Vzorové riešenia 1. kola letnej série 2017/2018

Príklad č. 1 (opravovali Miro, Paťa):

Zadanie: Miroy si vybavil skúšku na vodičský preukaz, v ktorej môže získať maximálne 45 bodov. Body sa získavajú v šiestich predmetoch a k tomu sa dá získať ešte pár bodov za prospech. Všetky predmety si sú rovnocenné, teda maximálny počet bodov (za daný predmet) je pre každý z nich rovnaký. Za prospech sa dá získať menej bodov ako za jeden predmet. V každom predmete Miroy získal aspoň bod. Aký je najväčší počet predmetov, v ktorých Miroy získal maximálny počet bodov, ak Miroy získal 35 bodov? Prečo?
Riešenie: Najprv zistíme, koľko bodov sa dá získať za jeden predmet. Keďže všetky predmety sú rovnocenné, tak to zistíme ako $\textit{maximálny počet bodov} \div \textit{počet príkladov} = 45 \div 6 = 7$, zvyšok 3. Za jeden predmet sa teda dá získať maximálne 7 bodov a za prospech to čo zvýšilo, teda 3 body.

Teraz zistíme, v koľkých predmetoch mohol Miroy dosiahnúť 7 bodov. Miroy za každý predmet získal aspoň bod, preto môžeme týchto 6 bodov odpočítať od celkového počtu Miroyových získaných bodov, keďže s nimi už nebudeme narábať: $35 - 6 = 29$. Keď už za každý predmet má aspoň 1 bod, tak môžeme získaný počet bodov vydeliť počtom ešte nezískaných bodov pre jednotlivý príklad: $29 \div 6 = 4$, zvyšok 5. Delíme 6-kou, pretože maximálny počet bodov za príklad je 7 a jeden bod sme už ku každému dali $(7 - 1 = 6)$. Keďže nás nezaujíma, koľko bodov za ktorý predmet Miroy získal, tak ďalej nemusíme počítať.
Odpoveď: Najväčší počet predmetov, v ktorých Miroy získal maximálny počet bodov je 4.
Komentár: Viacero z vás zabudlo zdôvodniť určitú časť svojho postupu, inak bolo všetko poriadku.

Príklad č. 2 (opravoval Mišo):

Zadanie: Hlavolam, ktorý dal našej skupinke predavač, znel takto:
Doplňte do tabuľky celé kladné čísla ak viete, že:

- Čísla v bielych políčkach sú súčinom čísel v sivých políčkach v príslušnom riadku a stĺpci
- Čísla sa v bielych riadkoch ani bielych stĺpcoch neopakujú
- V šedých políčkach sú čísla väčšie ako 1 a menšie ako 13

Riešenie: Prvá vec ktorú si treba uvedomiť je, že ak máme dve rovnaké čísla vo vrchnom sivom riadku, tak keď tieto čísla vynásobíme číslom z vrchného riadku sivého stĺpca, výjdu nám dva rovnaké výsledky v tom istom riadku. Podobne to platí aj pre čísla v sivých riadkoch. To znamená, že sa čísla nemajú opakovať v bielych riadkoch a stĺpcoch, nemôžu sa opakovať ani v sivom riadku, ani v sivom stĺpci.

Teraz sa pozrime súčinom ktorých dvoch čísel dokážeme dostať čísla z tabuľky. Možnosti si vypíšeme, vynecháme však tie, v ktorých nenásobíme čísla väčšie ako 1, alebo menšia ako 13:

$$12 = 2 \cdot 6 = 3 \cdot 4 = 4 \cdot 3 = 6 \cdot 2$$

$$40 = 4 \cdot 10 = 5 \cdot 8 = 8 \cdot 5 = 10 \cdot 4$$

$$48 = 4 \cdot 12 = 6 \cdot 8 = 8 \cdot 6 = 12 \cdot 4$$

$$64 = 8 \cdot 8$$

$$6 = 2 \cdot 3 = 3 \cdot 2$$

Vidíme, že jediný spôsob ako získame 64 je, že do jej riadku aj do jej stĺpca dáme na sivé políčko číslo 8. To znamená, že v sivých políčkach už iné osmičky nebudú, takže možnosti s týmto číslom môžeme vylúčiť. Pri číslach 40 a 48 nám tak zostanú len dve možnosti. Keď číslo v ich spoločnom riadku musí byť deliteľom oboch týchto čísel, vidíme, že to bude musieť byť číslo 4. Do sivých políčok týmto číslam tak doplníme 10 a 12.

Podobne ako pri číslach 40 a 48, tak aj pri číslach 6 a 12 potrebujeme nájsť spoločný deliteľ. Tým bude zjavne 2 alebo 3 a zapíšeme ho do druhého stĺpca na sivé políčko. Druhý deliteľ 12 bude 4 alebo 6 a bude zapísaný v prvom riadku. Keďže je však hneď pod týmto políčkom políčko s číslom 4, vyberieme sem 6 a do stĺca s číslami 6 a 12 pôjde do sivého políčka číslo 2. Druhý deliteľ šestky tak bude 3. Keď máme doplnené všetky sivé políčka, biele môžeme doplniť vynásobením týchto sivých.

	10	2	8	12
6	60	12	48	72
4	40	8	32	48
8	80	16	64	96
3	30	6	24	36

Obr. 1: Vyplnená tabuľka

Odpoveď: Tabuľka (Obr. 1)
Komentár: Väčšina z vás si s hlavolamom poradila pekne, našli sa však aj takí, ktorí sa nepodelili o postup a tak prišli o body. Okrem toho boli len menšie chybičky vo vysvetľovaní, ale za tie sme veľa bodov nestrhli.

Príklad č. 3 (opravovali Dada, Katka):

Zadanie: Predavač napísal na papier trojciferné číslo $\overline{ABC}$ (kde A, B, C sú jeho cifry, nie nutne rôzne), ktoré bolo sumou, ktorú majú priatelia zaplatiť. Pod neho napísal trojciferné číslo $\overline{CBA}$ a ich sčítaním dostal znovu trojciferné číslo. Tento výsledok bol najväčšie trojciferné číslo, ktoré mohol takýmto postupom dostať. Akú hodnotu mal výsledok? A aké bolo pôvodné číslo? Nájdite všetky možnosti.
Riešenie: Ako prvé si uvedomíme, že súčet čísel $\overline{ABC}$ a $\overline{CBA}$ musí byť trojciferné číslo a preto súčet $A+C$ musí byť menší ako 10 v opačnom prípade by súčet $A+C$ na pozícii stoviek prechádzal do tisícok. Kedže sme si už ukázali, že $A+C$ je menšie ako 10 vieme, že zo súčtu $C+A$ na pozícii jednotiek nám nezostane desiatka, ktorá by sa pripočítala do súčtu $B+B$ na pozícii desiatok. A preto môžeme povedať, že na pozícii desiatok vo výslednom čísle bude párne číslo. Kedže chceme aby bolo výsledné číslo čo najväčšie, tak chceme mať aj na pozícii desiatok čo najväčšie číslo. Najväčšie jednociferné párne číslo je 8. Osmička nám na pozícii desiatok môže vzniknúť ako súčet dvoch deviatok alebo dvoch štvoriek. Rozoberme si bližšie tieto možnosti
a) $B=9$, v tomto prípade dostaneme na pozícii desiatok 8 a jedna nám zostane, túto jednu pripočítame na pozícii stoviek ku $A+C$. Keďže chceme aby súčet $A+C+1$ na pozícii stoviek bol menší ako 10 ale súčasne najväčší možný, tak tento súčet bude 9. V tomto prípade sa $A+C$ bude rovnať 8 a výsledné číslo bude 988.
b) $B=4$, v tomto prípade dostaneme na pozícii desiatok 8 a nič nám nezostane. Na pozícii stoviek bude iba súčet $A+C$. Tento súčet môže byť maximálne 9. Výsledné číslo bude 989. Vieme teda výsledné číslo, teraz potrebujeme zistiť možné počiatočné čísla $\overline{ABC}$. Vieme, že B sa bude rovnať 4 keďže $B+B$ je 8. Súčet $A+C$ chceme mať menší ako 10 a zároveň najväčší možný a to teda 9. 9 môžme dostať ako súčet $8+1$, $7+2$, $6+3$, $5+4$, $4+5$, $3+6$, $2+7$ a $1+8$. Určili sme si teda všetky možnosti pre A a C a tým pádom vieme určiť všetky možnosti pre základné číslo $\overline{ABC}$.
Odpoveď: Najväčšie možné trojcferné číslo, ktoré vieme dostať sčítaním $\overline{ABC}$ a $\overline{CBA}$ je 989. Máme 8 možností pre začiatočné číslo $\overline{ABC}$: 841, 742, 643, 544, 445, 346, 247, 148.
Komentár: Niekoľko z vás zabudlo pri príklade počítať s možnosťami súčtu cifier väčšími ako 9, či zabudlo popísať postup pri vypisovaní možností. Avšak väčšina mala veľmi pekné riešenie.

Príklad č. 4 (opravovali Mati, Jerguš):

Zadanie: Na doske máme 61 svoriek, do ktorých zapájame kábliky. Pre každý káblik platí, že je ofarbený jednou zo 6 farieb. Chceme, aby každá svorka bola káblikom spojená so 6 inými svorkami. Kábliky vychádzajúce z rovnakej svorky musia mať každý rôznu farbu. Je možné zapojiť kábliky tak, aby spĺňali všetky tieto podmienky?
Riešenie: Uvedomíme si, že kábliky jednej farby spájajú dvojice svoriek, z ktorých už káblik tej istej farby nevychádza. Zároveň však z každej svorky musí vychádzať káblik každej farby. To znamená, že každá svorka musí mať dvojicu, s ktorou je spojená káblikom danej farby. Aby teda bolo možné kábliky zapojiť, počet

svoriek musí byť párny. Počet svoriek však je nepárny. Preto nie je možné pospájať 61 svoriek káblikmi 6 farieb, aby spĺňali zadanie.
Odpoveď: Nie je možné pospájať 61 svoriek káblikmi 6 farieb tak, aby bolo splnené zadanie.
Komentár: Väčšina z vás vyrátala príklad naozaj pekne. Najčastejšie ste zabudli spomenúť, že v ani jednej z tých 2 svoriek už káblik tej istej farby nemôže byť.

Príklad č. 5 (opravovali Zajo, Teri):

Zadanie: Návod mal istý počet strán väčší ako 3. Strany boli očíslované číslami $1, 2, 3, \ldots$ Je treba ich usporiadať tak, aby každé dve po sebe idúce strany mali rozdiel ich poradových čísel rovný prvočíslu. Aký najväčší počet strán mohol mať návod?
Riešenie: Dobrým prvým krokom je zistiť, akých je niekoľko prvých prvočísel. Prvé dve prvočísla sú 2 a 3. Povedzme, že máme návod so 4 stranami. Stranu s číslom 1 môžeme dať vedľa strán 3 a 4, stranu s číslom 2 iba vedľa strany 4, stranu s číslom 3 iba vedľa strany 1 a stranu číslo 4 môžeme dať vedľa strán 1 a 2. Z tohto je jasné, že strany s číslami 2 a 3 musia byť na krajoch, lebo obe môžu byť vedľa práve jednej strany. Vyhovujúce usporiadanie pre 4 strany je potom napríklad $2, 4, 1, 3$. Všimnime si, že vieme rýchlo vytvoriť usporiadanie pre 5 strán, lebo 5 vieme priamo napojiť na 2 z ľavej strany, keďže ich rozdiel je 3, teda prvočíslo. Pre 6 strán je však riešenie tiež pomerne jednoduché, lebo 6 vieme napojiť na 3 z pravej strany. Týmto dostávame správne usporiadanie pre 6 strán, ktoré vyzerá takto: $5, 2, 4, 1, 3, 6$. Všimnime si, že usporiadanie pre 6 končí a začína párnym a nepárnym číslom.

Ak by sme teraz chceli usporiadanie pre väčší počet strán, tak sa môžeme zamyslieť, kam by sme tieto nové čísla strán pridávali. Povedzme, že chceme pridať siedmu stranu, tak ju skrátka dáme na ľavý koniec, lebo rozdiel 7 a 5 je 2. Ôsmu stranu by sme však dali na pravý koniec, lebo rozdiel 6 a 8 je dva. Takto by sme mohli pokračovať s 9 a 10 stranou. Podstatné je, že na jednu stranu usporiadania vždy pridávame iba nepárne čísla a na druhú stranu vždy párne čísla. Keďže čísla na koncoch usporiadania sú dve najväčšie čísla z tých, čo sme zatiaľ usporiadali, rozdiel nasledujúceho pridávaného čísla s jedným z čísiel na konci postupnosti bude určite 2.

Keď sa snažíme pridať stranu s číslom o 1 väčším ako číslo najväčšej zatiaľ usporiadnej strany, tak ju vždy pridáme na koniec, kde je strana s druhým najväčším zatiaľ usporiadaným číslom. Ak by sme ju pridali k najväčšej zatiaľ usporiadanej strane, tak by ich rozdiel bol 1. Pret rozdiel čísla pridanej strany a konca usporiadania, na ktorý bola táto strana pridaná, je 2. Teda opäť sú oba konce najväčšie v usporiadaní, lebo sme na koncoch nechali dve strany s najväčšími pridanými číslami. Takto môžeme pridať ľubovoľne veľa strán, čiže počet strán návodu môže byť ľubovoľne veľký, neobmedzený.
Odpoveď: Počet strán návodu môže byť ľubovoľne veľký.

Príklad č. 6 (opravoval Paľo):

Zadanie: Dňa 1. februára 2013 bol založený úrad vesmírnej dopravy, v ktorom vtedy pracovalo 7 úradníkov. Dňa 1. februára 2016 k nim pribudol nový kolega, ktorý mal práve 25 rokov. Do 1. februára 2018 jeden z úradníkov odišiel, a tak ich zostalo zase 7. Priemerný vek úradníkov na úrade vesmírnej dopravy bol vo všetkých troch spomínaných dátumoch rovnaký. Koľko rokov mal 1. februára 2018 úradník, ktorý z úradu odišiel? Aký bol v ten deň priemerný vek úradníkov pracujúcich na úrade?
Riešenie: Takýto príklad je rozumné riešiť rovnicami a teda budeme. Označíme si neznámou zatiaľ dve veci, konkrétne vekový priemer vo všetkých spomínaných dátumoch ako p a súčet vekov úradníkov v roku 2013 ako r.

Keďže úradníkov bolo v roku 2013 na úrade sedem, tak v roku 2013 musela platiť rovnica $p = \frac{r}{7}$. Do druhého dátumu – teda prvého februára roku 2016 zostarol každý zo siedmych úradníkov o 3 roky, čo je spolu 21 rokov. Navyše na úrad prišiel ďalší úradník, ktorý mal podľa zadania 25 rokov, teda už boli na úrade ôsmi. Potom platí pre rok 2016 nasledujúca rovnica $p = \frac{r+21+25}{8}$. Ľavé strany oboch rovníc sú rovnaké a teda ich pravé strany môžeme dať do rovnosti $\frac{r}{7} = \frac{r+46}{8}$.

Teraz vynásobíme obe strany rovnice číslom 56 a dostaneme $8r = 7r + 322$, z čoho už jasne $r = 322$. Z rovnice pre rok 2013 teraz jasne $p = 46$. Zostáva nám rok 2018. Vieme, že ak by na úrade zostali všetci ôsmi úradníci, tak by mali spolu $322 + 7 \cdot 5 + 25 + 2 = 384$ rokov. My ale vieme, že potom, čo odíde jeden z nich,

tak budú mať zase vekový priemer 46 rokov. Keďže už budú iba siedmi, tak musia mať spolu $7 \cdot 46 = 322$ rokov. Teda ten, čo odišiel v roku 2018 musel mať $384 - 322 = 62$ rokov.
Odpoveď: V deň 1.2.2018 odišiel úradník, ktorý mal 62 rokov. Vekový priemer úradníkov bol v každom zo spomínaných troch dátumov 46 rokov.
Komentár: Veľká väčšina z vás zvládla príklad na 10 bodov. Bol som milo prekvapený.
Bodovanie: Častá chyba bola, že ste napísali vek úradníka, ktorý odišiel, v nesprávnom roku. Za to som strhával jeden bod.

Príklad č. 7 (opravovali Lámač, Kubo):

Zadanie: Na súťaži vo vesmírnej matematike bolo 45 účastníkov. Zadania, ktoré dostali, mali 6 príkladov. Každý z týchto príkladov vyriešilo správne práve 25 účastníkov. Dokážte, že existujú dvaja účastníci, ktorí dokopy vyriešili všetkých 6 príkladov.
Riešenie: Pri takomto type úloh je často dobré zistiť koľko príkladov musel vyriešiť riešiteľ s najväčším počtom príkladov. Ak by každý zo 45 účastníkov vyriešil najviac 3 príklady, tak by mohlo byť vyriešených najviac 135 príkladov. To je všakmálo, lebo celkovo bolo správnych riešení $6 \cdot 25 = 150$, keďže každý príklad mal 25 správnych riešení. To znamená, že existuje účastník, čo vyriešil aspoň 4 príklady.

Keďže každý príklad vyriešilo správne 25 účastníkov, každá dvojica príkladov mala $25 \cdot 2 = 50$ správnych riešení. Počet účastníkov je ale iba 45, preto určite musia byť takí, ktorí vyriešili oba z dvojice príkladov. A koľko ich bude? $50 - 45 = 5$. Teda existuje účastník, ktorý vyriešil ľubovoľnú dvojicu príkladov. Teraz sme už s dôkazom hotoví, lebo sme ukázali, že niekto vyriešil aspoň 4 príklady a niekto vyriešil zvyšné dva príklady.
Odpoveď: Vieme vybrať dvoch účastníkov tak, aby dokopy vyriešili všetkých 6 príkladov
Komentár: Veľa z vás postupovalo tak, že zisťovalo čo sa stane keď ten, čo má najviac príkladov ich má 6, 5, 4, a tak ďalej. Vôbec však netreba uvažovať, že niekto vyriešil 6 alebo 5 príkladov, lebo pre každú dvojicu príkladov je niekto, kto ju vyriešil.

Príklad č. 8 (opravovala Sára):

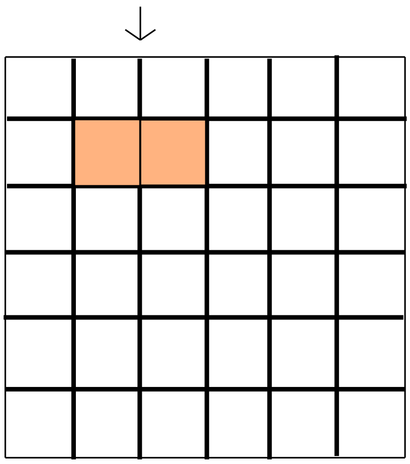
Zadanie: Na papieriku, ktorý dala Helia policajtom, bol takýto príklad. Máme štvorčekovú sieť veľkosti 6×6. Dá sa vyplniť dielikmi 2×1 tak, aby tam nevznikla rovná čiara (špára medzi dielikmi) dlhšia ako 5 políčok?
Riešenie: Našim cieľom je zistiť, či vieme do tabuľky 6×6 poukladať dieliky veľkosti 2×1 bez toho, aby medzi nimi vznikla špára dlhšia ako 5 dielikov – teda 6 dielikov.

Najprv si napríklad môžeme spočítať, že v tabuľke sa bude nachádzať presne 18 dielikov 2×1 pretože $(6 \times 6) \div (2 \times 1) = 18$. Potom sa zamyslíme – ak nájdeme vyskladanie tabuľky, ktoré spĺňa podmienku, vyriešime tým túto úlohu! Čo potrebujeme spraviť? Stačilo by, aby cez každú vodorovnú a zvislú čiaru v tabuľke bol preložený aspoň jeden dielik – na obrázku sme cez jednu zo zvýraznených čiar preložili dielik, takže teraz sa na nej už nebude dať spraviť špára dlhšia ako 5 políčok.

Čiže ak by sme cez každú zo zvýraznených čiar (ktorých je 10 – 5 vodorovných a 5 zvislých) preložili dielik a potom tabuľku doplnili zvyšnými dielikmi, úloha by bola splnená. Avšak keď si to párkrát vyskúšame, zistíme že to nejde. Kde je chyba?

Zoberme si ľubovoľnú z desiatich zvýraznených medzier. Táto medzera rozdeľuje tabuľku na dva obdĺžniky. Čo je ale zaujímavé, oba tieto obdĺžniky majú určite párny počet dielikov. Prečo? Jedna zo strán obdĺžnika bude dlhá 6, čo je párne číslo. Vynásobením párneho čísla dĺžkou druhej strany dostaneme počet dielikov a keď násobíme párne číslo iným číslom, výsledok bude vždy párny. No ale keď túto medzeru preložíme dielikom, na oboch zvyšných obdĺžnikoch zostane nepárny počet prázdnych políčok. A tie nevieme vyplniť dielikmi 2×1, pretože vypĺňajú obsah len po dvoch, takže na konci by nám zostalo jedno prázdne políčko na oboch obdĺžnikoch.

Teda je jasné, že cez každú vyznačenú medzeru musí ísť párny počet dielikov, aby obsah obdĺžnikov zostal párny. Avšak, ak cez každú medzeru musia byť preložené mininálne 2 dieliky, a medzier máme 10, budeme ich potrebovať aspoň 20. To však nie je možné, keďže dielikov máme k dispozícii len 18. Tým pádom bude musieť existovať aspoň jedna medzera, ktorú nepretne ani jeden dielik 2×1.
Odpoveď: Štvorčekovú sieť 6×6 nevieme vyplniť dielikmi 2×1 tak, aby nevznikla medzera dlhá 6 dielikov.



Obr. 2: Tabuľka

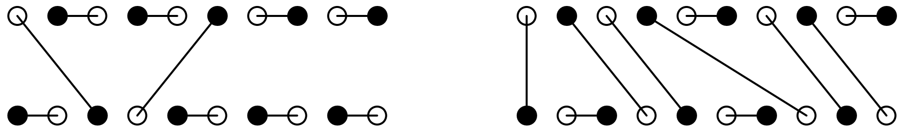
Komentár: Veľa z vás zabudlo na niektoré spôsoby ukladania dielikov, a preto váš dôkaz nebol kompletný. Taktiež sa stávalo, že ste si len skúsili vyskladať tabuľku. To nie je správny prístup, keďže tabuľku môžeme vyskladať mnohými spôsobmi, a bolo by potrebné ukázať všetky na to, aby sme dokázali, že tabuľka sa nedá vyskladať tak aby bola podmienka splnená.

Príklad č. 9 (opravovali Sára, MaťoŠ):

Zadanie: Koľkými možnosťami vedel Miroy pospájať 10 úsečkami bodky v počítači tak, aby spĺňali nasledujúce podmienky?

- každá bodka je spojená s práve jednou bodkou inej farby
- každá úsečka spája práve dve bodky a nemôže prechádzať žiadou inou
- žiadne dve úsečky sa nepretínajú

Riešenie: Najprv si skúsme niekoľko možností ako sa bodky dajú pospájať.



Môžeme si všimnúť, že niektoré úsečky spájajú bodky v rôznych riadkoch a niektoré zas susedné bodky v jednom riadku. Spojenie dvoch bodiek v jednom riadku budeme označovať ako horizontálne spojenie a spojenie dvoch bodiek v rôznych riadkoch ako vertikálne spojenie. Pri vertikálnom spojení môžeme spájať ľubovoľné rôznofarebné bodky (samozrejme tak, aby sa úsečky nepretínali). Ak ale ide o horizontálne spojenie, môžeme spojiť jedine 2 susedné bodky (rôznofarebné sú v každom prípade). Ak by sme totižto chceli spojiť 2 bodky, ktoré sa nenachádzajú bezprostredne pri sebe, úsečka by prechádzala aj inou bodkou, čo podľa podmienky v zadaní nemôže.

Všimnime si tiež, že počet horizontálnych spojení je v oboch riadkoch rovnaký. Je to tak preto, lebo v oboch riadkoch máme 10 bodiek a každé vertikálne spojenie nám zoberie jednu bodku zo spodného aj z vrchného riadku. To znamená, že ak na obrázku nie je žiaden horizontálny spoj, počet nespojených bodiek je určite v oboch riadkoch rovnaký a potom teda bude rovnaký aj počet horizontálnych spojov.

Začnime s výberom možností. Zatiaľ sa sústreďme iba na jeden riadok. Počet bodiek v tomto riadku, ktoré budú v nejakom vertikálnom spojení označíme $2k$, pre nezáporné celé číslo $k \leq 5$. Môžeme to urobiť vždy, keďže ich počet je zjavne od 0 do 10 a zároveň párny, pretože počet bodiek je párny a v každom horizontálnom spoji sú 2 bodky, čo je počet párny. Horizontálnych spojov potom v danom riadku máme

$$\frac{10-2k}{2} = 5-k$$

Vyberáme si teda celkovo z $5-k+2k = 5+k$ „objektov" a vyberáme z nich $2k$ alebo $5-k$ (podľa toho či bodky na vertikálne spoje, alebo horizontálne spoje). Na výber prvého objektu máme $5+k$ možností, na výber druhého $5+k-1$ a tak ďalej až na výber $2k$-tého objektu máme $5-k$ možností. To medzi sebou musíme navzájom vynásobiť, keďže každú možnosť kombinujeme s každou. Tento súčin vieme zapísať ako:

$$\frac{(5+k)!}{(5-k)!}$$

Tiež ale platí, že nám nezáleží na poradí, respektíve horizontálne ani vertikálne spojenia ako také nerozlišujeme, rozlišujeme len tieto 2 skupiny. Potom aby sme dostali počet možností musíme súčin vyššie vydeliť počtom opakovaní jednej možnosti, čo sa dá vyrátať ako $(2k)!$, pretože bodiek na vertikálnom spoji je $2k$, takže si najprv vyberám z $2k$, potom z $2k-1, \ldots$ a všetky len ich vzájomné kombinácie pre jedno rozloženie horizontálnych spojov je jedna možnosť zarátaná $(2k)!$-krát. Výsledný počet možností výberu bodiek v jednom riadku je teda

$$\frac{(5+k)!}{(2k)! \cdot (5-k)!}$$

Toto číslo sa dá zapísať aj kombinačným číslom

$$\binom{5+k}{2k} = \binom{5+k}{5-k}$$

(znamená, že vyberáme $2k$ respektíve $5-k$ možností z celkového počtu $5+k$).

Keď už vieme vyberať možnosti v jednotlivých riadkoch, predstavme si teraz situáciu, že v dolnom riadku máme vybranú jednu možnosť. Čo ďalej? Vyberme si jednu aj z horného riadku. Na to máme znova

$$\frac{(5+k)!}{(2k)! \cdot (5-k)!}$$

možností, no teraz len pre konkrétne k, keďže počet bodiek na vertikálne spoje musí byť v oboch riadkoch rovnaký.

Teraz máme niekoľko bodiek v dolnom riadku a rovnaký počet v hornom. Potrebujeme ich pospájať vertikálnymi spojmi. Vieme, že ak spojíme prvú zdola s prvou zhora, druhú s druhou,... možnosť bude validná, pretože

- bodky sú rôznofarebné, keďže horizontálny spoj nám zo všetkých bodiek uberie 2 rôznofarebné hneď vedľa seba a teda bodky ostanú „na striedačku“, takže každá bodka je spojená s práve jednou inej farby,
- každá úsečka spája 2 bodky a neprechádza inou bodkou,
- žiadne 2 úsečky sa nepretínajú (rozmyslite si prečo).

Zároveň toto bude jediná možnosť spojenia, pretože ak by sme niektorú bodku spojili s inou, jej neprislúchajúcov, na oboch stranách by bol rôzny počet bodiek v riadkoch, čo by sa už nedalo spojiť čisto vertikálnymi spojmi bez toho, aby sa úsečky pretínali. Zistili sme teda, že nám stačí zrátať počet možností na výber bodiek v riadkoch.

Ten vyrátame dosadením všetkých možností do k a pre každé k musíme počet možností v jednom riadku vynásobiť ešte raz samým sebou, lebo pre každú takúto možnosť ich daný počet vieme vybrať v druhom riadku. Výsledný počet možností potom dostaneme ako súčet týchto čísel, teda

$$\left(\frac{(5)!}{(0)!\cdot(5)!}\right)^2+\left(\frac{(6)!}{(2)!\cdot(4)!}\right)^2+\left(\frac{(7)!}{(4)!\cdot(3)!}\right)^2+\left(\frac{(8)!}{(6)!\cdot(2)!}\right)^2+\left(\frac{(9)!}{(8)!}\right)^2+\left(\frac{(10)!}{(10)!}\right)^2$$

respektíve ten istý zápis vieme urobiť aj kombinačnými číslami

$$\binom{5}{0}^2+\binom{6}{2}^2+\binom{7}{4}^2+\binom{8}{6}^2+\binom{9}{8}^2+\binom{10}{10}^2$$

K vyrátaniu si môžeme dopomôcť kalkulačkou a dostávame výsledok, 2317 rôznych možností spojenia bodiek.

Úloha sa dá vyrátať aj všeobecne, takže ak vás zaujala, môžete si skúsiť toto riešenie zovšeobecniť pre počet bodiek v jednom riadku $2n$. Ako výsledok by ste mali dostať niečo takéto

$$\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{(n+k)!}{(2k)!\cdot(n-k)!}\right)^2=\sum_{k=0}^{n}\binom{n+k}{2k}^2$$

Odpoveď: Miroy vedel bodky v počítači pospájať 2317 možnosťami.

Komentár: Tí z vás, ktorí sa túto úlohu aspoň pokúsili riešiť postupovali zvyčajne nejakým viac či menej systemtickým vypisovaním možností. Môžete si všimnúť, že ich je naozaj veľa, takže to vo väčšine prípadov neviedlo k správnemu výsledku. Preto ak nabudúce budete riešiť podobnú úlohu, skúste sa najprv zamyslieť nad tým, ako by sa to dalo zjednodušiť, alebo ešte lepšie, ako to nejakým spôsobom previesť do čísel, pretože nerátame s bodkami, ale s číslami. Tu bolo správnym nápadom rozdeliť si úsečky do dvoch skupín (ako vo vzorovom riešení) a následne rátať možnosti na základe počtu „objektov“ v skupinách, čo už bolo omnoho jednoduchšie. Úloha však bola veľmi náročná, takže už len to, že ste sa ju pokúsili riešiť a poslali nám nejaké jej riešenie je super. ;)

Prémia (opravovali MaťoU, Miro):

Zadanie: Máme tabuľku 7×7. Do všetkých políčok okrem jedného napíšeme číslo od 1 do 6 a šípku v jednom z 8 smerov, pričom každá možná dvojica šípka + číslo tam bude práve raz. Potom do ľavého horného rohu položíme figúrku a spravíme s ňou ľubovoľne veľa ťahov. Jeden ťah prebieha takto:

1. Zafarbíme políčko, na ktorom figúrka stojí.
2. Pohneme figúrku o toľko políčok, aké je na políčku číslo a v smere, ktorým ukazuje šípka.

Hra sa končí v momente, keď sa figúrka dostane na políčko, do ktorého sme nenapísali číslo ani šípku. Figúrka sa nikdy nemôže ocitnúť mimo hracieho plánu alebo na políčku, ktoré je už zafarbené. Spočítame, koľko políčok je zafarbených (nerátajúc posledné políčko) a to je naše skóre. Nájdite také rozloženie, kde sa dá získať čo najväčšie skóre.

Riešenie: Najviac sa vám podarilo získať skóre 45.

6↘	5↘	5↓	6↓	3←	1↙	
2↓	4↘	3↘	1↗	2→	5↙	3↙
3↓		4↓	2↙	1→	4↙	6←
4→	5→	1↓		1↖		4←
2↗	3→	2↘	4↑	3↖	5←	2↖
5↗	4↗	1←	3↗	1↘	2←	4↖
6↗	3↑	6↑	5↑	1↑	5↖	2↑

Obr. 3: Tabuľka s najväčším skóre

Odpoveď: Tabuľka so skóre 45 je na Obr. 3.