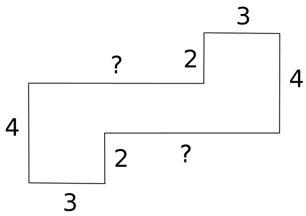
Vzorové riešenia 2. kola letnej série 2017/2018

Príklad č. 1 (opravoval Lámač):

Zadanie: Miroy má pred sebou položený zaujímavý útvar s dĺžkami strán ako na obr 1. O útvare vieme, že má obvod aj obsah rovnaký. Aká dlhá môže byť strana označená „?".

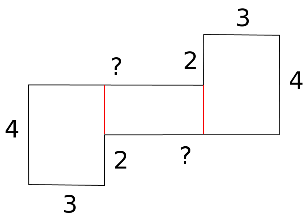


Obr. 1: Útvar

Riešenie: Obvod útvaru si vieme napísať ako

$$o = 2 \cdot (4 + 3 + 2 + ?)$$

Obsah útvaru si vieme napísať ako súčet obsahov troch obdĺžnikov (obr. 2), z ktorých sa skladá



Obr. 2: Obdĺžniky

$$S = 3 \cdot 4 + 3 \cdot 4 + 2 \cdot (? - 3)$$

Teraz si len obe rovnice zjednodušíme:

$$o = 2 \cdot (4 + 3 + 2 + ?) = 8 + 6 + 4 + 2 \cdot ? = 18 + 2 \cdot ?$$

$$S = 3 \cdot 4 + 3 \cdot 4 + 2 \cdot (? - 3) = 12 + 12 + 2 \cdot ? - 6 = 18 + 2 \cdot ?$$

Nakoľko sa obvod a obsah útvaru rovnajú pre ľubovolnú hodnotu ?, dĺžka strany „?" môže byť ľubovoľná.
Odpoveď: Dĺžka strany „?" môže byť ľubovoľná.
Komentár: Zväčša ste to mali správne, problém nastal, ak ste sa snažili dosádzať konkrétne hodnoty a nenašli ste tým pádom všetky riešenia – ľubovoľnú dĺžku strany „?".

Príklad č. 2 (opravovali Lámač, Kubo):

Zadanie: 9-krát hádžeme hracou kockou a vždy si zapíšeme číslo, ktoré nám padne. Najmenej často nám padlo číslo 2, najčatejšie číslo 4 a súčet všetkých zapísaných čísel po deviatich hodoch je 31. Koľkokrát nám padlo ktoré číslo?
Riešenie: To, že najmenej často padlo číslo 2 a najčastejšie 4 môžeme preformulovať na tvrdenie, že každé z ostatných čísel $(1, 3, 5, 6)$ muselo padnúť viackrát ako 2 ale menej krát ako 4.

Keďže máme iba 9 hodov, tak 2 nemohla padnúť ani raz. Ak by padla raz, tak 1, 3, 5, 6 by museli padnúť aspoň dvakrát a 4 až trikrát, čo je v súčte 12 hodov. Preto dvojka nepadla vôbec.

Ak by 4 padla iba dvakrát, tak potom by 1, 3, 5, 6 museli padnúť práve raz. Toto však nedáva v súčte dostatočný počet hodov, lebo celkovo je hodov iba 6. Preto 4 padla aspoň trikrát.

Poďme si to zhrnúť. 4 padla aspoň trikrát, 1, 3, 5, 6 aspoň raz, teda ešte máme voľné dva hody, ktoré musia mať súčet 4. To preto, lebo zatiaľ sme naisto určili hodnotu 7 hodov, ktoré majú súčet 27. Jediný spôsob ako vieme dostať súčet 4 dvomi hodmi je, ak 1, 3 padnú druhýkrát, lebo 2 nemôže padnúť ani raz a 4, 5, 6 nemôžme použiť, lebo potom by sme dostali súčet väčší ako 31.

$$2 \cdot 1 + 0 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 1 \cdot 5 + 1 \cdot 6 = 31$$

Odpoveď: 1 nám padla dvakrát, 2 nepadla vôbec, 3 padla dvakrát, 4 padla trikrát a 5 so 6 padli iba raz.
Komentár: Väčšina z vás strácala body za to, že ste rozoberali možnosti podobne ako vo vzoráku, no neuviedli ste, prečo nejaká možnosť nevyhovuje. Taktiež ste robili chybu v tom, že ste si povedali, že 2 padla aspoň raz. V zadaní však je, že 2 padla najmenej často, čo znamená, že nemusela nikdy padnúť, lebo ak hodnotíme ako často niečo padá, tak chceme, aby po dostatočnom počte hodov to číslo, ktoré má padať najmenej často padlo najmenší početkrát. Ak ste si teda povedali, že 5 padla 0-krát a 2 padla raz, tak to by znamenalo, že ak by sme spravili 100 hodov, tak určite by 2 padla viackrát ako 5, čiže by padala častejšie. Celkovo ste sa však snažili, a prišlo veľa pekných farebných riešení.

Príklad č. 3 (opravovali Sára, Mati):

Zadanie: Súradnice sú štvorciferné číslo, o ktorom vieme toto:
- Je to 4-ciferný násobok čísla 4.
- Keď mu vymeníme prostredné dve cifry, dostaneme násobok 7.
- Keď vymeníme prvé dve cifry, dostaneme násobok 5.
- Keď vymeníme posledné dve cifry, dostaneme násobok 9.

Aké najväčšie číslo môžeme mať?
Riešenie: Označme si hľadané číslo ako $\overline{ABCD}$. Zamyslime sa teraz nad cifrou na mieste jednotiek - D. Čo o nej vieme?
- Je deliteľná 5, lebo číslo $\overline{BACD}$ je deliteľné 5, teda D bude buď 0 alebo 5.
- Je párna, lebo číslo $\overline{ABCD}$ je deliteľné 4 a to platí len ak sú posledné dve cifry deliteľné 4. Keďže nepárne číslo nemôže byť deliteľné 4, musí platiť že $D = 0$.

Vieme, že deliteľnosť čísla 4 závisí na posledných 2 cifrách, teda ak má byť číslo $\overline{CD}$ deliteľné 4 a zároveň $D = 0$, tak $\overline{CD}$ bude jedno z čísel 00, 20, 40, 60 alebo 80. Keďže chceme nájsť čo najväčšie číslo, tak môžeme predpokladať že $A = 9$, ak také nenájdeme, vyskúšame $A = 8$... Pozrime sa teda na naše číslo $\overline{9BC0}$ kde C je jedna z cifier 0/2/4/6/8, teraz využijeme deliteľnosť 9. Číslo je deliteľné 9 ak je jeho ciferný súčet deliteľný 9

$$9 + B + 0/2/4/6/8 + 0 = 9 * n$$

z toho

$$B + 0/2/4/6/8 = 9 * (n - 1)$$

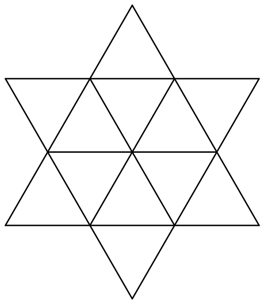
Teraz budeme postupne za C dosádzať čísla (0/2/4/6/8) a dorátame B, aby bol ich súčet deliteľný 9, vtedy bude deliteľné 9 aj celé číslo. Výslednému číslu prehodíme cifry do tvaru $ACBD$ a vydelíme 7.
- $9/0 + 0$ preto číslo $\overline{ABCD} = 9000$ a teraz $\overline{ACBD} = 9000$, $9000/7 = 1285,714$
- $9/9 + 0$ preto číslo $\overline{ABCD} = 9900$ a teraz $\overline{ACBD} = 9090$, $9000/7 = 1298,571$
- $9/7 + 2$ preto číslo $\overline{ABCD} = 9720$ a teraz $\overline{ACBD} = 9270$, $9270/7 = 1324,286$
- $9/5 + 4$ preto číslo $\overline{ABCD} = 9540$ a teraz $\overline{ACBD} = 9450$, $9450/7 = 1350$
- $9/3 + 6$ preto číslo $\overline{ABCD} = 9360$ a teraz $\overline{ACBD} = 9630$, $9630/7 = 1375,714$
- $9/1 + 8$ preto číslo $\overline{ABCD} = 9180$ a teraz $\overline{ACBD} = 9810$, $9810/7 = 1401,429$

Najväčšie 4-ciferné číslo deliteľné 4 ktoré spĺňa zadanie je 9540.
Komentár: Väčšina z vás príklad zvládla veľmi dobre, medzi najčastejšie chyby patrilo, že ste zabudli na možnosť $\overline{AB00}$, tiež ste občas zbytočne veľa vypisovali, dalo sa to zvládnuť aj na 3 pokusy.

Príklad č. 4 (opravovali Paľo, Tánička):

Zadanie: Máme útvar zložený z čiar modrej farby (Obr. 3). V rámci jedného ťahu môže Mathe vybrať n úsečiek tvoriacich ľubovoľný n-uholník a všetkým týmto úsečkám zmeniť farbu, buď z modrej na zelenú alebo naopak. Dokáže Mathe po niekoľkých ťahoch zmeniť celý útvar na zelený?

Riešenie:



Obr. 3: Útvar

Na začiatku máme všetky čiary modré. Uvedomme si, že pre ľubovoľný n-uholník platí, že do každého jeho vrcholu čiara prichádza a iná z neho odchádza, alebo inak povedané, každý vrchol n-uholníka má práve 2 čiary. Ak teda prefarbujeme čiary v jednom konkrétnom vrchole a pred prefarbovaním boli všetky modré, zelených bude vždy párny počet, lebo môžu nastať len 3 situácie, buď

- prefarbíme 2 modré čiary – počet zelených sa zvýši o 2 (párne číslo),
- prefarbíme 1 modrú a 1 zelenú čiaru – počet zelených ostane rovnaký,
- prefarbíme 2 zelené čiary – počet zelených sa zníži o 2 (párne číslo).

Teraz sa pozrime na náš obrázok. Ľahko nájdeme vrchol, z ktorého vychádza nepárny počet čiar a teda s určitosťou vieme povedať, že všetky tieto čiary zelené nikdy nebudú.

Odpoveď: Mathe nedokáže zmeniť celý útvar na zelený.

Komentár: Príklad väčšina z vás zvládla veľmi pekne. Najčastejšie chyby nastali, keď ste sa snažili postupovať postupne vyfarbovaním, kedy ste nezahrnuli všetky možnosti.

Príklad č. 5 (opravovali Sára, Teri):

Zadanie: Traja z našich dobrodruhov sa medzi časom začali hádať a pri hádaní sa povedali nasledujúce výroky:

- Hanah: „Hlavolam nezobral Matey. Som nevinná. Misqiho tretia veta je pravda."
- Matey: „Misqi to nebol. Všetko, čo vraví Hanah, je lož. Ja som hlavolam nevzal."
- Misqi: „Ja som to nebol. Hanah klame, keď vraví, že je nevinná. Matey klame, keď vraví, že všetko, čo povedala Hanah, je lož."

Miroy prezradil Helii, že každý z nich povedal aspoň jednu pravdivú a aspoň jednu nepravdivú vetu. Vie Helia zistiť, kto z nich vzal hlavolam?

Riešenie: Máme 3 možnosti kto mohol zobrať hlavolam. Vziať ho mohol Misqi, Matey, alebo Hanah. Pre každú možnosť prejdeme cez všetky výroky a pokúsime sa ich nejako vylúčiť. Ak nám na konci ostane iba 1 výrok, Helia vie zistiť kto hlavolam zobral (urobí to rovnako ako my), ak viac bude to nejednoznačné a teda to nebude vedieť zistiť.

Ak hlavolam zobral Misqi (začnime výrokmi Hany):

- Hlavolam zobral Misqi, takže prvý výrok je pravdivý.
- Hlavolam zobral Misqi, takže Hanah je skutočne nevinná.
- Misqiho 3. veta je pravda, keďže Hanah podľa zadania nemôže všetkými tromi výrokmi klamať, to znamená, že Matey klame a teda Misqi hovorí pravdu.

Všimnime si, že takto by Hanah hovorila iba pravdu, pričom vieme, že aj klame, teda Misqi hlavolam nevzal.

Ak hlavolam zobral Matey (začnime výrokmi Hany):

- Hlavolam zobral Matey, takže klame.
- Je nevinná, takže hovorí pravdu.

To nám stačí, keďže na Hanah už táto možnosť zlyhať nemôže (hovorila aj pravdu, aj klamala).

- Hlavolam zobral Matey, takže Misqi to nebol a teda Matey hovorí pravdu.
- Všetko čo vraví Hanah nemôže byť (a ani nie je) lož, teda toto je lož.

Nemôže to zlyhať už ani na Mateyovi.

- Misqi to nebol, teda hovorí pravdu.
- Hanah hovorí pravdu, keď vraví, že je nevinná, teda Misqi klame.

Nemôže to zlyhať už ani tu. Táto možnosť vyhovuje a nevieme ju vylúčiť. Poďme teda ďalej.

Ak hlavolam zobrala Hanah (začnime výrokmi Misqiho):

- Misqi to nebol – hovorí pravdu.
- Výrok Hanah klame, keď vraví, že je nevinná je tiež pravda.
- Hanah nemohla povedať samú lož, teda ak to tvrdí Matey, tak klame, teda Misqi hovorí pravdu.

Misqi v tejto možnosti hovorí samú pravdu, no vieme, že musel aj klamať. Táto možnosť nám nevyhovuje.

Jediná možnosť teda je, že hlavolam vzal Matey.

Odpoveď: Helia vie zistiť kto vzal hlavolam. Bol to Matey.

Komentár: Väčšina z vás s príkladom nemala problém a vyriešila ho správne, ale niektorí zabudli overiť, či všetci traja dobrodruhovia (Hanah, Matey a Misqi) hovoria aspoň jednu pravdu a aspoň jedno klamstvo.

Príklad č. 6 (opravoval Mišo):

Zadanie: Aby raketa v poriadku pristála, musí Miroy vypočítať takýto príklad. Zoberme si čísla od 1 po n, kde n je párne číslo a jedno z týchto čísel vymažeme. Ktoré z čísel môžeme vymazať tak, aby aritmetický priemer čísel, ktoré zostanú, bol celé číslo?

Riešenie: V riešení začneme vysvetlením vzorca pre súčet čísel od 1 po n, ktorý ste viacerí použili, a ktorý je užitočné poznať.

Spôsob ako to urobiť je napríklad popárovať čísla 1 a n, 2 a $n-1$, 3 a $n-2$ a tak ďalej. Všetky tieto dvojice budú dávať súčet $n+1$, pretože vždy keď sa číslo „zo začiatku“ zvýši o 1, číslo „od konca“ sa zníži o 1. Týchto dvojíc je pochopiteľne $\frac{n}{2}$. Ak by n bolo nepárne, počet dvojíc by nebol celý, čo však nevadí, lebo prostredné číslo ostalo opustené a to je svojím spôsobom polovica páru. Náš hľadaný súčet teda bude súčinom týchto dvoch čísel, teda

$$1+2+3+\cdots+n=\frac{n\cdot(n+1)}{2}$$

Teraz konečne prejdime k riešeniu úlohy. Ak rátame priemer čísel od 1 do n, stačí nám jednoducho ich súčet vydeliť ich počtom, teda

$$\frac{n\cdot(n+1)}{2n}=\frac{n+1}{2}$$

Zo zadania vieme, že n je párne. Potom priemer čísel od 1 do n nebude celé číslo, keďže to je $n+1$ je nepárne. Vymažme najprv číslo n bokom. Potom priemer čísel tejto postupnosti je

$$\frac{n\cdot(n-1)}{2\cdot(n-1)}=\frac{n}{2}$$

Číslo n je párne, takže priemer je tentoraz celé číslo.

Keďže sme vymazali najväčšie číslo, priemer bude najmenší aký sme schopní dostať. Zaujíma nás ešte ale, či nevieme dostať aj iný celočíselný priemer. Ďalší najbližší je o 1 väčší. Ak chcem priemer zväčšiť o 1, pričítame ku všetkým číslam číslo 1. Urobme to teda a zrazu máme čísla od 2 do n. Túto postupnosť zhodou okolností tiež vieme dostať a to konkrétne ak vymažeme číslo 1. Číslo 1 je ale v našej postupnosti najmenšie a teda priemer, ktorý sme dostali je najväčší možný.

To znamená, že ak vymažeme ľubovoľné iné číslo, dostaneme priemer medzi týmito dvomi už známymi priemermi. Keďže tieto priemery sú 2 po sebe idúce celé čísla, nič medzi nimi už celé číslo byť nemôže.

Odpoveď: Vymazať môžeme jedine čísla 1 a n.

Komentár: Veľa z vás nevysvetlilo, prečo iné čísla ako 1 a n vymazať nemôžme, alebo vaše vysvetlenia neboli dostatočne všeobecné. U niektorých z vás to viedlo dokonca k tomu, že ste nedokázali nájsť obe riešenia. V tomto príklade bolo najdôležitejšie práve ukázať, prečo 1 a n vymazať môžme a prečo žiadne iné nie.

Bodovanie: Za celé správne riešenie bolo samozrejme 10 bodov. 1 bod ste dostali ak ste k výsledku napísali niečo viac ako prípady nejakých konkrétnych n. Ďaľšie 4 ak ste odôvodnili svoje riešenie všeobecne. Tí z vás ktorí našli a odôvodnili obe možné riešenia dostali ešte 1 bod navyše. Zvyšné 4 boli za zdôvodnenie, prečo sú 1 a n jediné riešenia. Ak nebolo úplné dostali ste z nich len 2.

Príklad č. 7 (opravovali Hanka, Hela):

Zadanie: Nájdite najmešie prirodzené číslo, pre ktoré platia nasledujúce podmienky:

- Jeho ciferný súčet je rovný cifernému súčtu jeho 9-násobku
- Jeho ciferný súčet je rovný aj cifernému súčtu jeho 11-násobku
- Jeho 5-násobok je štvorciferné číslo, ktoré má tvar $\overline{AABB}$, kde A a B sú cifry tohto štvorciferného čísla

Riešenie: Hľadané číslo označme n. Najprv si uvedomme, koľko ciferné číslo hľadáme (aspoň rádovo). Zo zadania vieme, že jeho 5-násobok je štvorciferné číslo. Štvorciferné čísla začínajú číslom 1000 a končia číslom 9999, preto ak $5n$ sa má rovnať nejakému z nich platí, že $200 \leq n < 2000$. Keďže my hľadáme najmenšie z nich, začnime 3-cifernými číslami.

Podľa prvej podmienky v zadaní vieme, že ak číslo n vynásobíme 9, dostaneme číslo s rovnakým ciferným súčtom ako má pôvodné číslo. Vynásobené číslo je ale deliteľné 9, teda podľa kritéria deliteľnosti 9 vieme, že jeho ciferný súčet je deliteľný 9 a teda spätne aj pôvodné číslo musí byť deliteľné 9.

Podľa tretej podmienky vieme, že číslo $5n$ je tvaru $\overline{AABB}$. Takéto číslo je deliteľné 11, lebo je rovné

$$\overline{AABB} = \overline{AA00} + \overline{BB} = 100 \cdot \overline{AA} + \overline{BB}$$

teda oba sčítance sú zjavne deliteľné 11. Keďže čísla 11 a 5 sú nesúdeliteľné, teda ich najväčší spoločný deliteľ je 1, ak je $5n$ deliteľné 11, tak aj n je deliteľné 11.

Teraz vieme, že naše číslo je deliteľné 11-timi aj 9-timi. Znova, keďže najväčší spoločný deliteľ 11 a 9 je 1, musí byť naše číslo deliteľné aj číslom $9 \cdot 11 = 99$. Trojciferné čísla, ktoré sú násobkom 99 sa dajú zapísať ako $99 \cdot (a+1)$, kde číslo a je prirodzené číslo od 1 do 9. To vieme prepísať aj ináč

$$99 \cdot (a+1) = 100 \cdot (a+1) - (a+1) = \overline{(a+1)00} - a - 1 = \overline{a9(9-a)}$$

(cifry sa znížili kvôli prechodu cez desiatku). Ďalšieho prechodu cez desiatku sa báť nemusíme, keďže číslo a je prirodzené od 1 do 9.

Znova sa pozrime na tretiu podmienku, keď už máme tento tvar. Ak vynásobíme poslednú cifru číslom 5, dostaneme číslo od 0 do 45, pričom to bude príspevok k jednotkám. Samozrejme môže dôjsť k prechodu cez desiatky, ale najviac o 4 ($5 \cdot (9-a) \leq 45$). K desiatkam máme príspevok aj od $9 \cdot 5$ (druhej cifry), pričom k prechodu cez desiatku tu dôjde práve 4-krát bez ohľadu na počet prechodov od jednotiek (rozmyslite si). K stovkám a tisíckam máme teda jedine príspevok od prvej cifry, konkrétne $5a$ a od zvyšku čísla vždy práve 4. Stovky a tisícky čísla $5n$ ale majú tvar $\overline{AA}$ (podľa zadania), teda 11 musí deliť číslo $5n+4$. Číslo $5n$ bude deliteľné 5, takže bude končiť nulou, alebo päťkou. Ak bude končiť nulou, $5n+4$ bude končiť štvorkou a teda to musí byť 44 ($a = 8$). Ak bude končiť päťkou, $5n+4$ končí 9 a teda $a = 19$, čo je už priveľa, keďže a je cifra.

Pre $a = 8$ dostávame číslo 891. Toto číslo teraz skúsime, či spĺňa všetky podmienky (urobíme skúšku). Jeho 9-násobok je 8019, čo má rovnaké cifry a teda aj ciferný súčet. Jeho 11-násobok je 9801, čo má znova rovnaké cifry, teda aj ciferný súčet. Jeho 5-násobok je 4455. Keďže toto číslo evidentne spĺňa tvar aj v tretej podmienke, číslo 891 vyhovuje. Ďalej hľadať nemusíme, lebo úlohou bolo nájsť najmenšie n.

Odpoveď: Hľadané číslo je 891.

Komentár: Väčšina z vás riešila príklad cez vypisovanie si možných čísel $\overline{AABB}$ do tabuľky a následne ste zistili, ktoré čísla spĺňajú podmienky zo zadania. Takýto postup bol za 10 bodov, ak ste uviedli všetky možnosti pri skúšaní alebo ste logicky odôvodnili, prečo ste skúšali iba nejaké možnosti.

Príklad č. 8 (opravovala Zuzka):

Zadanie: Dobrá dvojica čísel je taká, ktorá má nejakého spoločného deliteľa väčšieho ako 1. Pekné číslo v skupine je také, že existuje iné číslo zo skupiny, ktoré s ním tvorí dobrú dvojicu. Vezmime si skupinu nejakých 10 po sebe idúcich čísel. Je možné, aby boli všetky čísla v nej pekné? Spoločný deliteľ dvoch čísel je také číslo, ktorým sa dajú obe vydeliť bezo zvyšku.

Riešenie: Už takto na začiatku vám prezradím, že všetky čísla v našej skupine desiatich po sebe idúcich nemôžu byť pekné. Dokážeme to tak, že sa pozrieme na možné spoločné delitele týchto čísel.

Platí, že ak majú dve čísla spoločného deliteľa, tak aj ich rozdiel je deliteľný týmto číslom. Ľubovolné dve čísla z našej skupiny majú rozdiel najviac 9, preto ak by mali mať spoločného deliteľa, tak musí najviac 9. Ak dve čísla majú spoločného deliteľa nejaké zložené číslo, tak určite je ich spoločných deliteľom aj každé prvočíslo, ktoré delí toto zložené číslo. Napríklad ak je spoločným deliteľom číslo 6, tak je ním aj 2 a 3. Preto stačí, ak ako možných spoločných deliteľov berieme do úvahy len prvočísla, teda 2, 3, 5 a 7.

Ďalej sa pozrieme na to, koľko čísel môže byť v našej skupine deliteľných ktorým z týchto prvočísel. Čísla budeme rozdeľovať na párne a nepárne. Párnych čísel je v našej skupine vždy práve 5 a sú všetky pekné, lebo majú spoločného deliteľa, číslo 2. Čísla deliteľné tromi môžu byť najviac 4, z toho najviac 2 nepárne. Teda môžu byť najviac 2 pekné nepárne čísla deliteľné tromi. Čísla deliteľné piatimi sú v každej skupine práve 2, z toho práve 1 nepárne, ktoré preto bude pekné. Nakoniec čísla deliteľné siedmimi môžu byť najviac 2, z toho najviac 1 nepárne.

Spomenieme si, že aby bolo číslo pekné, musí byť deliteľné aspoň jedným z prvočísel 2, 3, 5 a 7. Dokázali sme, že v ľubovoľnej skupine je 5 párnych pekných čísel a najviac 4 nepárnych pekných čísel. Teda v skupine môže byť najviac 9 pekných čísel.

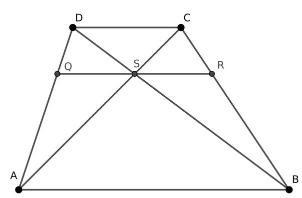
Odpoveď: Nie je možné, aby všetky čísla v skupine boli pekné.

Komentár: Pri tomto príklade viacerí z vás mali problém predstaviť si ľubovolných 10 po sebe idúcich čísel. Pomôcť pri tom môže napríklad to, keď si predstavíte len ich posledné cifry, ako to jeden riešiteľ urobil. V týchto 10 číslach sa totiž ako posledné cifry nachádzajú čísla 0 až 9, vždy každé presne raz. Keď si to takto predstavíte, hneď vidíte, že čísla končiace 0, 2, 4, 6, 8 sú párne a čísla končiace 0 a 5 sú deliteľné piatimi.

Príklad č. 9 (opravoval Kubo):

Zadanie: Misqi sa rozhodol, že s raketou pri vzlietavaní preletí cez takýto lichobežník. Tento lichobežník má základne dlhé a a b. Veďme rovnobežku p rovnobežnú so základňami cez priesečník jeho uhlopriečok. Body, kde sa p preťala s ramenami lichobežníka označíme Q a R, vyjadrite vzdialenosť $|QR|$ pomocou dĺžok a a b.

Riešenie:



Obr. 4: lichobežník

Označme priesečník uhlopriečok S, vrcholy lichobežníka ako A, B, C, D , dĺžku $|QR|$ ako x. Z toho, že uhly $\angle ASB$, $\angle CSD$ sú vrcholové a $\angle ABS$, $\angle CDS$ sú striedavé tak $\triangle ABS \sim \triangle CDS$ podľa vety UU. Z podobnosti ďalej vieme, že $a \cdot k = b$ pre nejaký koeficient podobnosti k. $|QR|$ zároveň delí lichobežník $ABCD$

na dva menšie lichobežníky. Teraz keď máme podobnosť, tak by ju bolo dobré aj použiť. Ako prvá dobrá alternatíva sú obsahy. Vieme totižto vyjadriť obsah lichobežníka $ABCD$ priamo aj nepriamo za použitia x. Priame vyjadrenie je $\frac{(a+b)\cdot v}{2}$, kde a, b sú dĺžky základní a v je výška. Nepriame je súčet obsahov lichobežníkov $ABRQ$, $QRCD$. Jediné, čo by nám mohlo robiť problém je, že ešte nemáme vyjadrený pomer výšok týchto lichobežníkov. To však nie je problém, lebo z rovnakej podobnosti ako pretým platí, že $v_1 \cdot k = v_2$ kde v_1 je výška lichobežníka $ABRQ$, v_2 je výška $QRCD$. Zároveň súčet týchto výšok je výška celého lichobežníka. Dostávame teda rovnicu:

$$\frac{(a+x)\cdot v_1}{2} + \frac{(x+b)\cdot v_2}{2} = \frac{(a+b)\cdot v}{2}$$

$$(a+x)\cdot v_1 + (x+b)\cdot(v_1\cdot k) = (a+b)\cdot(v_1 + (v_1\cdot k))$$

Vydelíme v_1 a roznásobíme:

$$a + x + x\cdot k + b\cdot k = a + b + a\cdot k + b\cdot k$$

$$x\cdot(k+1) = b + a\cdot k$$

$$x = \frac{b+a\cdot k}{k+1}$$

$$x = \frac{2b}{k+1}$$

$$x = \frac{2ab}{b+a}$$

V poslednom kroku sme čitateľ aj menovateľ rozšírili a, čo nám umožnilo zmeniť ak na b. Týmto sme úspešne vyjadrili $|QR|$

Odpoveď: Dĺžka OR je $\frac{2ab}{b+a}$

Komentár: Viacerý z vás potupovali podobne ako vo vzoráku, no často ste si riešenie komplikovali zbytočnými krokmi. Celkovo ste však príklad vyriešili pekne. Asi najčastejšia chyba bola v tom, že ste si prehodili nejaké písmenká a potom vám to nesedelo. Taktiež niektorí z vás predpokladali, že niečo sa pretína tak ako ste si to nakreslili a nedokázali to. Potom ste teda mali nekompletný dôkaz. Je teda dobré si vždy prejsť svoje riešenie krok po kroku po tom, čo ho dopíšete a pozrieť sa, či všetko to čo tvrdíte je naozaj pravda. Potom sa vám nestane, že zbytočne stratíte bodíky.

Prémia (opravovali Miro, Jerguš):

Zadanie: Do počítača sa dajú naťukať len jednotkové výrazy. Taký jednotkový výraz je výraz skladajúci sa iba z čísla 1 a znamienok $+, \cdot, ($ a $)$. To znamená, že $111+1$ nie je jednotkový výraz, lebo 111 nie je číslo 1, ale je zložené z viacerých číslic 1. Nájdite čo najkratšie zápisy čísel 100, 159, 261 ako jednotkové výrazy. Príklad takého jednotkového výrazu pre 16 je:

$$(1+1+1+1)\cdot(1+1+1+1)$$

Dĺžka jednotkového výrazu je súčet počtu znamienok, zátvoriek a čísel.

Riešenie: Najkratšie zápisy boli:

1. pre 100 - $(1+1+1+1+1)\cdot(1+1+1+1+1)\cdot(1+1+1+1)$
2. pre 159 - $(1+1+1)\cdot(((1+1+1+1)\cdot(1+1+1)+1)\cdot(1+1+1+1)+1)$
3. pre 261 - $(1+1+1+1)\cdot((1+1+1+1)\cdot(1+1+1+1)\cdot(1+1+1+1)+1)+1$

Odpoveď: Dĺžky zápisov:

1. 100 - 33 znakov
2. 159 - 43 znakov
3. 261 - 45 znakov