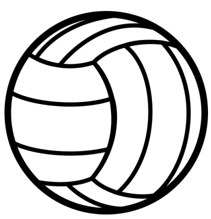
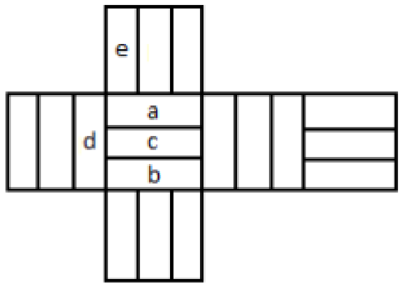
Vzorové riešenia 3. kola zimnej série 2016/2017

Príklad č. 1 (opravovali Dada, Kornelka):

Zadanie: Je možné zafarbiť volejbalovú loptu, pozostávajúcu z 18 častí (ako na obrázku 1) troma farbami tak, aby susedné časti nemali rovnakú farbu? Vieme, že lopta vyzerá zo zadnej strany rovnako ako z prednej (vzor je pravidelný). Ak je to možné, tak ako? Ak to možné nie je, tak prečo?
Riešenie: Lopta má tvarovo 6 rovnakých častí, ktoré si môžeme predstaviť ako 6 stien kocky. Na ukázanie zafarbovania si teda vieme nakresliť plášť kocky:

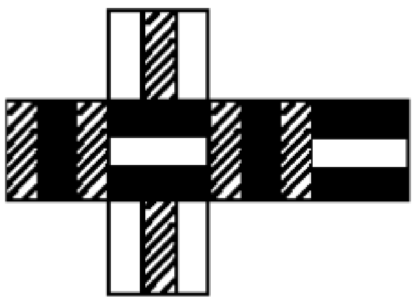


Obr. 1: Lopta



Obr. 2: Sieť našej lopty, ktorá sa zmenila na kocku

Ako prvé si treba uvedomiť, že na žiadnu časť nemôžu byť použité všetky tri farby. Čo by sa stalo, keby na časti s vodorovnými pruhmi (A, B, C) boli použité všetky tri farby? Zvislý pruh (D) sa dotýka všetkých tých troch vodorovných pruhov, teda na na neho by sme už nemohli použiť ani jednu farbu. Zvolíme si teda jednu časť, ktorej stredný pruh (C) bude jednej farby a krajné (A, B) druhej. Zvislý pruh (D), ktorý sa dotýka všetkých týchto troch pruhov bude tretej farby.
Ďalej si môžeme všimnúť, že pruhy A, D a E sa dotýkajú a keďže pruhy A a D už majú každý svoju farbu, pruh E musí byť zostávajúcej tretej farby a to teda rovnakej ako pruh C.
Podobným spôsobom sa vieme dopracovať k zafarbeniu celej lopty tromi farbami tak, že na žiadnych susediacich pruhoch nebude tá istá farba, napríklad:



Obr. 3: Zafarbená lopta

Odpoveď: Volejbalová lopta sa dá zafarbiť troma farbami tak, že žiadne dva susedné pruhy nebudú mať rovnaké farby.
Komentár: S príkladom ste zväčša nemali žiaden problém, čo chválime :)

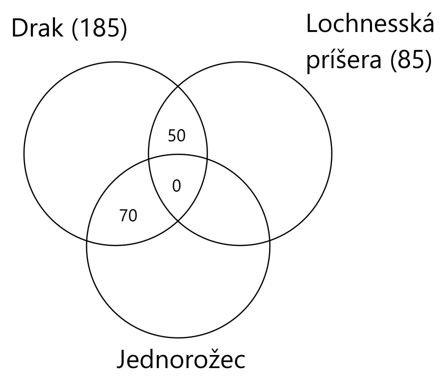
Príklad č. 2 (opravovali Tete, Paľo):

Zadanie: Všetci pracovníci jedného dopravného podniku sa podrobili prieskumu, v ktorom sa zisťovalo, ktorým dopravným prostriedkom (drak, lochnesská príšera, jednorožec) cestujú do práce. Toto sú čiastočné informácie z prieskumu: Drakom cestuje do práce 185, lochnesskou príšerou 85 zamestnancov. Všetky tri dopravné prostriedky nepoužíva nikto a najviac jedným jazdí 207 zamestnancov. Päťdesiat pracovníkov použije pri ceste lochnesskú príšeru a draka, 70 pracovníkov jednorožca a draka a 235 zamestnancov cestuje jednorožcom alebo lochnesskou príšerou. Práve dvoma z uvedených dopravných prostriedkov sa dopravuje 125 zamestnancov.

Určte z týchto informácií, koľko zamestnancov:

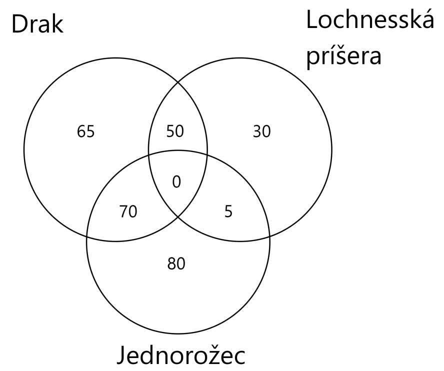
1. nepoužíva žiadny z uvedených dopravných prostriedkov,
2. cestuje iba jednorožcom,
3. cestuje jednorožcom alebo drakom.

Riešenie: Do nasledujúceho Vennoveho diagramu (Obr. 4) si zapíšeme, čo poznáme:



Obr. 4: Vennov diagram pre dopravu

Zo zadania taktiež vieme, že počet zamestnancov jazdiacich práve dvomi dopravnými prostriedkami je 125. To znamená, že počet zamestnancov jazdiach Lochnesskou a jednorožcom je $125 - 70 - 50 = 5$. Počet zamestnancov, ktorí niekde použijú Lochnessku je 85. Z toho vieme, že počet zamestnancov používajúcich iba Lochnessku je $85 - 50 - 5 = 30$. Rovnakou úvahou vieme určiť, koľko zamestnancov jazdí iba drakom. Tých je $185 - 70 - 50 = 65$. Počet zamestnancov, ktorí používajú Lochnessku alebo jednorožca je 235. Toto číslo zahŕňa všetky spôsoby dopravy, keď sa niekedy použije Lochnesska alebo jednorožec. To zahŕňa 6 buniek nášho digramu. Dopočítame počet zamestnancov jazdiacich iba pomocou jednorožca. Tých je $235 - 50 - 30 - 5 - 70 = 80$. Počet zamestnancov, ktorí používajú najviac jeden dopravný prostriedok je 207. Z toho vyplýva, že $207 - 65 - 30 - 80 = 32$ zamestnancov chodí do práce pešo. Teraz ešte dopočítame, koľko zamestnancov používa na ceste do práce jednorožca alebo draka. Tých je $65 + 50 + 70 + 5 + 80 = 270$. Na obrázku 5 je vyplnený Vennov diagram:



Obr. 5: vyplnený Vennov diagram

Odpoveď: Zoznam odpovedí:

1. 32 zamestnancov nepoužíva žiadny z uvedených dopravných prostriedkov.
2. 80 zamestnancov cestuje iba jednorožcom.
3. 270 zamestnancov cestuje jednorožcom alebo drakom.

Komentár: Väčšina z Vás riešiteľov tento príklad zvládla. Body sme prevažne strhávali za numerické chyby, ktoré mali veľký vplyv na výsledky alebo za neporiadné vysvetlenie niektorých hodnôt, ktoré ste získali. Taktiež si treba dávať pozor, kde je napísané „alebo“ a kde „a“.

Príklad č. 3 (opravovali Danka, Gabika Š.):

Zadanie: Všimol si si, ako sa na tvojich hodinách na hviezdny prach zmenil čas z 19 : 28 na 19 : 35. Keď si ich potom sledoval, zistil si, že vždy 7 minút stoja a potom sa na nich čas posunie o 7 minút. Ten istý deň si nevedel zaspať, a tak si si začal zapisovať minúty, ktoré ukazovali tvoje hodiny na hviezdny prach, vždy, keď sa na nich zmenil čas. Presne hodinu po tom, ako si zapísal prvé číslo, si zaspal. O koľkej hodine si zaspal, ak súčet všetkých zapísaných minút bol 264?

Riešenie: Keďže si si ešte len o 19:28 všimol, že ti hodinky skáču vždy o sedem minút, a naša úloha sa týka toho istého dňa, náš časový interval je od 19:28 po 23:59. Keďže hodinky skáču po siedmich minútach a zaspal si presne o 60 minút od prvého zapísaného času, tak počet časov, ktorých súčet je 264, vypočítame ako 60 : 7 = 8 (zvyšok 4) a k tomu ešte pripočítame 1 (prvý zapísaný čas). Teda hľadáme minúty v presne 9 po sebe idúcich časoch.

Najdôležitejším krokom tejto úlohy je uvedomiť si, že ak sa susedné čísla líšia vždy o 7, piate z týchto deviatich čísel bude ich aritmetickým priemerom. Aritmetický priemer čísla 264 vypočítame tak, že ho vydelíme deviatimi. Zistíme však, že nám nevyjde celé číslo a to z dôvodu, že mohlo prísť k presahu cez hodinu. Ak pri sčítaní minút deviatich časov si zapísal jeden čas už v ďalšej hodine, musíme pri hľadaní aritmetického priemeru pripočítať ku 264 ešte 60 minút. $264 + 60 = 324$ čo už je deliteľné 9 bezo zvyšku. $324 : 9 = 36$, teda piate číslo z daných minút musí byť 36. Následným odčítaním a pripočítaním 7 minút dostaneme zvyšné časy, a to: $08, 15, 22, 29, 36, 43, 50, 57, 04$. Toto je prvá možnosť.

Zatiaľ sme uvažovali, že iba jeden z deviatich časov si zapísal v priebehu ďalšej hodiny, teda sme prirátali 60 minút iba raz. Potrebujeme však uvažovať, že takých časov z ďalšej hodiny môže byť viac ako jeden. Ak presiahli dva časy, prirátam ku 264 minútam 2x60 minút. Ak tri, tak 3x60 minút atď. Najviac ich mohlo presiahnuť 8 z 9 časov.

Keďže sme si ale povedali, že číslo, ktoré dostaneme sčítaním 264+60x musí byť deliteľné 9, vyjde nám celé číslo len pri 4 presahoch a pri 7 presahoch.

1. 264+60x
2. 264+120=384:9=X
3. 264+180=444:9=X
4. 264+240=504:9=56 všetky časy: 28,35,42,49,56,03,10,17,24 ako druhá možnosť
5. 264+300=564:9=X
6. 264+360=624:9=X
7. 264+420=684:9=76 (keďže 76 minút nemáme na hodinkách, odrátame 76 - 60=16)
8. 264+480=744:9=X

Všetky časy pre druhú možnosť: $28, 35, 42, 49, 56, 03, 10, 17, 24$

Všetky časy pre tretiu možnosť: $48, 55, 02, 09, 16, 23, 30, 37, 44$

Tieto tri možnosti nám prislúchajú vždy ku konkrétnej hodine, a to presne 19:28 až 20:24, 21:48 až 22:44 a 00:08 až 01:08. Do nášho časového intervalu však spadá len jedna z možností a tou je 21:48 až 22:44.

Odpoveď: Zaspal teda o 22:48.

Komentár: Najviac z vás riešilo tento príklad cez tabuľky a vypísané minúty, no toto je najelegantnejšie riešenie. Pár z vás nepochopilo, že nevedel zaspať ešte v ten istý deň, a preto čas 01:08, ktorý vám vyšiel nevyhovoval zadaniu, keďže patril do ďalšieho dňa. Inak veľmi pekné riešenia, nekomplikujte si to zbytočne.

Príklad č. 4 (opravovali MaťoPaťo, Tánička):

Zadanie: Traja študenti mali každý celočíselný počet eur. Zastali pri stánku so zmrzlinou. Peter mal

najmenej, iba 1 euro. Kúpil si dve porcie a odišiel. Zvyšní dvaja sa rozhodli, že si kúpia najväčší možný počet zmrzlín, na ktorý im stačia peniaze. Tomáš si kúpil 6 porcií a Michal 11 porcií zmrzliny. Keby dali svoje peniaze dokopy, aj tak by im na 18 porcií nestačili. Koľko centov stojí zmrzlina v tomto stánku?
Riešenie: Peťo si za 1 euro kúpil 2 kopčeky, teda jeden kopček stojí maximálne $1 \div 2 = 0,5$ eur.

Tomáš môže mať 2 eurá alebo 3 eurá. Viac ako 3 eurá mať nemôže, pretože by si za to kúpil vždy väčší počet kopčekov ako 6 ($4 \div 0,5 = 8$ - kúpil by si aspoň 8 kopčekov). Zo zadania vieme, že Peťo má najmenej peniažkov, teda Tomáš už nemôže mať 1 euro.

Michal môže mať $3, 4$ alebo 5 eur. Menej ako 3 eurá mať nemôže, pretože kupuje väčší počet kopčekov ako Tomáš a keďže si kupujú toľko kopčekov, koľko môžu, tak musí mať Michal viac eur ako Tomáš. Keby mal 6 eur a viac, tak kúpi vždy väčší počet kopčekov ako 11 ($6 \div 0,5 = 12$ - kúpil by si aspoň 12 kopčekov).

Pozrime sa na možnosť, kedy bude mať Tomáš 3 eurá. Zmrzlina musí v tomto prípade stáť viac ako $3 \div 7 \approx 0,429$ eur, teda aspoň 0,43 eur. Keby stála menej, tak si môže Tomáš kúpiť aj siedmy kopček.

- Michal nemôže mať 3 eurá, lebo obaja kupujú najväčší možný počet kopčekov. S rovnakým počtom peňazí nemôžu mať rozdielny počet kopčekov.
- Michal nemôže mať 4 eurá, lebo v tom prípade by jeden kopček musel stáť maximálne $4 \div 11 \approx 0,36$ eur. To je ale menej ako minimálna cena kopčeka podľa Tomáša.
- Ak má Michal 5 eur, tak jeden kopček stojí maximálne $5 \div 11 \approx 0,45$ eur. Tomášovmu aj Michalovmu ohraničeniu ceny vyhovujú tri možnosti a to 0,43, 0,44 a 0,45 eur. Teraz teda skúsime zistiť, či si môžu aj pri zlúčení ich peňazí kúpiť najviac 17 kopčekov. Pozrieme sa na to, koľko pri jednotlivých možnostiach chlapcom zostalo po ich nákupoch.

	eur	**počet zmrzlín**	**zvyšok, kopček za 0,43 eur**	**zvyšok, kopček za 0,44 eur**	**zvyšok, kopček za 0,45 eur**
Tomáš	3	6	0,42	0,36	0,30
Michal	5	11	0,27	0,16	0,05
spolu	8	17	0,69 $>$ 0,43	0,52 $>$ 0,44	0,35 $<$ 0,45

Tabuľka 1: Ceny jedného kopčeku

Z tabuľky 1 vidíme, že jediným riešením v tabuľke je cena 0,45 eur za jeden kopček. Pre ostatné ceny jedného kopčeku platí, že ak by spojili svoje financie, tak by si mohli kúpiť 18 kopčekov. Teda ak má Tomáš 3 eurá a Michal 5 eur, tak kopček zmrzliny môže stáť jedine 0,45 eur.

Teraz sa pozrime ešte na možnosť, že by mal Tomáš 2 eurá.

- Michal nemôže mať 3 eurá, lebo pri cene 2 eurá za 6 kopčekov by 1 kopček musel stáť viac ako $2 \div 7 \approx 0,286$ eur a zároveň najviac $2 \div 6 \approx 0,33$ eur. Aby si mohol Michal kúpiť 11 kopčekov, tak musí platiť, že zmrzlina stojí najviac $3 \div 11 \approx 0,27$ eur. Neexistuje teda taká cena zmrzliny, ktorá by vyhovovala obom pre tieto sumy eur.
- Michal nemôže mať 4 eurá, lebo by mal dvojnásobok peňazí ako Tomáš a teda by si mohol kúpiť aj dvojnásobný počet kopčekov, teda 12.
- Väčšie sumy eur pre Michala už nemusíme skúšať, pretože by si určite vedel kúpiť ešte viac kopčekov, ako 12.

Odpoveď: Kopček zmrzliny stojí 0,45 eur.
Pozn.: symbol $\approx$ znamená približne rovné.
Komentár: Musíme uznať, že ste šikovní a príklad ste riešili zdarne. Jediné, čo by som vám opäť raz pripomenul je, že ak náhodou skúšate všetky možnosti, tak nezabudnite vyskúšať naozaj všetky, alebo povedať, prečo už zvyšné nemusíte.

Príklad č. 5 (opravoval Jumaj):

Zadanie: Naša postupnosť má dokopy 101 členov. Označme si ich $a_1, a_2, \cdots a_{101}$. Jednotlivým členom sú priradené čísla $2, 3, 4, \ldots, 102$. Pozorné oko si všimlo, že vždy platí, že číslo, priradené členu a_k je deliteľné číslom k bezo zvyšku. Naozaj, pre každé jedno k, od 1 až po 101. Vieš takú postupnosť zostaviť aj ty? Vravíš, že to je jednoduché? Tak urči všetky takéto postupnosti!

Riešenie: Zo zadania plynie, že k delí a_k. Preto musí platiť, že $k \leq a_k$. Keďže to platí pre každé k, musí to platiť aj pre $k = 101$. Čísla väčšie rovné 101 máme k dispozícií len 101 a 102. Keďže 101 nedelí 102, musí platiť $a_{101} = 101$.

Následne pre $k = 100$ máme znova dve možnosti - 100 a 102, z ktorých pasuje znova iba číslo 100. Takto môžme ísť postupne zhora dole až po prvého deliteľa 102, ktorým bude 51. Keďže 51 delí 102, tu už pasujú obidve možnosti, ktoré spĺňajú našu nerovnosť, 51 aj 102.

Nasleduje 50. Všimnime si, že tu už z našej originálnej skupiny čísel pasujú síce dve - 50 i 100, no 100 sme museli minúť predtým. Bez ohľadu na to, čo bude a_{51}, 50 bude deliť iba jedno z dvoch čísel spĺňajúcich nerovnosť a tým je 50. Takto budeme ďalej pokračovať až po ďalšieho deliteľa 102, vždy budeme mať len jednu správnu možnosť. To je mi ale jednoduché rozhodovanie!

Rozhodnúť sa môžeme vždy len na deliteľoch 102. Aj keby sme 102 použili na nejaké v yššie číslo, mohli sme ho určite použiť len na mieste jeho deliteľa. Keby sme to urobili, číslo, ktoré by nám potom zostalo nazvyš, je deliteľ 102, teda by sa určite dalo použiť iba na miestach deliteľov 102.

Pre všetky čísla, ktoré nedelia 102 máme teda iba jednu správnu možnosť, musíme použiť číslo rovnaké ako poradie, inak povedané $a_k = k$.

Tie sme teda odbavili, zostáva len zrátať možnosti obmien pre delitele 102. Spravme si najprv tabuľku (tabuľka 2), v ktorej bude ku každému k priradené možné a_k.

k	a_k
51	102, 51
34	102, 34
17	102, 51, 17
6	102, 6, 3, 2
3	102, 3
2	102, 2
1	všetky čísla

Tabuľka 2: Tabuľka s možnosťami

102 pasuje do všetkých možností, tak sa poďme pozrieť, čo to vydá keď ho skúsime do nich napasovať.

- $a_1 = 102$ Teraz môžeme ísť pre zmenu zdola hore, všetky prvočísla prvočíselného rozkladu 102: $17, 3$ aj 2 mohli predtým byť na prvej pozícii alebo na sebe samom. Teraz už môžu byť len na sebe samom. Vďaka tomu aj všetky čísla zložené z týchto prvočísel (alias všetky delitele 102) už môžu byť len na sebe samom. Teda tu máme len jednu možnosť usporiadania.
- $a_2 = 102$ Chuderku dvojku sme vyhnali z domu, teraz má možnosť usadiť sa len na prvom člene, $a_1 = 2$. Ďalej sa veci budú vyvýjať rovnako ako minule. Jednotka je zabratá, zvyšným prvočíslam teda zostáva len si sadnúť na zadok. Keď to urobia, zložené čísla ich budú poslušne nasledovať a pre nás to znamená že máme zase len jednu možnosť usporiadania. Rovnaké príbeh nastane aj pre ostatné prvočísla (17 a 3).
- $a_6 = 102$ Šestka je zložené číslo a keď do jej bytu nasťahujeme 102, nie je na tom až tak zle. Môže totiž okrem jednotky ísť aj na 2 alebo 3. Ak sa rozhodne pre 1, zvyšok už poznáte. Keď pôjde 2 alebo 3, tie už nebudú mať na výber a pôjdu k 1 a všetko zase pôjde vyjazdenými koľajmi.

Teda pre 6 máme tri možnosti, lebo je zložená z dvoch prvočísel. Takéto čísla tu máme ešte ďalšie dve-34 a 51, ktoré nám dajú každá po troch ďalších. Číslo zložené z viac ako dvoch prvočísel už (okrem 102 samotnej) nemáme, teda sme prešli všetky možnosti.

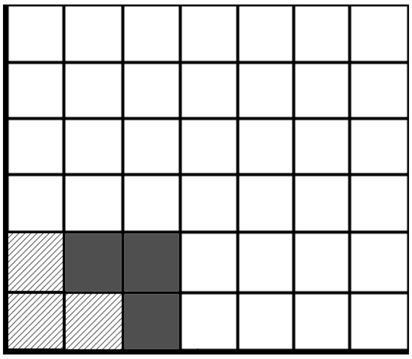
Odpoveď: Na usporiadane čísel do postupnosti máme celkovo $1 + 3 \cdot 1 + 3 \cdot 3 = 13$ možností.

Komentár: Čo si budeme navrávať, tento príklad celkovo dopadol fakt zle. Veľa z vás poriadne neodôvodnilo, prečo musí väčšina členov byť na mieste rovnom sebe samému. Niektorí, keď vypísali deliteľov 102, nijak neokomentovali, prečo nie je viac riešení. Dôkaz by mal byť napísaný tak, že z neho vidno, prečo je hociaký rozumný protiargument na váš postup zle. Tiež je vždy dobré písať zdôvodnenia celými vetami, keď niečo človek prerozpráva slovne, lepšie v tom vidí hociaké chyby (a tiež tomu opravovateľ lepšie rozumie :)). Nezúfajte však, písanie dôkazov je tá najťažšia časť riešenia, preto každý bod, ktorý za to získate je úspech.

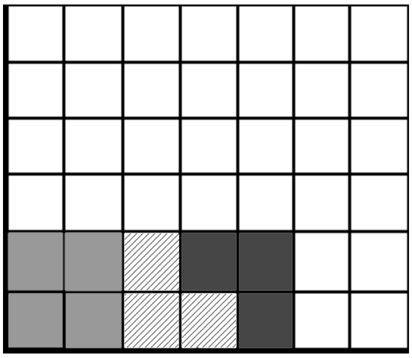
Príklad č. 6 (opravovali Marka, Ondro):

Zadanie: Majme mriežku 100×100. Prvý hráč má dieliky v tvare štvorca 2×2, druhý hráč má L-ká zložené z 3 štvorčekov mriežky. Striedajú sa v umiestnovaní dielikov na plánik, pričom začína prvý a dieliky sa nemôžu prekrývať, ani vytŕčať z mriežky. Hráč, ktorý už nemôže umiestniť dielik, prehráva. Ktorý hráč má vyhrávajúcu stratégiu a aká je?

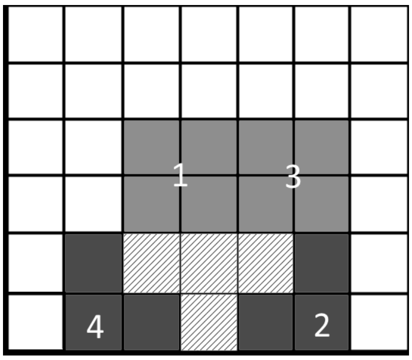
Riešenie: Ako prvé sa pozrieme, kam môžeme položiť jednotlivé dieliky. Hráč č.1 ich môže položiť len na miesta 2×2. Hráč č.2 ich môže položiť tam, kam hráč č.1, no zároveň ich môže položiť aj na také miesta, kam hráč č.1 svoje dieliky nie. Z tohoto nám vyplýva, že hráčovi č.2 ide o vytvorenie takého územia, ktoré môže využiť, keď sa minú všetky miesta 2×2. Takýchto miest si vie hráč č.2 vytvoriť niekoľko, ba dokonca na viacerých miestach. Hráč č.1 mu v tom nevie nijako zabrániť umiestnením svojho dielika. Možné spôsoby vytvorenia záložného miesta sú znázornené na obrázkoch 6,7 a 8 (vytvorené miesto je šrafované).



Obr. 6: miesto v rohu



Obr. 7: miesto v rohu so štvorcom



Obr. 8: vytvorenie miesta uprostred

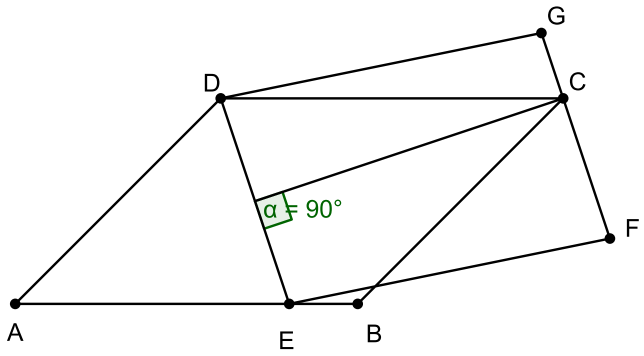
Výhernú stratégiu má hráč č.2. Vytvorí si miesto kam môže položiť dielik iba on, ktoré využije na konci hry, keď na ploche už nebude žiadne miesto 2×2.

Komentár: Túto úlohu ste skoro všetci dali na 10 bodov. Všetci ste sa zhodli na tom, že hráč č.2 má víťaznú stratégiu, ale už nie všetci na tom akú. Najčastejšou stratégiou bolo, že ste si vytvárali: bunker, skrýšu, rezervu, priestor a iné :). Mimochodom, vždy si poriadne prečítajte zadanie, niektorí ste počítali s L-kami zo 4 dielikov.

Príklad č. 7 (opravovali Tomáš, Sára):

Zadanie: Majme rovnobežník $ABCD$, ktorý má obsah $20cm^2$. Na úsečke AB zvolíme bod E a skonštruujeme rovnobežník $EFGD$ tak aby bod C ležal na úsečke GF. Aký má obsah rovnobežník $EFGD$?

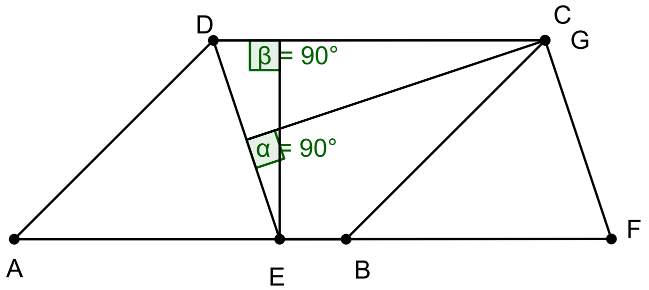
Riešenie: Na úsečke AB si ľubovolne zvolíme bod E, ktorý spojíme s bodom D. Keďže výsledný útvar je rovnobežník, môžeme narysovať rovnobežku s úsečkou ED cez bod C a nazvať ju p. Na tejto rovnobežke



Obr. 9: Rovnobežník nad DE

budú ležať body F a G. Obsah rovnobežníka sa počíta ako $s \cdot v$ kde s je strana a v je výška na ňu. Jednu stranu rovnobežníka $EFGD$ už máme - je ňou ED (viď. 9).

Výška je kolmá vzdialenosť medzi ED a rovnobežkou p. Všimnime si, že nezáleží na tom, kde budú na priamke p ležať body F a G (ich vzájomná vzdialenosť je ale už daná tým, že je to rovnobežník), obsah sa už meniť nebude. Preto (bez ujmy na všeobecnosti) si môžeme povedať, že $G = C$. Ide o rovnobežník, preto $ED = FG$, takže ak $G = C$, tak F bude ležať na priamke AB (viď. 10).



Obr. 10: Rovnobežník s $G = C$

Teraz majú $ABCD$ a $EFGD$ spoločnú stranu CD a výšku na túto stranu. Ich obsah je teda rovnaký.
Odpoveď: Obsah rovnobežníka $EFGD = 20cm^2$.
Komentár: Väčšina z vás mala tento príklad správne. Len ojedinele sa stávalo, že by bolo niečo nedostatočne dovysvetlené.

Príklad č. 8 (opravovali Zajo, Timka):

Zadanie: Majme kosoštvorec $ABCD$. Označme S priesečník uhlopriečok, T_1 ťažisko trojuholníka $\triangle ASD$ a T_2 ťažisko trojuholníka $\triangle SCD$. Akú časť obsahu z celého kosoštvorca zaberá obsah trojuholníka $\triangle T_1T_2B$?
Riešenie: Ako prvé si označme stredy strán AD a DC ako E a F. Keď sa teraz pozrieme na $\triangle ADC$ tak si môžeme všimnúť, že úsečky EF, ES a FS sú stredné priečky tohto trojuholníka. $\triangle ADC$ je rovnoramenný, keďže AD a DC sú strany kosoštvorca - teda trojuholník tvorený zo stredných priečok je tiež rovnoramenný. Zároveň sú úsečky ES a FS ťažnice v $\triangle ADS$ a $\triangle DSC$. Teda ich ťažiská ležia na tých dvoch úsečkách.

Keďže ťažisko ľubovoľného trojuholníka leží v dvoch tretinách dĺžky ťažnice od vrcholu, ST_1 a ST_2 majú dĺžky rovné dvom tretinám ES a FS. $\triangle ST_1T_2$ má teda dve strany v rovnakom pomere ako $\triangle SEF$. Keďže aj uhol pri bode S majú spoločný, trojuholníky sú si podobné. Koeficient ich podobnosti je pomer dĺžok ich strán, teda $\frac{2}{3}$. To znamená, že ich obsahy sú v pomere $\frac{4}{9}$.

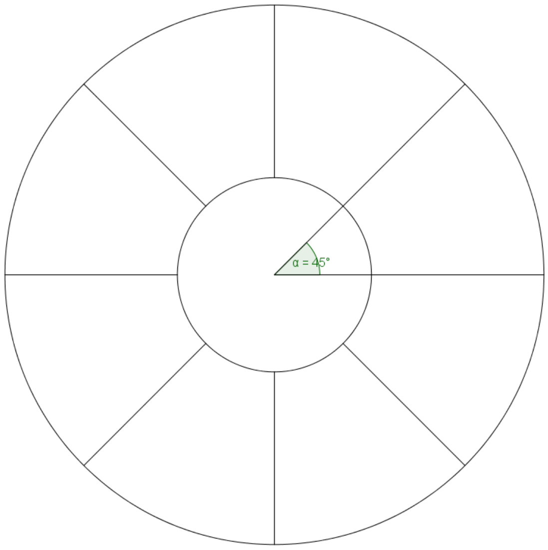
$\triangle SEF$ je $\frac{1}{4}$ z $\triangle ADC$ (stredné priečky delia trojuholník na 4 zhodné trojuholníky). $\triangle ADC$ je polovica z kosoštvorca $ABCD$ (uhlopriečky delia kosoštvorec na 2 zhodné trojuholníky). Pomer obsahu kosoštvorca $ABCD$ k $\triangle ST_1T_2$ je potom $\frac{1}{2} \times \frac{1}{4} \times \frac{4}{9} = \frac{1}{18}$.

$\triangle ST_1T_2$ a $\triangle BT_1T_2$ majú rovnakú základňu, teda pomer ich výšok je zároveň pomerom ich obsahov. Poďme ho teda zistiť! Vieme, že uhlopriečky v kosoštvorci sa rozpoľujú, teda $|DS| = |BS|$. Vieme, že výška

trojuholníka ST_1T_2 je $\frac{2}{3}$ z výšky $\triangle SEF$. Keďže $\triangle DEF$ a $\triangle SEF$ sú zhodné, ich výšky na stranu EF musia byť rovnaké. Potom je výška každého z nich je $\frac{1}{2}$ z $|DS|$. A to už máme jednu z našich hľadaných výšok, výška na T_1T_2 v $\triangle ST_1T_2$ je $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}|DS| = \frac{1}{3}|DS|$. Výška v $\triangle BT_1T_2$ je $\triangle|DS| + \frac{1}{3}|DS|$, teda $\frac{4}{3}|DS|$, štyrikrát viac než v $\triangle ST_1T_2$. Obsah $\triangle BT_1T_2$ sú $4 \cdot \frac{1}{18} = \frac{2}{9}$.
Odpoveď: Obsah $\triangle T_1T_2B$ zaberá $\frac{2}{9}$ obsahu celého kosoštvorca.

Príklad č. 9 (opravovali Lámač, Kubo):

Zadanie: V strede parku je kvetinový záhon v tvare kruhu s priemerom 5. Vovnútri je zasadených 10 kvetiniek. Kamarát sa zamyslí a hovorí: "Stavím sa, že existujú také dve kvetinky, že ich vzdialenosť je menšia ako 2". Na chvíľku sa zapozeráš na kvetinky, zamyslíš sa a dáš mu za pravdu. Musí mať tvoj kamarát pravdu pri ľubovoľnom rozmiestnení kvetiniek, alebo existuje také rozmiestnenie, kedy to pravda nebude?
Riešenie: Na začiatok si záhradu rozdelíme na 9 častí tak, že okolo stredu E dáme kruh s polomerom $0,9$ a zvyšok medzikružia rozdelíme na 8 rovnakých častí ako na obrázku 11.



Obr. 11: Rozdelenie záhrady

V našom riešení teraz dokážeme, že ak by v niektorej z 9 vyznačených častí ležali dva body, tak by boli k sebe bližšie ako 2. Máme však 10 bodov a 9 častí, takže v niektorej z nich budú ležať dva body, preto bude výrok zo zadania vždy pravdivý.

Ak hocikde do kruhu s polomerom $0,9$ umiestnime bod, tak nikde do neho už nemôžeme dať ďalší bod. Je to tak, pretože najdlhšia úsečka (najväčšia vzdialenosť bodov v tejto časti) v kruhu je priemer, ktorý je $1,8$. Pri zvyšných ôsmich častiach chceme podobne ukázať, že najväčšia vzdialenosť, ktorú v nich vieme zostrojiť je menšia ako 2.

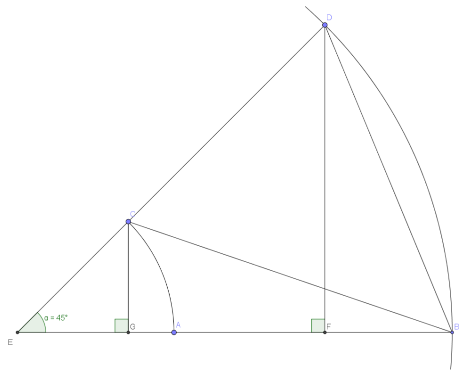
Keďže sme medzikružie rozdelili na 8 rovnakých častí, každá časť zviera so stredom uhol $360°/8 = 45°$. Teraz si rozoberieme jednu časť. Dĺžka $|EA| = |EC| = 0,9$, lebo ležia na obvode kružnice s polomerom $0,9$. Kedže $|ED| = 2,5 = |EB|$, pretože D aj B sú na obvode záhrady, $|CD| = |AB| = 1,6$. Časť medzikružia $ABCD$, načrtnutá na obrázku 12, má najdlhšiu úsečku buď $|BC| = |AD|$ alebo $|BD|$, lebo každú úsečku, ktorá je vnútri časti medzikružia $ABCD$ môžem predĺžiť tak, aby sa s ním pretínala. Teda sa zaujímame iba o úsečky mezdi obvodovými bodmi. Oblúk CA si môžem zameniť za úsečku CA, lebo tým len každú úsečku, ktorá mala jeden bod na oblúku CA predĺžim na základe rovnakého argumentu, ako pri bodoch vnútri útvaru. Nový útvar $ABDC$ je konvexný, pretože $ABDC$ je lichobežník ($|AB| = |CD|$, $|EC| = |EA|$, D, C, E sú na priamke rovnako ako B, A, E) a úsek tvorený oblúkom medzi BD je časťou kružnice, ktorá je konvexná.

Z toho, že $ABDC$ je lichobežník vyplýva, že najdlhšia úsečka je buď BC, AD alebo dlhšia základňa, teda BD. BD môžeme zrátať napríklad pomocou toho, že výška trojuholníka BED z D má dĺžku $\sqrt{\frac{25}{8}}$, pätu výšky z D na EB označíme F, pätu výšky z C na EB označíme G. ($|DE| = 2,5$, trojuholník EDF je rovnoramenný pravouhlý). Ďalej vieme, že trojuholník BDF je pravouhlý s dĺžkami strán $\sqrt{\frac{25}{8}}$ a $2,5 - \sqrt{\frac{25}{8}}$, pričom BD je jeho prepona. $|BD| = \sqrt{12,5 - 5 \cdot \sqrt{\frac{25}{8}}}$, čo je asi $1,91$, teda menej ako 2.

Dĺžku $|CB|$ vieme vyjadriť z trojuholníka CGB, keďže $|BG| = |EB| - |EG|$, pričom $|EG| = |CG|$, keďže ECG je rovnoranenný pravouhlý trojuholník. Jediné, čo chýba je $|CG|$, ktoré z trojuholníka ECG vieme vyrátať cez pytagorovu vetu ako $\sqrt{\frac{0.9^2}{2}}$. Po dosadení máme $|BD| = \sqrt{(2,5 - \sqrt{\frac{0.9^2}{2}})^2 + \frac{0.9^2}{2}}$, čo je približne $1,97$, čo je viac ako $|BD|$.

Posledné čo treba dokázať je, že žiadna úsečka s oblúkom BD nebude dlhšia ako $|BC|$. Toto vieme ukázať tak, že v B si spravíme kružnicu s polomerom $|BD|$. Táto kružnica obsahuje vo svojom vnútri každý bod na oblúku BD, teda $|BD|$ ako priemer je dlhší ako všetky také úsečky, ktoré majú jeden vrchol B alebo D. Ak mám jeden vrchol na oblúku BD a druhý na CD, AB, tak môžem pristupovať úplne rovnakým spôsobom k úsečkám AD, CB ako v predošlom prípade a ak spájam oblúk BD s AC, tak je to triviálny prípad, lebo stačí použiť rovnaký argument ako pri spájaní CB s oblúkom BD, lebo CA je vo vnútri kružnice so stredom C a polomerom $|CB|$ rovnako ako oblúk BD.

Týmto sme úspešne dokázali, že v žiadnej časti nie je úsečka dlhšia ako 2. Z toho môžeme dať do každej časti najviac jeden bod, častí je 9, bodov 10, z dirichletovho princípu budú v jednej časti dva body, čiže budú bližšie ako 2.



Obr. 12: Náčrt situácie

Odpoveď: Kamarát má pravdu pri každom rozostavení kvetiniek.
Komentár: Celkovo sme dostali len 17 riešení, udelili sme zaň 41 bodov. Bodový preiemer príkladu bol zhruba 2.41 bodov. To svedčí o tom, že vám príklad veľmi nesadol. Nájdením jednej konkrétnej situácie a vyriešením nej, nedokážeme príklad pre ľubovoľnú situáciu. Mnohí z vás si taktiež mýlili polomer s priemerom.

Prémia (opravovali Tomáš, Sára):

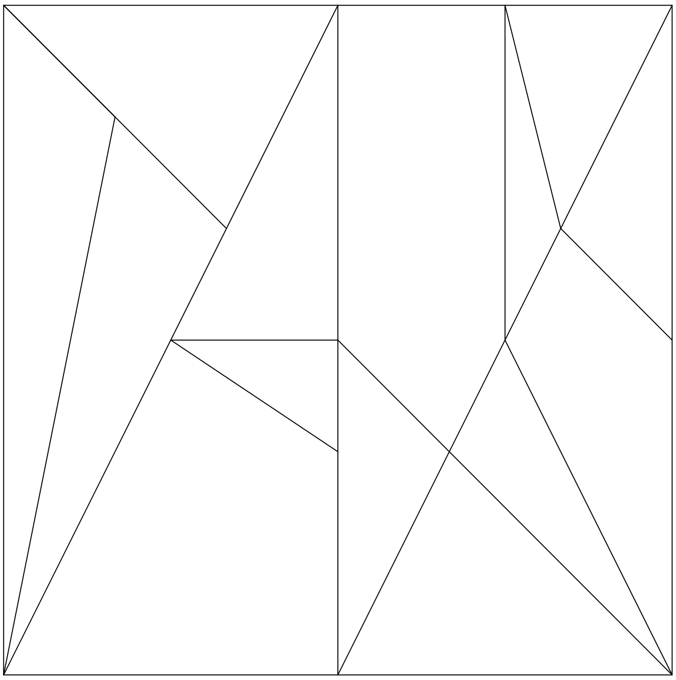
Zadanie: Čokoláda mala štvorcový tvar bola veľká 12×12 dielikov. Dostali ste ju však už rozbitú na 14 kúskov, vyznačených na obrázku **??**. Než ju však začnete jesť, radi by ste ju dostali do stavu, kedy bude najlepšie chutiť. To ako dobre chutí čokoláda sa dá vyrátať podľa toho, akú má "rozbitosť". Čím menšia rozbiťosť, tým lepšie chutí.

Rozbitosť čokolády spočítame tak, že sa pozrieme na miesta na nej, vrátane tých na okraji, z ktorých vychádzajú aspoň tri čiary. Za každé takéto miesto pripočítame k rozbitosti druhú mocninu počtu z neho vychádzajúcich čiar. Teda za každé miesto, z ktorého vychádzajú tri čiary stúpne rozbitosť o 9, z ktorého vychádzajú štyri o 16 atď. Napr. rozmiestnenie dielikov na obrázku má rozbitosť:

$$6 \cdot (3^2) + 7 \cdot (4^2) + 2 \cdot (5^2) = 216$$

Vašou úlohou je nájsť také preusporiadanie dielikov čokolády, že sa nebudú prekrývať a dokopy vyplnia celý štvorec 12×12 také, že rozbiťosť usporiadania dielikov bude čo najmenšia. (Dieliky je možné otáčať aj zrkadlovo prevracať)

Riešenie: Zadaniu ste pochopili takmer všetci, niektorým sa podarilo zabudnúť prirátať okraje, iným sa podarilo zmeniť tvar kúskov čokolády a niektorým sa podarilo spojiť dva kúsky do jedného. Väčšina riešení sa pohybovala pri hodnote rozbitosti 216 a vyššie. Najlepšie riešenie, a taktiež jediné, ktoré ste našli má rozbitosť 214 a tu je (Obr. 13).



Obr. 13: Najlepšie riešenie

Odpoveď: Najmenšia hodnota rozbitosti je 214.
Bodovanie: Každý kto mal rozbitosť vyššiu ako 216 dostal 0 bodov, pretože 216 bola hodnota rozbitosti v zadaní. Každý kto mal rozbitosť rovnú 216 dostal 1 bod. A jediný Maťko Haverlík, ktorému sa podarilo znížiť rozbitosť na 214 dostal 8 bodov.