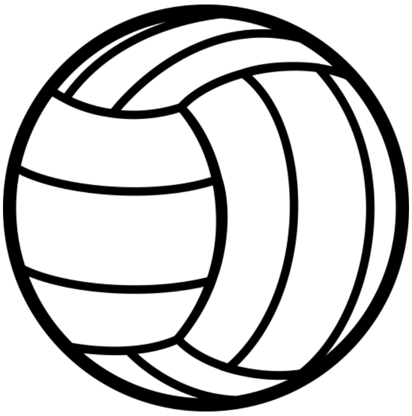
Zadania 3. kola zimnej série 2016/2017
Termín: 12.12.2016

Naša adresa: Riešky, Mgr. Viera Babišová, Gymnázium Grösslingová, Grösslingová 18, 811 09 Bratislava 1
Elektronické riešenia: http://riesky.sk/

Už prešlo niekoľko mesiacov odvtedy, čo si porazil zlého Gustaffsona, no ľudia ťa stále zdravia na ulici, gratulujú ti a chcú tvoj podpis. Na chvíľu si sa nad tým zamyslel na hodine telesnej výchovy a tých pár sekúnd stačilo na to, aby si schytal poriadnu ranu do hlavy volejbalovou loptou. Keď si sa spamätal, dostal si na zvyšok telesnej voľno. Kým si sedel na lavičke a čakal na koniec hodiny, zamyslel si sa nad takýmto príkladom.

Príklad č. 1: Je možné zafarbiť volejbalovú loptu, pozostávajúcu z 18 častí (ako na obrázku 1) troma farbami tak, aby susedné časti nemali rovnakú farbu? Vieme, že lopta vyzerá zo zadnej strany rovnako ako z prednej (vzor je pravidelný). Ak je to možné, tak ako? Ak to možné nie je, tak prečo?



Obr. 1: Lopta

Konečne. Škola skončila a ty máš na dnes voľno. Najprv sa však musíš dostať domov. Tak ako každý deň, aj dnes ideš hromadnou dopravou. Drak je preplnený ako vždy, sotva sa mu udržíš na chrbte. Vtom si spomenieš, že si čítal článok s dopravným prieskumom, no nepamätáš si všetky čísla. Dlhú cestu si teda krátiš tým, že sa snažíš dopočítať chýbajúce hodnoty.

Príklad č. 2: Všetci pracovníci jedného dopravného podniku sa podrobili prieskumu, v ktorom sa zisťovalo, ktorým dopravným prostriedkom (drak, lochnesská príšera, jednorožec) cestujú do práce. Toto sú čiastočné informácie z prieskumu: Drakom cestuje do práce 185, lochnesskou príšerou 85 zamestnancov. Všetky tri dopravné prostriedky nepoužíva nikto a najviac jedným jazdí 207 zamestnancov. Päťdesiat pracovníkov použije pri ceste lochnesskú príšeru a draka, 70 pracovníkov jednorožca a draka a 235 zamestnancov cestuje jednorožcom alebo lochnesskou príšerou. Práve dvoma z uvedených dopravných prostriedkov sa dopravuje 125 zamestnancov.

Určte z týchto informácií, koľko zamestnancov:

1. nepoužíva žiadny z uvedených dopravných prostriedkov,
2. cestuje iba jednorožcom,
3. cestuje jednorožcom alebo drakom.

Konečne zosadneš z draka. Poriadne si ponaťahuješ stŕpnuté nohy, no potom zbadáš, ako ti odchádza jednorožec. Ale nie, ďalší pôjde až o pol hodinu! Ako je to ale možné? Veď si sa pozeral na hodinky... Pozrieš sa na ne ešte raz a zrazu zistíš, že idú nejak divne. Keď prídeš domov, musíš ich opraviť.

Príklad č. 3: Všimol si si, ako sa na tvojich hodinách na hviezdny prach zmenil čas z 19 : 28 na 19 : 35. Keď si ich potom sledoval, zistil si, že vždy 7 minút stoja a potom sa na nich čas posunie o 7 minút. Ten istý deň si nevedel zaspať, a tak si si začal zapisovať minúty, ktoré ukazovali tvoje hodiny na hviezdny prach, vždy, keď sa na nich zmenil čas. Presne hodinu po tom, ako si zapísal prvé číslo, si zaspal. O koľkej hodine si zaspal, ak súčet všetkých zapísaných minút bol 264?

Ďalší deň si sa rozhodol zlepšiť si náladu z pokazených hodín, a tak si sa vybral s kamarátmi na zmrzlinu.

Príklad č. 4: Traja študenti mali každý celočíselný počet eur. Zastali pri stánku so zmrzlinou. Peter mal najmenej, iba 1 euro. Kúpil si dve porcie a odišiel. Zvyšní dvaja sa rozhodli, že si kúpia najväčší možný počet zmrzlín, na ktorý im stačia peniaze. Tomáš si kúpil 6 porcií a Michal 11 porcií zmrzliny. Keby dali svoje peniaze dokopy, aj tak by im na 18 porcií nestačili. Koľko centov stojí zmrzlina v tomto stánku?

Po zmrzline si sa rozhodol spraviť si domáce úlohy. Dostal si jednu z magickej histórie. Máš sa naučiť poradie kúzel, ktorými bola zvrhnutá nadvláda trollov. Po pol hodine úporného snaženia si všimneš, že ak kúzla očísluješ, tak čísla vytvoria veľmi peknú postupnosť. Pomôže ti pri učení, ak si zapamätáš iba vlastnosti postupnosti alebo ich existuje viac?

Príklad č. 5: Naša postupnosť má dokopy 101 členov. Označme si ich $a_1, a_2, \cdots a_{101}$. Jednotlivým členom sú priradené čísla $2, 3, 4, \ldots, 102$. Pozorné oko si všimlo, že vždy platí, že číslo, priradené členu a_k je deliteľné číslom k bezo zvyšku. Naozaj, pre každé jedno k, od 1 až po 101. Vieš takú postupnosť zostaviť aj ty? Vravíš, že to je jednoduché? Tak urči všetky takéto postupnosti!

Už už si sa chystal pustiť do ďalšej úlohy, keď prišiel tvoj kamarát, že sa nudí a chce sa hrať. Necháš sa teda nahovoriť na nasledujúcu hru.

Príklad č. 6: Majme mriežku 100×100. Prvý hráč má dieliky v tvare štvorca 2×2, druhý hráč má L-ká zložené z 3 štvorčekov mriežky. Striedajú sa v umiestnovaní dielikov na plánik, pričom začína prvý a dieliky sa nemôžu prekrývať, ani vytŕčať z mriežky. Hráč, ktorý už nemôže umiestniť dielik, prehráva. Ktorý hráč má vyhrávajúcu stratégiu a aká je?

Keď sa dohráte, je čas pokračovať v úlohách. Tvoja ďalšia domáca úloha je z magických obrazcov. Dokážeš ju vyriešiť?

Príklad č. 7: Majme rovnobežník $ABCD$, ktorý má obsah $20cm^2$. Na úsečke AB zvolíme bod E a skonštruujeme rovnobežník $EFGD$ tak aby bod C ležal na úsečke GF. Aký má obsah rovnobežník $EFGD$?

Už si si myslel, že povinnosti máš hotové, ale kamarát, s ktorým si sa hral hru má tiež problémy s úlohou s obrazcov. Keďže ty si si to všetko už nacvičil, rozhodneš sa, že mu pomôžeš a pustíš sa aj do jeho úlohy. Vyzerá dokonca zložitejšie ako tá tvoja. To je výzva!

Príklad č. 8: Majme kosoštvorec $ABCD$. Označme S priesečník uhlopriečok, T_1 ťažisko trojuholníka $\triangle ASD$ a T_2 ťažisko trojuholníka $\triangle SCD$. Akú časť obsahu z celého kosoštvorca zaberá obsah trojuholníka $\triangle T_1T_2B$?

Hotovo! Spoločne sa vám podarilo prísť na riešenie aj tejto úlohy. Za odmenu sa dohodnete, že pôjdete na čokoládu do parku. Ako ste išli okolo, všimli ste si zaujímavú vec:

Príklad č. 9: V strede parku je kvetinový záhon v tvare kruhu s priemerom 5. Vovnútri je zasadených 10 kvetiniek. Kamarát sa zamyslí a hovorí: "Stavím sa, že existujú také dve kvetinky, že ich vzdialenosť je menšia ako 2". Na chvíľku sa zapozeráš na kvetinky, zamyslíš sa a dáš mu za pravdu. Musí mať tvoj kamarát pravdu pri ľubovoľnom rozmiestnení kvetiniek, alebo existuje také rozmiestnenie, kedy to pravda nebude?

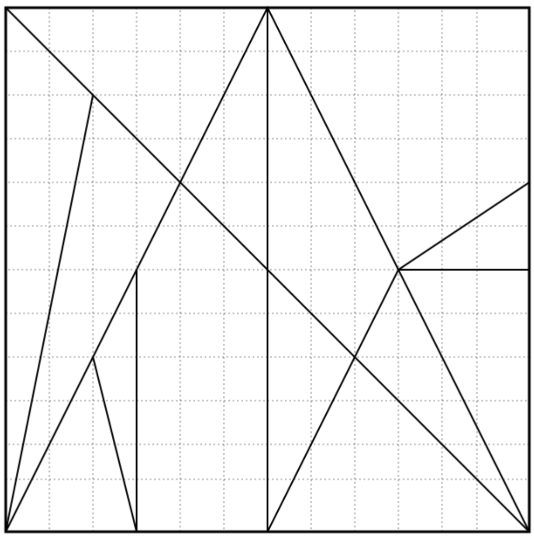
Pri pozeraní na kvetinky ste skoro zabudli, na čo ste do parku išli. Našťastie ste svoje úvahy rýchlo dokončili a pobrali sa na naozaj zaslúženú čokoládu.

Prémia: Čokoláda mala štvorcový tvar bola veľká 12×12 dielikov. Dostali ste ju však už rozbitú na 14 kúskov, vyznačených na obrázku 2. Než ju však začnete jesť, radi by ste ju dostali do stavu, kedy bude najlepšie chutiť. To ako dobre chutí čokoláda sa dá vyrátať podľa toho, akú má "rozbitosť". Čím menšia rozbitosť, tým lepšie chutí.

Rozbitosť čokolády spočítame tak, že sa pozrieme na miesta na nej, vrátane tých na okraji, z ktorých vychádzajú aspoň tri čiary. Za každé takéto miesto pripočítame k rozbitosti druhú mocninu počtu z neho vychádzajúcich čiar. Teda za každé miesto, z ktorého vychádzajú tri čiary stúpne rozbitosť o 9, z ktorého vychádzajú štyri o 16 atď. Napr. rozmiestnenie dielikov na obrázku má rozbitosť:

$$6 \cdot (3^2) + 7 \cdot (4^2) + 2 \cdot (5^2) = 216$$

Vašou úlohou je nájsť také preusporiadanie dielikov čokolády, že sa nebudú prekrývať a dokopy vyplnia celý štvorec 12×12 také, že rozbitosť usporiadania dielikov bude čo najmenšia. (Dieliky je možné otáčať aj zrkadlovo prevracať)



Obr. 2: Rozbitá čokoláda