Vzorové riešenia 2. kola zimnej série 2016/2017

Príklad č. 1 (opravovali Jumaj, Kornelka):

Zadanie: Spolužiaci nosili zajkovi ovocie naozaj radi a striedali sa v tom. Naposledy to boli Ignác, Viki, Janka a Miška. Ignác má v taške dve jablká a hrušku. Viki má dva pomaranče a hrušku. Janka má dve hrušky a jablko. Z tašiek týchto troch detí je Jankina najťažšia a Ignácova najľahšia. Miška má v taške jablko, pomaranč a hrušku. Porovnajte hmotnosť jej tašky s taškami ostatných deti, keď viete, že každé dve jablká vážia rovnako, každé dve hrušky vážia rovnako a aj každé dva pomaranče vážia rovnako.

Riešenie: Označenie: J – jablko, H – hruška, P – pomaranč.

1. Typ riešenia:

Ako prvý krok si skúsime zoradiť jednotlivé druhy ovocia od najľahšieho po najťažšie:

Vieme vyjadriť vzťah, že hruška je ťažšia ako jablko pomocou Jankinej $(2H, 1J)$ a Ignácovej tašky $(2J, 1H)$. Dva kusy ovocia v ich taškách sú totožné (JaH) a závisí teda len na tom treťom, ktorá taška je ťažšia. Keďže zo zadania vieme, že Jankina je ťažšia ako Ignácova, vieme s istotou povedať, že $H > J$.

Vzťah pomaranča a jablka vieme určiť z porovnania Ignácovej $(2J, 1H)$ a Vikinej $(2P, 1H)$ tašky. Obsah ich tašiek sa líši práve dvomi J v Ignácovej taške a dvomi P vo Vikinej. A keďže zo zadania vieme, že Ignácova taška je ľahšia ako Vikina, vieme, že dve J sú ľahšie ako dva P a teda $J < P$. Vzťah hrušky a pomaranča vieme vyjadriť, keď si vezmeme Jankinu $(2H, 1J)$ a Vikinu tašku $(2P, 1H)$. Už vieme, že $J < P$, preto ak by sme nahradili jablko v Jankinej taške pomarančom, bola by ešte ťažšia. Vtedy by sa líšili práve o jednu H v Jankinej taške a jeden P vo Vikinej, vieme povedať, že $H > P$.

Dostali sme teda takéto usporiadanie ovocia podľa hmotnosti: $J < P < H$. Podľa neho teraz môžeme porovnať Miškinu tašku s taškami ostatných detí.

Miškina je ťažšia ako Ignácova, pretože $P > J$. Miškina je ľahšia ako Vikina, pretože $J < P$. Miškina je ťažšia ako Jankina, pretože $P < H$.

2. Typ riešenia:

Zo zadania si môžeme napísať takéto nerovnice: Janka $(2H, 1J) >$ Viki $(2P, 1H) >$ Ignác $(2J, 1H)$ Každá zo štyroch tašiek detí obsahuje aspoň jednu H, ktorú môžeme teda každému odobrať.

Zostane nám: Janka (1H, 1J) > Viki (2P) > Ignác (2J). Miškina taška obsahuje po odobratí jednej hrušky jeden P a jedno J, tak ju teda môžeme zaradiť medzi Viki a Ignáca.

Odpoveď: Janka $(2H, 1J) >$ Viki $(2P, 1H) >$ Miška (1J, 1P, 1H) > Ignác (2J, 1H). Miškina taška je ťažšia ako Ignácova, ale ľahšia ako Vikina a Jankina.

Komentár: Napriek neveľkému počtu riešení, dospela väčšina z vás k správnemu alebo čiastočnému výsledku. Takmer všetci riešili príklad prvým postupom, no rovnako pekné a prehľadné riešenia mali aj tí z vás, ktorí ste zvolili druhý spôsob. Najväčšie chyby boli neúplné riešenie (neuvedenie kompletného postupu, ako ste dospeli k nejakému vzťahu alebo výpočtu), nesprávne prečítané informácie zo zadania, alebo že ste neuviedli v odpovedi to, čo sa od vás požadovalo v zadaní. Ak sa týmto chybám pokúsite vyvarovať, vaše budúce riešenia budú určite o to lepšie :)

Príklad č. 2 (opravovali Tete, Veronika):

Zadanie: Máme číslo $\overline{ABBCD}$ (čiara nad číslom znamená, že písmená predstavujú jeho cifry). Keď navzájom vynásobíme jeho cifry, dostaneme $\overline{BAC}$. Keď tomuto novému číslu navzájom vynásobíme cifry, dostaneme $\overline{AC}$. Nakoniec vynásobením cifier A a C dostaneme len C. Aké číslo je v skutočnosti $\overline{ABBCD}$?

Riešenie: Ako prvé sa zameriame na poslednú rovnosť a teda to, že vynásobením cifier A a C dostaneme C. To môže nastať jedine vtedy, keď $A = 1$ alebo $C = 0$. Ak by platilo $C = 0$, súčin $A \cdot B \cdot B \cdot C \cdot D$ by sa taktiež rovnal 0 a my zo zadania vieme, že tento súčin má byť trojciferné číslo $\overline{BAC}$. Preto zostáva len možnosť $A = 1$.

Zameriame sa na rovnosť $B \cdot A \cdot C = \overline{AC}$. Vieme, že $A = 1$ a teda túto informáciu môžme vložiť do rovnosti - $B \cdot 1 \cdot C \cdot = \overline{1C}$. C teda môže byť $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$, keďže 0 sme už vylúčili. Ďalej môžme vylúčiť aj $1, 3, 7, 9$, pretože ak by sme za C do sadili tieto čísla na mieste výsledku by sa nám ocitlo prvočíslo. Keďže prvočíslo je číslo deliteľné len jednotkou a samým sebou, nedokážeme dostať také hodnoty B a C, v ktorých by boli obe čísla jednociferné.

Hľadáme teda také C, pre ktoré platí $\overline{1C} = B \cdot C$. Môžme tak spraviť aj skúšaním možností, keďže sme ich zúžili len na čísla $2, 4, 5, 6, 8$. Ak za C dosadíme postupne $C = 4, 6$ a $C = 8$, B nám vychádza $3, 5; 2, 6$ a $2, 25$, čo nie sú celé čísla, takže tieto možnosti nie sú správne. Zostali nám teda len 2 možnosti: $C = 2$ a $B = 6$, $C = 5$ a $B = 6$.

Začneme s prvou. Opätovne si dokážeme zistené cifry dosadiť do rovnice $A \cdot B \cdot B \cdot C \cdot D = \overline{BAC}$. Dostaneme $1 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 2 \cdot D = 612$. Z rovnice by sa nám D malo rovnať $8, 5$. To však nie je cifra a preto táto možnosť nie je správna.

Dosadíme cifry z druhej možnosti do rovnice $A \cdot B \cdot B \cdot C \cdot D = \overline{BAC}$. Dostaneme $1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot D = 315$. V tomto prípade sa D rovná 7. Máme teda správnu možnosť. Ďaľšie riešenia neexistujú, keďže sme prechádzali všetky možnosti a v častiach skúšania sme vylúčili tie, ktoré nespĺňali podmienky zadania.

Odpoveď: Číslo $\overline{ABBCD}$ je v skutočnosti 13357.

Komentár: V príklade ste mali všetci správnu odpoveď, čo nás veľmi potešilo. Bodíky sme strhli len v prípade, že ste nám nenapísali prečo môže byť C len 2 a 5, alebo ste nezvážili možnosť, že v rovnosti $A \cdot C = C$ sa môže C rovnať nule. Inak ste ho zvládli veľmi dobre.

Príklad č. 3 (opravovali Dada, Kaja):

Zadanie: Majme 8 prirodzených čísel, ktorých súčet je 20. Ukážte, že určite vieme z týchto 8 čísel vybrať nejakú skupinu čísel, ktorá má súčet 4.

Riešenie: Zadanie nám hovorí, že vraj v každej skupinke 8 čísel, ktorých súčet je 20, je aj nejaká podskupinka ktorá má súčet 4. A vraj to tak bude vždy. Tak čo myslíte, je to pravda? A ako by ste sa vedeli hádať s niekým kto to tvrdí? Najlepšie by sa vám proti nemu argumentovalo, ak by ste našli takú skupinu ôsmich čísel, v ktorej neexistuje žiadna podskupinka so súčtom 4. Poďme to skúsiť spraviť. Pri riešení budeme postupovať nasledovne: budeme sa snažiť nájsť 8 prirodzených čísel, ktorých súčet je 20 a zároveň z nich nevieme vybrať skupinu čísel, ktorej súčet je 4. Ak zistíme, že takúto osmicu nevieme zostaviť, ukážeme tým vlastne, že proti pôvodnému tvrdeniu nijakovsky argumentovať nevieme a preto platí, že pre každú skupinu 8 prirodzených čísel, ktorých súčet je 20 vieme vybrať podskupinku so súčtom 4.

Najprv si uvedomíme, aké skupiny čísel dávajú súčet 4, aby sme sa im mohli pri skladaní našej osmice vyhnúť. Sú to nasledujúce skupinky:

1. $1, 1, 1, 1$
2. $1, 1, 2$
3. $1, 3$
4. $2, 2$
5. 4

Vidíme, že 4ku nemôžeme používať vôbec a tak nám zostávajú čísla $1, 2, 3, 5, 6, 7, 8, \ldots$ Teraz sa pýtame, mohli by sme našu osmicu zostaviť bez použitia 1ky? Odpoveď je nie nemohli, pretože v tom prípade by nastala situácia, kedy by sme nemohli používať jednotky, mohli použiť maximálne jednu dvojku (aby sme sa vyhli situácii D) a inak mohli využívať len väčšie čísla. V takomto prípade by zrejme bola osmica s najmenším súčtom nasledujúca: $2, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3$ ktorej súčet je ale 23, čo je moc veľa (a pri každej inej kombinácií by to bolo ešte viac). Teda dostávame, že jednotky potrebujeme. Tým pádom však nemôžeme používať 3ku (aby sme sa vyhli situácii C). Zostávajú nám tak nasledujúce čísla $1, 2, 5, 6, 7, 8, \ldots$ Vieme, že 1ku musíme použiť minimálne jeden krát a môžeme použiť maximálne 3 krát (aby sme sa vyhli situácii A), dvojku maximálne 1 krát (aby sme sa vyhli situácii D) a zároveň nemôžeme použiť skupinku $1, 1, 2$. Teda možnosti ktoré dostávame, čo sa využitia jednotky a dvojky týka sú:

1. 1,2
2. 1,1,1
3. 1,1
4. 1

Každú z týchto možností potrebujeme doplniť nejakými ďalšími prirodzenými číslami do našej osmice. Najmenšie číslo, ktoré môžeme pri tomto dopĺňaní použiť, je 5ka a teda osmice s najmenším možným súčtom dostaneme po doplnené 5kami. Dostaneme tak nasledujúce súčty:

1. $1, 2, 5, 5, 5, 5, 5, 5$ súčet $= 33$
2. $1, 1, 1, 5, 5, 5, 5, 5$ súčet $= 28$
3. $1, 1, 5, 5, 5, 5, 5, 5$ súčet $= 32$
4. $1, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5$ súčet $= 36$

Vidíme, že všetky súčty, ktoré sme dostali, sú ďaleko väčšie ako nami požadovaná 20ka. Zároveň však vieme, že sme otestovali všetky možnosti a teda dostávame, že nevieme vytvoriť osmicu prirodzených čísel ktorej súčet je 20 a neexistuje v nej podskupina so súčtom 4.

Odpoveď: Ukázali sme, že ak máme 8 prirodzených čísel, ktorých súčet je 20, vždy vieme z tejto osmice vybrať skupinu čísel so súčtom 4.

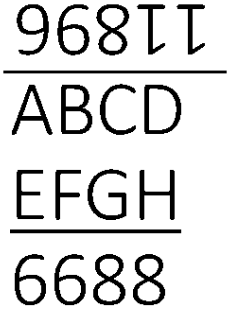
Komentár: Viacero z vás nebralo samotné číslo 4 ako skupinku čísel so súčtom 4. Pritom, ale ide o úplne legitímnu jednočlennú skupinku s daným súčtom. Dôkaz však vyzeral takmer rovnako v oboch prípadoch a teda sme za túto chybu body nestrhávali. Nabudúce si však dajte pozor a keď si nie ste istí radšej sa spýtajte :). Väčšina z vás postupovala podobne ako my vo vzorovom riešení a teda časť vášho riešenia spočívala vo vypisovaní možností. V takýchto prípadoch si treba dávať pozor aby ste vyskúšali naozaj všetky možnosti a aby ste vo svojom riešení poriadne vysvetlili, že ste naozaj na žiadnu nezabudli.

Príklad č. 4 (opravovali Jumaj, Sára, Katka):

Zadanie: Kevin napísal na papier dve štvorciferné čísla pod seba. Nenapísal ich ale hocijako, napísal ich, akoby to boli digitálky. Čísla spočítal a vyšlo mu číslo 6688. Potom papier otočil dole hlavou a zistil, že pôvodné dve čísla stále dávajú zmysel, tak ich spočítal tiež. Vyšlo mu 11896. Aké čísla mal napísané na papieri? Mohla mať Sára napísané na papieri iné dve čísla a dostať rovnaké výsledky? Koľko možností na takéto čísla máme? Vieme o nich ešte, že žiadne štvorciferné číslo nezačína nulou, a dokonca ani ak by sme ho otočili dole hlavou. Navyše uvažujeme také cifry, ktoré dávali "zmysel" pri pohľade zhora aj zdola. (napríklad také číslo 7 síce z jednej strany dáva zmysel, ale keď ho otočíme dolu hlavou, už z neho pekné číslo nedostaneme. Rátame s tým, že číslo 1 je rovnaké aj zhora aj zdola, aj keď bude zarovnané na opačnú stranu.)

Riešenie: Najskôr je dôležité určiť si, aké digitálne cifry môžem v hľadaných Kevinových číslach použiť a ako tieto cifry vyzerajú po otočení papiera. Zistím, že 3, 4 a 7 nedávajú po otočení papiera zmysel. Cifra 6 je po otočení papiera cifra 9 a cifra 9 je po otočení cifra 6. Ostatné cifry sa pri otáčaní papiera nemenia.

Zo zadania viem, že súčet dvoch hladaných čísel, ktoré Kevin mohol mať napísané na papieri, je 6688. Po otočení papiera bude ich súčet 11896. Cifry v jednom hľadanom čísle si označím $ABCD$ a v druhom hľadanom čísle si ich označím $EFGH$. Bude to teda vyzerať ako na obrázku 1



Obr. 1: Označenie cifier

Teraz musím zistiť, ako by som dokázala z dvoch sčítancov dostať dvojice jednotlivých súčtov. Súčet 6 aj pred aj po otočení $(A + E)$, súčet 6 pred a zároveň súčet 9 po otočení $(B + F)$, súčet 8 aj pred aj po otočení $(C + G)$ a súčet 8 pred a zároveň 11 po otočení $(D + H)$. Dôležité je uvedomiť si aj to, že v sčitovaní dvojíc sčítancov sa môžem dostať k číslu väčšiemu ako desať, tzv. prechodu cez desiatku.

Pozrime sa najprv na $A + E$: 6 vieme poskladať len ako $5 + 1$ alebo $0 + 6$. 0 ale nesmie byť na začiatku čísla, teda $A + E = 1 + 5$

Začnem hľadaním dvojice čísel $D+H$:

Ich súčet pred otočením bude buď 8 alebo 18. 18 sa dá zložiť len ako $9+9$, ktoré po otočení dajú $6+6=12$. Potom by prvé dve cifry otočeného čísla boli 12 (alebo 13), čo je priveľa. Teda pred otočením $A+E=8$.

Po otočení môže tiež nastať prechod cez 10 z $C+G$ do $D+H$. Súčet po otočení teda môže byť 11 alebo 10.

$D+H=8$ môžem dostať z použiteľných cifier len ako $0+8$ alebo $2+6$. $0+8$ avšak nemôžem použiť, pretože 4-ciferné číslo sa nemôže začínať nulou. Teda $D+H$ sa môže rovnať iba $2+6$ Keď otočím cifry 2 a 6, tak mi vzniknú cifry 2 a 9, čo mi dáva hľadaný sučet týchto sčítancov – 11. Viem teda, že z $C+G$ nenastane prechod cez desiatku.

$C+G$ tiež nemôže byť 18, lebo potom by $C+G=9+9$ a po otočení by prenášali 1 do $D+H$, lenže tie už sú 11. Tiež vieme, že súčet $C+G$ pred otočením je určite 8, pretože sa zo súčtu $D+H$ nepreniesla jedna. $C+G=8$ môžme dostať len ako $0+8$ alebo $2+6$. Ak by sme 0 a 8 otočili, vznikol by súčet $0+8=8$, pri 2 a 6 by vznikol $2+9=11$, Súčet $C+G$ po otočení potrebujeme 8 alebo 7, 11 nie. Možnosť 2 a 6 pre D a H teda môžme vylúčiť a $C+G$ je $0+8$

Ďalej hľadám dvojice čísel pre $B+F$:

Vieme, že do $B+F$ sa nič neprenáša a ani ono nič neprenáša, ani pred ani po otočení. $B+F$ je určite 6, čo vieme poskladať ako $0+6$ alebo $1+5$. Po otočení potrebujeme dostať 9, čo dokážeme iba s $0+6$. Takže naše hľadané $B+F$ je $0+6$.

Súčtu je jedno, v akom poradí dvojice čísel zapíšeme, súčet $123+456$ je to isté, ako súčet $153+426$. Pre každú dvojicu $A+E, B+F, C+G$ a $D+H$ mám vždy práve dve možnosti, ktorá cifra bude ktoré písmeno: A a E sú jedno 1 a druhé 5. B a E jedno 6 a druhé 0. C, G sú 0 a 8 a D, H sú 2, 6.

Máme štvorciferné číslo, kde na každú cifru máme práve dve možnosti. Na takéto číslo máme $2\cdot2\cdot2\cdot2=2^4=16$ možností. Druhé štvorciferné číslo bude vždy zložené z opačných možností. Máme teda 16 rôznych dvojíc štvorciferných čísel. Ak nám ale nezáleží na poradí čísel (1002 a 5686 je rovnaká dvojica ako 5686 a 1002), tak je možností polovica - $\frac{16}{2}=8$.

Odpoveď: Kevin mohol mať napísané napríklad čísla : 1002 a 5686. Sára mohla mať napísaných ďaľších 15 dvojíc čísel ako Kevin. Mohli to byť napríklad čísla 1086 a 5602.

Komentár: Viacerí z vás zabudli rozobrať možnosť, kedy by v súčte nastal prechod cez desiatku. Keď rozoberáte nejaké možnosti, snažte sa to robiť postupne a zamyslite sa, či vašim systémom naozaj rozoberiete všetky. Väčšina z vás príklad ale poriešila dobre :).

Príklad č. 5 (opravovali Peťo, Mišo):

Zadanie: Naša figúrka sa nachádza na ľavom spodnom($A1$) políčku šachovnice 8×8. V každom ťahu sa pohne o jedno políčko hore alebo doprava. Okrem nej sa na šachovnici nachádzajú dve nepriateľské figúrky na vrchu 3. a 6. stĺpca($C8$ a $F8$). Po každom druhom ťahu našej figúrky prejdú nepriateľské vo svojom stĺpci na opačnú stranu šachovnice (z $C8$ na $C1$ alebo naspäť a z $F8$ na $F1$ alebo naspäť). Pri tomto pohybe vyradia všetko, čo im stojí v ceste, a rovnako vyradia všetko, čo stojí s nimi na jednom políčku. Koľkými spôsobmi sa vieme s našou figúrkou dostať do pravého horného rohu ($H8$) šachovnice bez toho, aby bola naša figúrka vyradená?

Riešenie: Najskôr si bolo treba uvedomiť, že za párny počet ťahov sa vieme dostať iba na niektoré políčka, a teda iba na niektorých nás môže nepriateľská figúrka vyhodiť. Ako zistíme na ktoré políčko sa vieme dostať koľkými ťahmi? Tým, že sa naša figúrka pohybuje iba doprava a nahor súčet pohybov nahor a vpravo určuje počet ťahov.

Aby sme sa s našou figúrkou dostali do stĺpca C, pohneme sa 2-krát doprava. Celkový počet ťahov bude 2+ o koľko políčok sa figúrka posunula hore. V spodnom riadku sú to 2 ťahy, v druhom od spodu 3, potom 4 a tak ďalej. Z toho nám vyplýva, že naša figúrka môže cez stĺpec C prejsť len cez políčka $C2$, $C4$, $C6$ a $C8$.

Do stĺpca F sa musíme posunúť 5-krát doprava. V prvom riadku zdola je to teda 5 ťahov, v druhom od spodu 6, v treťom 7, a tak ďalej. V tomto stĺpci teda môžme bezpečne stúpiť len na políčka $F1$, $F3$, $F5$ a $F7$.

Teraz si treba všimnúť, že po prechode cez $C8$ nemáme kam ísť smerom nahor, avšak ak budeme pokračovať doprava, dostaneme sa na políčko $F8$ a tam naša figúrka neprežije. Podobne nakoľko neprejdeme cez $C1$, tak sa kvôli nemožnosti pohybu nadol na políčko $F1$ nedostaneme.

Teraz prejdeme na počítanie možností. Šachovnicu vieme rozdeliť na 3 časti: pred sťĺpcom C, medzi stĺpcami C a F, po stĺpci F.

V prvej časti prechádzame cez stĺpce A a B. Keď ideme na políčko $C2$, musíme sa do stĺpca B z A zaradiť najneskôr v 2. riadku, teda máme 2 možnosti. Pri ceste do $C4$ máme zasa 4 možnosti, nakoľko do stĺpca B vieme prejsť v riadkoch 1 až 4. Do $C6$ je tým pádom 6 možností.

V tretej časti vieme rovnako zrátať možnosti od políčok stĺpca F. Z neho totiž musíme prejsť hneď do stĺpca G a potom máme v každom riadku možnosť prejsť do stĺpca H. Teda z $F3$ je to 6, z $F5$ 4 a z $F7$ 2 možnosti.

V prostrednej časti zostáva princíp rovnaký. Počet možností bude závisieť od počtu riadkov od toho, v ktorom figúrka do tejto časti vošla, po ten, v ktorom z tejto časti výjde.

Ako môže figúrka cez políčka stĺpcov C a F prejsť? Políčko cez ktoré prechádza v stĺpci F sa musí nachádzať vyššie ako políčko, cez ktoré prešla v stĺpci C.

To nám dáva nasledovné možné prechody cez stĺpce C a F:

- cez $C2$ a $F3$ vieme prejsť $2 \cdot 2 \cdot 6 = 24$ možnosťami
- cez $C2$ a $F5$ vieme prejsť $2 \cdot 4 \cdot 4 = 32$ možnosťami
- cez $C2$ a $F7$ vieme prejsť $2 \cdot 6 \cdot 2 = 24$ možnosťami
- cez $C4$ a $F5$ vieme prejsť $4 \cdot 2 \cdot 4 = 32$ možnosťami
- cez $C4$ a $F7$ vieme prejsť $4 \cdot 4 \cdot 2 = 32$ možnosťami
- cez $C6$ a $F7$ vieme prejsť $6 \cdot 2 \cdot 2 = 24$ možnosťami

Čo je spolu $24 + 32 + 24 + 32 + 32 + 24 = 168$ možností.

Odpoveď: Naša figúrka sa vie do pravého horného rohu šachovnice dostať 168 spôsobmi.

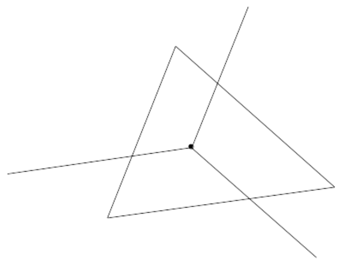
Komentár: Väčšina riešení bola veľmi pekná, avšak veľa z vás neodôvodnilo, buď kde bude figúrka vyradená, alebo ako ste získali čísla z ktorých ste vyrátali výsledok.

Príklad č. 6 (opravoval MaťoPaťo):

Zadanie: Na papieri je trojuholník ABC. Prišiel Jožko a rozdelil ho na samé lichobežníky. Koľko ich mohlo byť? Nájdite všetky možnosti, na koľko lichobežníkov sa dá tento trojuholník rozdeliť.

Riešenie: Máme nájsť všetky možné počty lichobežníkov. Budeme to robiť tak, že najprv nájdeme nejaký počet a následne ukážeme, že iný počet to byť nemôže.

Trojuholník vieme rozdeliť na lichobežníky napríklad takto. V trojuholníku si zvolíme bod, z ktorého vedieme polpriamky s jednotlivými stranami tak, aby každá pretínala inú stranu trojuholníka a bola rovnobežná s vždy inou. Takto sa nám podarilo rozdeliť trojuholník na 3 lichobežníky (Obr. 2). Rozmyslite si, že tento postup dokážeme urobiť s ľubovoľným trojuholníkom.



Obr. 2: Rozdelenie trojuholníka

Teraz si spomeňme na to, ako je definovaný lichobežník. Je to štvrouholník, ktorý má jednu dvojicu protiľahlých strán rovnobežnú (nazývame ich podstavy). Čo ak ale urobíme v lichobežníku strednú priečku, ktorej dĺžka sa používa napríklad na výpočet jeho obsahu? Je rovnobežná s oboma podstavami. Z toho vyplýva, že nám rozdelila jeden lichobežník na dva lichobežníky a teda v súčte dostaneme o jeden lichobežník viac. Tie môžeme opäť deliť a teda vždy môžeme jeden lichobežník rozdeliť na ľubovoľný počet menších lichobežníkov.

Vyzerá to teda, že trojuholník môžeme rozdeliť na ľubovoľný počet lichobežníkov väčší rovný trom. Prečo ale nemôže byť tých lichobežníkov menej? Jeden lichobežník použiť zjavne nemôžeme, pretože by to musel byť trojuholník. Ostáva nám sa teda zaoberať prípadom dvoch.

Aby sa to dalo, museli by sme vedieť trojuholník rozdeliť buď priamkou, alebo lomenou čiarou na dva lichobežníky. Všetky vnútorné uhly lichobežníka sú menšie ako 180°. Ak by sme použili lomenú čiaru, tak je nejaký vrchol lichobežníka vo vnútri trojuholníka a teda jeho doplnok do 360°, ktorý je väčší ako 180° musí obsahovať ten druhý lichobežník. Tu však prichádzame k sporu, pretože jeho vnútorný uhol by mal byť menší a väčší ako 180° zároveň.

Trojuholník by sme teda museli rozdeliť priamkou. Tá buď pretína 2 strany, alebo vrchol a protiľahlú stranu. Avšak, ani v jednom prípade nerozdelí trojuholník na 2 štvoruholníky a teda môžeme prehlásiť, že najmenší počet lichobežníkov je 3.

Odpoveď: Trojuholník sa dá rozdeliť na ľubovoľný počet lichobežníkov väčší rovný trom.

Komentár: Príklad bol veľmi ľahký a skoro úplne všetci ste ho mali dobre. Pri takýchto príkladoch je ale veľmi dôležité nezabúdať, že treba nájsť všetky riešenia. Inými slovami, treba ukázať, že iné riešenie už neexistuje. Na tom ste stratili najviac bodov.

Príklad č. 7 (opravovali ViRPo, Zuzka V.):

Zadanie: V izbe je veľká truhlica, na ktorej je 10 zámkov. V izbe sú aj strážcovia, o ktorých vieme tieto tri informácie:

- Každý strážca má pri sebe práve 5 kľúčov, z ktorých každý otvára práve jeden zámok a žiadne dva neotvárajú ten istý zámok.
- Neexistujú dvaja strážcovia, ktorý majú kľúče k rovnakým 5 zámkom (čiže rovnakú sadu kľúčov).
- Neexistujú dvaja strážcovia, ktorý by spolu vedeli odomknúť všetkých 10 zámkov

(K jednému zámku môže mať kľúč teda viacero strážcov)

Koľko najviac môže byť v izbe strážcov?

A koľko najviac by mohlo byť strážcov ak by zámkov bolo 42 a každý strážca by mal práve 21 kľúčov, neexistovali by dvaja strážcovia s kľúčmi k rovnakým 21 zámkom a ani dvaja strážcovia čo vedia spolu odomknúť všetkých 42 zámkov?

Riešenie: Zo zadania vieme, že neexistujú dvaja strážcovia s rovnakou kombináciou kľúčov. Vďaka tejto podmienke môžeme hľadanie maximálneho počtu strážnikov chápať aj ako hľadanie všetkých možných kombinácií kľúčov, ktoré môžeme rozdeliť medzi strážnikov tak, aby boli splnené podmienky zo zadania.

Pozrime sa na prvú podmienku. Každý strážca má pri sebe práve 5 kľučov, z ktorých každý otvára práve jeden zámok. Predstavme si, že z desiatich rôznych kľúčov vyberáme 5 rôznych. Ako prvý kľúč môžeme vybrať hociktorý z desiatich. Druhý kľúč už nemôže otvárať tú istú truhlicu, preto už môžeme vyberať iba z 9 možností. Podobne ďalšie kľúče vyberáme z 8, 7, 6 možností. Ďalej už nemusíme vyberať, lebo počet kľúčov, ktorých môže mať strážca pri sebe je 5. Teda dostaneme $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 30240$ možností usporiadania, čo sa dá napísať ako $\frac{10!}{5!}$. Lenže pozor! My sme v skutočnosti vybrali každú možnosť vo všetkých možných poradiach. Naše kombinácie sú napríklad $ABCDE$ aj $EDCBA$, a takýto strážnici by predsa vedeli otvoriť tie isté truhlice. Z týchto duplicitných možností musíme vždy vybrať iba jednu. Náš výsledok preto vydelíme počtom možných usporiadaní 5 kľúčov. Ak mám 5 kľúčov, na prvú pozíciu mám 5 možností, na druhú pozíciu už mi ostali iba 4 možné kľúče, na ďalšie pozície 3,2 a 1 možnosti. To je $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ možností. Dostaneme teda rovnicu $\frac{30240}{120} = 252$.

Prvé dve podmienky vieme zapísať aj pomocou kombinačného čísla. Teda vyberáme z 10 zámkov 5 kľúčov, pričom na poradí v akom kľúče vyberáme nám nezáleží. Môžeme preto tento počet ako $\binom{10}{5} = \frac{10!}{(10-5)! \cdot 5!} = 252$. Tento zápis je presným prepísaním úvahy vyššie, ale uľahčuje nám zápis. Všimnite si, že naozaj $\frac{10!}{(10-5)!}$ zodpovedá vyberaniu 5 kľúčov z 10, a ďalšie predelenie 5! hovorí o odrátaní možností, ktoré sme zarátali viackrát (keďže pre nás poradie nie je podstatné).

Našli sme všetky sety kľúčov vyhovujúce prvým dvom podmienkam, teraz musíme zohľadniť aj tú tretiu – žiadny dvaja strážnici nemôžu spolu vedieť otvoriť všetky zámky. Pre hocijakú kombináciu kľúčov, napr. $ABCDE$ (na poradí nezáleží), existuje jedna kombinácia kľúčov, s ktorou by sme mali všetky kľúče (v tomto prípade by to bola kombinácia $FGHIJ$). Takto vieme dať všetky kombinácie do párov.

Ak by sme medzi strážnikmi vedeli nájsť takých dvoch, že ich kombinácie kľúčov tvoria takýto pár, vedeli by títo dvaja strážnici otvoriť všetky truhlice. Lenže to máme v zadaní zakázané. Môžeme teda povedať, že ak má byť splnená aj posledná podmienka zo zadania, z každého páru môžeme zobrať len jednu kombináciu. A keďže chceme mať týchto kombinácií (a teda aj strážnikov) čo najviac, tak z každého páru zoberieme presne jednu kombináciu. A keďže počet všetkých kombinácií dokopy bol 252, párov máme $\frac{252}{2} = 126$, a z každého chceme práve jednu tak najvyšší možný počet strážnikov bude 126.

Rovnaký postup použijeme aj pri druhej časti zadania, kde 42 zámkov a 21 kľúčov. Teda vyberáme 42 zámkov pre 21 kľúčov. Môžeme si to zapísať pomocou kombinačného čísla $\binom{42}{21} = \frac{42!}{(42-21)! \cdot 21!} = 538257874440$. Toto je počet všetkých kombinácií. Rovnako ako v predchádzajúcom prípade, môžeme z každého páru navzájom doplňujúcich sa kľúčov vybrať práve jeden. Keďže počet rôznych párov je $\frac{538257874440}{2} = 269128937220$, tak aj maximálny počet strážnikov bude 269128937220.

Odpoveď: Pre 10 zámkov a 5 kľúčov je 126 možností. Pre 42 zámkov a 21 kľúčov bolo 269128937220 možností.

Komentár: Príklad sa opravoval dobre, často ste v riešeniach zábudali, že neexistujú dvaja strážcovia, ktorí vedia odomknúť všetky zámky.

Príklad č. 8 (opravovali Lámač, Tánička):

Zadanie: Každý bod roviny má nejakú farbu. Platí, že vždy všetky body ležiace na jednej priamke majú maximálne dve rôzne farby. Koľko najviac rôznych farieb môžu mať body na tejto rovine?

Riešenie: Najskôr si ukážeme, ako vieme do roviny umiestniť body troch rôznych farieb. Nech je celá rovina jednej farby, napríklad oranžová. Cez túto rovinu prechádza priamka, ktorej všetky body sú fialové (neobsahuje oranžové body). Na danú fialovú priamku umiestnime modrý bod (alebo aj viacero modrých bodov). Podstatné však je, aby tieto modré body ležali iba na fialovej priamke. Na fialovej priamke (vlastne už modro-fialovej) teda ležia body dvoch farieb, modré a fialové. Žiadny jej bod nie je oranžový. Všetky ostatné priamky obsahujú z danej modro-fialovej priamky najviac jeden bod. Rovnobežné priamky s modro-fialovou obsahujú len oranžové body. Nerovnobežné priamky s modro-fialovou priamkou pretínajú modro-fialovú v jednom bode, ktorého farbu obsahujú, inak sú celé oranžové.

Môžu teda byť buď modro-oranžové, alebo fialovo-oranžové. Kedže toto sú všetky možné priamky v rovine, vieme do roviny umiestniť tri farby bodov tak, aby na každej priamke ležali body maximálne dvoch farieb. Teraz už iba dokážeme, prečo body štyroch rôznych farieb nevieme umiestniť do roviny. Uvažujme, že máme modrý a oranžový bod na jednej priamke p. Teraz si umiestnime fialový bod na jednu priamku s modrým bodom r, avšak inú ako tá, na ktorej leží oranžový bod. Do roviny k nim pridáme zelený bod tak, aby neležal ani na priamke s fialovým a oranžovým bodom (označme ju q), ani na p či r. Tieto štyri body vytvárajú štvoruholník pretože žiadne tri neležia na tej istej priamke. Teraz však nastáva problém, kedže nedokážeme povedať, akej farby bude bod ležiaci na prieniku uhlopriečok tohto štvoruholníka.

Vieme o ňom totiž povedať, že leží na oboch uhlopriečkach zároveň. Podľa nášho postupu majú ale uhlopriečky už jednoznačne určené svoje farby a to navyše tak, že nemajú žiadnu spoločnú. (Teda ak jedna uhlopriečka je modro-zelená, druhá je fialovo-oranžová.) Ak si teda povieme, že bude mať jednu z dvoch farieb prvej uhlopriečky (bude modrý alebo zelený), nemôže ležať na druhej uhlopriečke (lebo jej body sú iba fialové alebo oranžové). Rovnako ak bod bude mať jednu z farieb druhej uhlopriečky (fialovú alebo oranžovú), nemôže ležať na prvej uhlopriečke.

Preto nevieme umiestniť do roviny štyri body tak, aby na jednej priamke ležali body maximálne dvoch rôznych farieb. Keď nedokážeme umiestniť do roviny štyri farby, neumiestnime do nej ani viacej farieb, kedže by sme pri umiestňovaní štvrtého rôznofarebného bodu mali problém nájsť mu vhodné miesto.

Odpoveď: Body na tejto rovine môžu mať najviac 3 farby.

Komentár: Príklad nebol ťažký, väčšina ho zvládla na 10 bodov. Riešilo ho až 26 riešiteľov, celkovo ste zaň dostali 169 bodov, priemerne 6.5 bodov. Najčastejšou chybou bolo nedostatočné dokázanie, prečo štyri rôznofarebné body v rovine ležať nemôžu. Body sme taktiež strhávali aj za nedostatočný opis ofarbenia s tromi rôznofarenými bodmi.

Príklad č. 9 (opravoval Ivo):

Zadanie: A a B sa hrajú hru. Na papieri majú $n \geq 11$ po sebe idúcich prirodzených čísel. Striedajú sa v ťahoch a začína A. Každý vo svojom ťahu vyškrtne jedno zatiaľ nevyškrtnuté z čísel na papieri. Hra sa končí vtedy, keď po nejakom ťahu ostanú na papieri už len 2 nevyškrtnuté čísla.

A vyhráva, ak sú nesúdeliteľné, B ak sú súdeliteľné.

Zistite, pre ktoré n má výhernú stratégiu A a pre ktoré n ju má B.

Riešenie: Pri riešení si najprv uvedomme, čo vlastne znamená súdeliteľné. Znamená to, že majú spoločného deliteľa, iného ako 1. To znamená, že musí existovať spoločný prvočíselný deliteľ, ako je napríklad 2 pre všetky párne čísla. Preto by pre B bolo najjednoduchšie, aby tam ostali dve párne čísla, zatiaľ čo A by sa tomu malo pokúsiť zabrániť. Keďže pre párne a nepárne n majú A a B iný počet ťahov, rozdelíme si príklad na 2 prípady.

Ak n je *párne*, tak B škrtá ako posledné. Tým pádom, ak ostanú v poslednej trojici dve párne čísla, vyhralo. Nanešťastie pre B, A má práve toľko škrtnutí, aby tomu vedelo zabranit. Počet párnych čísel je $\frac{n}{2}$ a A škrtá presne $\frac{n-2}{2}$ čísel, čo znamená, že A vie v poslednej trojici nechať iba jedno párne číslo.

Ok, a neexistujú nejaké nepárne čísla, ktoré sú súdeliteľné? Tu nám prichádza na pomoc 3-ka. V $n \geq 12$ (pamätaj, n je teraz párne) za sebou idúcich číslach sú vždy aspoň dve, ktoré su nepárne a deliteľné 3. A to preto, lebo sa tam budú nachádzať čísla so všetkými zvyškami po delení 12 a zvyšky 3 a 9 majú práve túto vlastnosť.

Preto ak by aj B nemalo pri poslednom škrtaní dve párne čísla, malo by tam dve nepárne čísla deliteľné 3. Naopak, ak by tam nemalo tieto dve čísla, znamenalo by to, že A jedno z nich škrtlo, čím neškrtlo párne a teda v poslednej trojici zostávajú dve párne čísla.

Pre *nepárne* n, je to úplne iný príbeh. A rozmýšla, že by bolo docela dobré, ak by posledné dve čísla mali pre každé (nielen 2) prvočíslo iný zvyšok po delení. Napríklad rozdiel zvyškov 1 by nebol vôbec zlý Uvedomme si, že toto splňuju každé dve susedné prirodzené čísla!

Vie ale A docieliť, aby na konci zostali dve po sebe idúce čísla? Vie, napríklad nasledovným spôsobom. Vo svojom prvom ťahu škrtne prvé číslo z postupnosti čísel napísaných na papieri a zo zvyšných si pomyselne utvorí dvojice tak, že 2. bude v dvojici s 3., 4. s 5., ..., $n-1$. s n.. Ďalej bude postupovať tak, že keď B

vyškrtne jedno číslo z niektorej dvojice, tak ono šktne to druhé z dvojice. Tým zabezpečí, že posledné dve čísla budú práve jedna dvojica, čo sú po sebe idúce čísla.

Odpoveď: Pre párne n má víťaznú stratégiu B, pre nepárne n má víťaznú stratégiu A.

Komentár: Príklad bol veľmi ťažký na úplné vysvetlenie.

Prémia (opravoval Zajo):

Zadanie: Vyhlasujeme majstrovstvá sveta v zafarbovaní vody. Každý súťažiaci bude v turnaji hrať s každým jeden zápas, ktorý sa skladá z troch kôl. Na každé z kôl má každý súťažiaci 100 kvapiek svojej farby.

Kolo prebieha tak, že pre každú zo 100 svojich kvapiek sa obaja hráči rozhodnú, do ktorej z 5 nádob(usporiadaných) ju kvapnú a následne tak vykonajú. V nádobách bola predtým voda a na konci bude takej farby, z ktorej tam skončilo viac kvapiek.

Napríklad by proti sebe hrali kolo dvaja hráči, jeden by do nádob postupne kvapol [20,20,20,20,20] kvapiek a druhý by kvapol [33,33,34,0,0] kvapiek. Prvé tri nádoby by boli zafarbené na farbu druhého hráča, posledné dve zase na farbu prvého hráča. Keďže nádob farby druhého hráča je viac, tak kolo vyhral.

Ďalšie dve kolá sa odohrajú podobným spôsobom, ale opäť na prázdnych nádobách, tj. kvapky z minulých kôl už nie sú dôležité. Hráč získava za zápas toľko bodov, koľko kôl vyhral (za remízu získajú obaja hráči 0.4 bodu).

Na začiatku každého kola sa hráč musí rozhodnúť, koľko kvapiek kam kvapne, než vidí kvapnutia protihráča. Avšak v ďalších kolách už vie, koľko kvapol jeho protihráč v predchádzajúcich kolách a môže to proti nemu využiť. Všetky počty kvapnutí sú celé, nezáporné čísla.

Vašou úlohou ako účastníka turnaja je navhrnúť jednu stratégiu, ktorú použijete proti ostatným hráčom a spísať ju takouto formou:

- Pre každé z kôl napíšte do ktorej z 5 nádob idete kvapnúť koľko kvapiek svojej farby
- V prvom kole je možné uviesť len konkrétne čísla ako počty kvapnutí
- V druhom a treťom kole môže byť Vaša stratégia závislá od toho, koľko kvapiek v minulých kolách použil súper a koľko vy. tj. dajú sa nakombinovať dva faktory, podmienka (Ak som v tejto nadobe prehral/vyhral v tejto teraz dám toľko) a závislosť od súperových počtov (Sem daj dvakrát toľko a ešte o 5 viac ako v minulom kole súper v tej nádobe)

Príklad stratégie je v tabuľke 1.

V tejto ukážkovej stratégii, vidno všetky veci na ktoré sa môžeme odvolávať. Tj. to čo jeden z nás kvapol v predchádzajúcich kolách, robenie nejakých podmienok a tiež poslanie typu zvyšok do 100.

Pozorný riešiteľ si všimne, že v poslednom kole sa môže stať, že sa na základe našej stratégie pokúsime kvapnúť viac ako 100 kvapiek dokopy (Napr. ak by on predtým kvapol do nádoby 5 všetkých 100 kvapiek). Ak dôjde k takejto chybe v stratégii, tak bude náhodne vybrané, z ktorých nádob koľko zoberieme, aby celkový súčet sedel na 100, alebo menej. Môže teda byť výrazne nevýhodné aj omylom sa pokúsiť kvapkať viac ako 100 v kole.

Do súťaže sa okrem riešiteľov zapoja aj niektorí vedúci Riešok so svojimi stratégiami. Vaše riešenie bude bodované na základe toho, koľko bodov ste získali oproti ostatným riešiteľom. Na plný počet Vám teda stačí byť lepší ako všetci ostatní riešitelia, môže však byť výhodné poraziť niektorých vedúcich, keďže Vám to pridáva body.

Riešenie:

Najčastejšou chybou, resp. slabinou odovzdaných stratégii bolo príliš rovnomerné delenie kvapiek medzi nádoby. Samozrejme vo všeobecnosti to nemusí platiť, ale pri našej sade hráčov bolo celkom dosť ľudí dvoch druhov:

4-stratégia Takí, čo kvapli množstvá väčšie ako 20 až do 4 rôznych nádob.

3-stratégia Takí, čo kvapli množstvá väčšie ako 30 až do 3 rôznych nádob.

Problém týchto dvoch prístupov je aj to, že sa v nich nesústredíme na náš cieľ, ktorým je vyhrať **aspoň v 3 nádobách**, nie nutne vo viacerých. Pravdepodobnosť je tu na strane toho, kto si ju zráta a preto ukázalo ako výhodnejšie sa "sústrediť" na 2 nádoby, ktoré s istotou vyhráme a kvapnúť relatívne malé počty do ostatných 3 nádob.

Stratégia	Nádoba 1	Nádoba 2	Nádoba 3	Nádoba 4	Nádoba 5
1. kolo	20	30	25	0	25
2. kolo	20	Ak som tu prehral v prvom kole, tak 0, inak 30	10	Ak tu v prvom kole súper kvapol viac ako 10 tak 0, inak 11	Zvyšok do 100
3. kolo	Priemer toho čo sem kvapol v prvých dvoch kolách zaokrúhlený nahor	20	20	O 1 viac ako som sem kvapol ja v minulom kole	O 1 viac ako sem kvapol súper v minulom kole

Tabuľka 1: Príklad stratégie

Pod "istotou" v tomto prípade rozumieme čísla okolo 40, tie si naozaj málokto trúfol kvapnúť. Na koniec neuškodí tu a tam pridať, resp. odobrať nejakú jednotku, keby sa nám predsalen niekto rovnal.

Keď dáme dokopy všetky tieto úvahy, mohli sme sa dopracovať, k takejto stratégii (tabuľka 2), ktorá by nás vyšvihla rovno na prvé miesto a získala 8 bodov.

Stratégia	Nádoba 1	Nádoba 2	Nádoba 3	Nádoba 4	Nádoba 5
1. kolo	10	40	40	5	5
2. kolo	4	4	40	41	11
3. kolo	10	5	5	40	40

Tabuľka 2: Jedna z možných stratégii na 8 bodov

Je síce pravda, že 4-stratégie, majú veľkú šancu oproti tejto vyhrať, stačí sa správne trafiť, čo sa vo väčšine prípadov aj podarilo, avšak oveľa viac bolo ľudí snažiacich sa o 3-stratégie, resp. niečo im veľmi podobné, kde sa takýto prístup ukázal ako veľmi účinný.

Bodovanie: Do tejto netradičnej prémie sa zapojilo 46 riešiteľov a 5 vedúcich. Body boli delené podľa toho, kde v celkovom poradí ste skončili, napríklad 8 bodov mohli získať prvé 3 miesta, z čoho bolo však len jedno riešiteľské.

Odpoveď: Ak Vás zaujíma celkové poradie, navštívte našu stránku, kde sa môžete dozvedieť viac.

Komentár: Z odovzdaných stratégii sa nám podarilo správne naprogramovať a vyhodnotiť všetky až na jeden-dva prípady, kedy boli pokyny naozaj bizarné alebo nejasné, niektorí z vás prišli však s veľmi originálnymi a účinnými nápadmi, ktoré sme si dovtedy nevedeli predstaviť.

Tešíme sa tiež, že ste sa takto aktívne zapojili do takejto netradičnej prémie a dúfame, že vás bavilo hľadať vaše stratégie.