný K. Po delení 2 sú 2 rôzne zvyšky, preto ak máme 3 čísla, tak aspoň 2 z nich musia mať rovnaký zvyšok a teda ich rozdiel je deliteľný 2. Takisto po delení 3 sú 3 rôzne zvyšky, preto ak máme 4 čísla, tak aspoň 2 z nich musia mať rovnaký zvyšok a teda ich rozdiel je deliteľný 2. V tejto úlohe máme čísel 6, čo je viac ako 3 aj 4, preto si môžeme byť istí, že medzi týmito číslami bude dvojica s rovnakým zvyškom po delení 2 a aj dvojica s rovnakým zvyškom po delení 3. Preto súčin všetkých rozdielov bude deliteľný 2, 3 a teda aj 6.
Odpoveď: Dokázali sme, že súčin rozdielov je deliteľný 6.
Komentár: Veľa z vás si to komplikovalo tým, že ste rozoberali prípady. To nie je úplne zlá vec, ale uvedomte si, že keď niečo napíšete pre rozdiely dvoch čísel so zvyškom 1 po delení 3, tak zväčša to platí aj pre ostatné zvyšky týchto čísel. Niekedy je teda dobré zamyslieť sa, či to nejde nejak všeobecne.

[1] Znak N označuje množinu prirodzených čísel.

Príklad č. 9 (opravoval Kubo):

Zadanie: Motor bol na pláne nakreslený tak, ako vidíte na obr. Uhol ktorý zvierajú priamky AB a BC je pravý. Obidve kružnice majú polomer 12cm. Priamka BS a obidve kružnice sa stretávajú v bode S.Akú dĺžku má BC?

Riešenie: Stred kružnice dotýkajúcej sa BC, BS oznažíme R. Potom $\angle BCR$ má veľkosť $22.5°$, pričom $|CR| = 12$ lebo je to polomer kružnice. Ďalej je to už len vec tangensu, pričom rýchlou úpravou zistíme, že dĺžka úsečky BC je $\frac{12}{\tan 22.5°}$, čo vychádza na $12 \cdot (1 + \sqrt{2})$ z tabuľkových hodnôt.



Obr. 4: Plán Motora

Druhý možný postup, ktorý má krajšiu myšlienku, začneme tým, že do obrázku doplníme bod D tak, aby $ABCD$ bol štvorec. Je teda zrejmé, že bod D bude ležať na priamke BS. Zároveň, keďže spojnica stredu kružnice a bodu dotyku je kolmá na dotyčnicu, tak stredy oboch kružníc ležia na stranách štvorca tak ako na obrázku. Vieme, že protiľahlé strany štvorca sú rovnako dlhé, teda nám stačí zrátať dĺžku AD. Tú si viem rozdeliť na súčet dĺžok $|AQ| + |QD|$, kde Q je stred druhej kružnice. Dĺžka AQ je polomer kružnice, teda 12. Trojuholník QRD je rovnoramenný a pravouhlý, lebo QR je kolmé na BS, keďže QS aj SR sú kolmé na BS, teda Q, S, R ležia na jednej priamke a táto priamka je kolmá na BS. $\angle SQD$ je potom $45°$, lebo je to doplnok do $180°$ v trojuholníku QSD. Takto teda vieme aj to, že dĺžka QR je 24, a pravouhlý je preto, lebo RDQ je vrchol štvorca. Platí teda Pytagorova veta: $|QD|^2 + |RD|^2 = 24^2$, kde z rovnoramennosti dostaneme, že $|QD|^2 = 288$, čo je to isté ako $12 \cdot \sqrt{2}$. Sčítaním dĺžok dostaneme rovnaký výsledok $12 \cdot (1 + \sqrt{2})$

Ešte existuje aj tretí postup, ktorý bohužiaľ nikto z vás nezvolil, a to je analytická geometria. Nech bod B má súradnice $(0, 0)$ a polpriamky BA, BC postupne splývajú s y-ovou, x-ovou osou. Potom predpis priamky BS je $y = x$. Bod R má y-ovú súradnicu 12, lebo RC je kolmé na BC a vzdialenosť RC je 12. Pre rovnobežné priamky tvaru $Ax + By + C = 0$, $Ax + By + D = 0$ vieme určiť ich vzdialenosť ako $\frac{|C-D|}{\sqrt{A^2+B^2}}$, pričom my vieme, že táto vzdialenosť je 12 ako aj to, že $A = -B$, teda $-12 \cdot \sqrt{2} = D$. Mínus je tam preto, lebo hľadaná rovnobežka leží pod priamkov BS. Z toho rovnica pre rovnobežku s BS prechádzajúca bodom R je $y = x - 12 \cdot \sqrt{2}$, teda ak $y = 12$, tak $x = 12 \cdot (1 + \sqrt{2})$, teda už vieme x-ovú súradnicu bodu R, ktorá je rovnaká ako vzdialenosť BC. Tento postup je vhodný hlavne pre tých, čo geometriu až tak radi nemáte, ale zato radi upravujete rovnice a výrazy. Výborné na ňom je, že je pomerne univerzálny, aj keď často je o čosi dlhší a musíte si ho natrénovať, aby ste sa niekde pri tých rovniciach nezasekli.

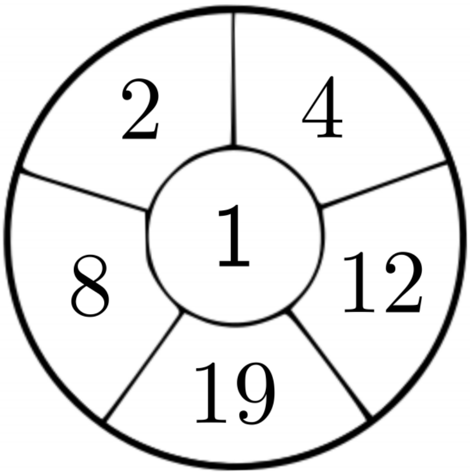
Odpoveď: Dĺžka BC je $12 \cdot (1 + \sqrt{2})$.

Komentár: Väčšina z vás zvolila goniometriu, čo je tak trochu škoda. Také riešenie vám totiž nedá moc intuície, preto by som vám odporúčal nájsť ešte nejaké iné odvodenie ako je vo vzoráku (áno je také a je v celku pekné). Čo sa týka tej analityky, tak tá je tu pre to, aby sme vám ukázali, že geometria nemusí byť len kreslenie obrázkov ale môže mať myšlienkovo aj celkom jednouché analytické riešenie, ktoré však má škaredšie výrazy.

Prémia (opravoval Mišo):

Zadanie: Kruh na šípky vyzeral tak, ako to vidíte na obr. Do každého políčka doplňte nejaké kladné celé číslo tak, aby sme sčítaním čísel jedného alebo viacerých políčok, ktoré tvoria súvislú oblasť, mohli získať všetky čísla od 1 po n. Aké najväčšie n vieme dostať?

Riešenie:



Obr. 5: Najlepšie rozostavenie

Odpoveď: n mohlo byť najviac 46.