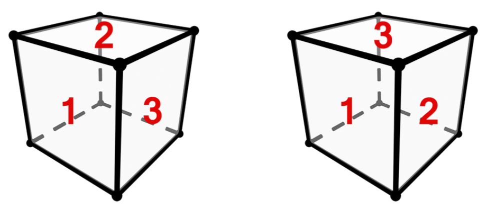
Vzorové riešenia 1. kola zimnej série 2016/2017

Príklad č. 1 (opravovala Gabika):

Zadanie: Kamera nám umožňuje dívať sa na svet z iného uhla. Ak nič iného, tak aspoň z uhla pohľadu kameramana. Rozrežme kocku tromi rezmi na osem rovnakých častí. Na dvojice protiľahlých stien kocky postupne napíšeme čísla 1, 2, 3. Toto číslo napíšeme na každý dielik, ktorého stena je súčasťou danej steny pôvodnej kocky. Teda dostaneme osem dielikov, na každom tri čísla z troch strán z vonkajších stien a tri neoznačené steny z vnútorných stien, ktorými sa navzájom dotýkajú. Kocku preusporiadame tak, aby sme neoznačené steny mali stále zvnútra (na každej stene veľkej kocky sú stále štyri čísla.)

Súčet čísel na prednej stene je 4, na pravej 6, na zadnej 7 a na ľavej tiež 7. Aký je súčet čísel na vrchnej stene?

Riešenie: Mohli by sme postupovať nasledovne. Zamyslime sa, aký je súčet všetkých čísel na našich ôsmich kockách. Na dvoch stenách sú jednotky, na dvoch dvojky a na dvoch trojky. Každá stena je rozdelená na štryri časti, teda súčet všetkých čísel na kocke je $8 \cdot 1 + 8 \cdot 2 + 8 \cdot 3 = 48$. Podľa zadania má byť na prednej, pravej, zadnej a ľavej stene dokopy súčet $4 + 6 + 7 + 7 = 24$, čiže na vrchnej a spodnej stene musí byť súčet $48 - 24 = 24$. Keďže na každej stene sa nachádzajú presne štyri čísla, tak najväčší možný súčet na ľubovoľnej stene je $4 \cdot 3 = 12$. Z toho vyplýva, že máme len jedinú možnosť, na vrchnej ako aj na spodnej stene musí byť súčet 12.



Obr. 1: Dve možné rozmiestnenia kocky.

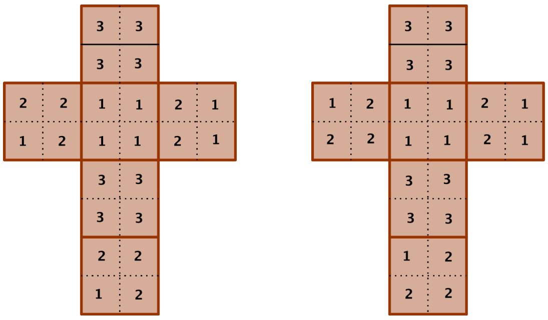
Teraz ale prichádza otázka, ako takáto kocka vyzerá. Lepšie povedané, je ju skutočne možné postaviť? Najprv sa pozrime, ako sa dajú dosiahnuť súčty $4, 6$ a 7 na stenách kocky.

$$\begin{aligned} 4 &= 1 + 1 + 1 + 1 \\ 6 &= 1 + 1 + 1 + 3 \\ &= 1 + 1 + 2 + 2 \\ 7 &= 1 + 1 + 2 + 3 \\ &= 1 + 2 + 2 + 2 \end{aligned}$$

Zjavne na prednej stene máme jedinú možnosť, mať tam všetky štyri malé kocky otočené číslom 1. Spolu máme k dispozícii práve osem jednotiek, teda keď sa pozrieme späť na to, ako je možné súčty dosiahnuť vidíme, že jediná možnosť je mať na pravej strane čísla $1, 1, 2, 2$ a na zadnej ako aj na ľavej strane čísla $1, 2, 2, 2$. V ľubovoľnom inom prípade by sme potrebovali viac jednotiek, ako máme k dispozícii. Máme dve možnosti, ako tieto čísla na jednotlivých stenách rozhodiť. Tieto dve možnosti môžeme vidieť na obrázku 2, kde najvrchnejšia stena na znázornenom plášti je vrchná stena kocky.

Háčik je ale v tom, že dve kocky z obrázku 1 nie sú identické! Nedokážeme otočiť jednu na druhú!

Pri rezaní pôvodnej veľkej kocky dostaneme presne štyri kocky jedného druhu a štyri druhého. Ale v oboch našich plášťoch potrebujeme nepárne počty kociek každého druhu. To znamená, že nedokážeme postaviť kocku so zadanými súčtami na stenách.



Obr. 2: Dve možné rozmiestnenia kocky.

Odpoveď: Kocka by mala mať na vrchnej strane súčet 12, ale nie je možné ju postaviť z našich dielikov.
Komentár: Takmer všetci ste pekne ukázali, že súčet by mal byť 12 a mali ste aj veľmi pekné postupy. Za bezchybné riešenie, ktoré sa dostalo sem bolo udelovaných 9 bodov. Tí z vás, ktorí aj ukázali, že nie je možné kocku postaviť dostali plný počet.

Príklad č. 2 (opravovali Ivo, Zuzka V.):

Zadanie: Následnosť udalostí je pri vysielacom programe veľmi dôležitá a jednotlivé úseky sú starostlivo usporiadané, aby na divákov pôsobili presne podľa želania producentov. Máme dve po sebe idúce celé čísla A a B. Aj ich súčet a súčin sú po sebe idúce čísla. Aké môžu byť pôvodné čísla A a B?
Riešenie: Najprv si ukážeme pekné riešenie:

Označme si dve po sebe idúce čísla zo zadania A a B s tým, že $A < B$. Potom $A = B - 1$. Ak majú súčin (AB) a súčet ($A + B$) byť dve po sebe idúce čísla, tak jedno z nich musí byť väčšie. Skúsme, čo sa stane, ak $AB = (A + B) + 1$, teda ak je súčin o jedna väčší ako súčet.

$$\begin{aligned} AB &= (A+B)+1 \\ AB &= (B-1+B)+1 \\ AB &= 2B \end{aligned}$$

Ako si môžeme všimnúť, tak na oboch stranách násobíme B. To znamená, že buď $B = 0$, alebo na oboch stranách B násobíme rovnakým číslom, a teda $A = 2$. Ak $B = 0$, tak $A = -1$ (celé čísla môžu byť aj záporné), $AB = 0$, $A + B = -1$ a preto získavame správne riešenie. Ak $A = 2$, tak $B = 3$, $AB = 6$, $A + B = 5$ a zase dostávame správne riešenie.

Nesmieme však zabudnúť na prípad, kedy je súčin o jedna menší ako súčet. Vtedy $AB = (A + B) - 1$. To vieme do rovníc zapísať ako:

$$\begin{aligned} AB &= (A+B)-1 \\ AB &= (A+(A+1))-1 \\ AB &= 2A \end{aligned}$$

Teraz na oboch stranách násobíme nejaké číslo číslom A. To znamená, že buď $A = 0$, alebo na oboch stranách násobíme rovnakým číslom a teda $B = 2$. Ak $A = 0$, potom $B = 1$, $AB = 0$, $A + B = 1$, čím dostávame ďalšie riešenie. Ak $B = 2$, potom $A = 1, AB = 2, A + B = 3$. Tým pádom sme našli všetky štyri dvojice po sebe idúcich čísle vyhovujúce zadaniu. Sú to $(-1, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 2)$ a $(2, 3)$.

Oveľa častejšie sa medzi vašími riešaniami vyskytovalo riešenie, ktoré najprv vyskúšalo malé čísla a potom ukázalo, prečo žiadne ďalšie dvojice čísel neexistujú.

Našli sme všetky štyri riešenia, ktoré môžete vidieť v tabuľke 1. Ďaľšie záporné riešenia neexistujú, pretože súčin dvoch záporných čísel je kladný a súčet je záporný. A vieme, že kladné číslo nemôže nasledovať po zápornom. (0 nie je ani kladné a ani záporné číslo).

Žiadna ďalšia vyhovujúca kladná dvojica neexistuje, pretože ak $B > 3$, tak potom $AB > 3A = A + (A + 1) + (A - 1) = A + B + (A - 1) > A + B + 1$ a súčin je väčší ako číslo, ktoré nasleduje po súčte.

A	B	Súčet	Súčin	Vyhovuje podmienkam zadania
-2	-1	-3	2	Nie
-1	0	-1	0	Áno
0	1	1	0	Áno
1	2	3	2	Áno
2	3	5	6	Áno
3	4	7	12	Nie
4	5	9	20	Nie

Tabuľka 1: Možnosti pre A a B

Odpoveď: Existujú štyri dvojice po sebe idúcich čísel vyhovujúce zadaniu. Sú to $(-1, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 2)$ a $(2, 3)$.
Komentár: Vaše riešenia sa nám veľmi páčili. Najčastejším problémom riešení bolo, že ste zabúdali na to, že aj záponé čísla sú celé čísla.

Príklad č. 3 (opravovali Dada, Sára):

Zadanie: Všetci súťažiaci museli prejsť tvrdým výberom. Po celej množine reálnych čísel sme rozvešali takéto plagáty:

- Hľadáme celé kladné štvorciferné číslo menšie ako 3000.
- Všetky jeho cifry sú rôzne a kladné.
- Jedna cifra je väčšia ako súčet zvyšných.
- Je deliteľné 6.
- Prvé dvojčíslie je väčšie, ako druhé.

Aké číslo hľadáme?
Riešenie: Vítame Vás pri hľadaní čísla $\overline{abcd}$! Poďme teda na to!

Na začiatku sa skúsime zamyslieť nad tým akú hodnotu môže mať číslica a. Keďže hľadané číslo je menšie ako 3000 a všetky cifry sú kladné, tak nám zostávajú možnosti 1 a 2. Ak by sa $a = 1$, tak číslo ab môže byť najviac 19. Keďže cd má byť podľa zadania menšie ako ab, tak c by malo byť buď 1 alebo 0. Avšak 1 už nemôžeme použiť pretože $a = 1$ a číslice sú rôzne. Taktiež 0 nevyhovuje, pretože to nie je kladné číslo. Preto $a = 2$ a $c = 1$.

Následne môžeme prejsť k podmienke o deliteľnosti. Číslo, ktoré je deliteľné 6, je deliteľné 2 a 3 zároveň (pretože 2 a 3 sú delitele 6). Aby bolo číslo deliteľné 2 musí byť párne, teda musí končiť cifrou deliteľnou 2. V tom prípade d môže len byť 4, 6, 8 (0 nie lebo nie je kladná a 2 sme už použili). Číslo je deliteľné 3, ak je jeho ciferný súčet deliteľný 3. Ako si môžeme všimnúť $a + c$ je deliteľné tromi. Aby sa táto vlastnosť zachovala, tak aj $b + d$ musí byť deliteľné 3.

Teraz nám už na vyskúšanie zostáva iba zopár možností:

Ak $d = 4$, potom $b + d$ môže byť $6, 9$ alebo 12 (ak by sme chceli súčet 15 a viac, tak by sme museli mať cifru väčšiu ako 10 a to nie je dovolené). Teda ak $b + d = 6$, potom hovoríme o čísle $d = 2$, teda 2412. Toto číslo môžeme rovno vylúčiť kvôli opakovaniu cifier. Ak $b + d = 9$, $d = 5$ a dostávame 2415. Cifry už síce rôzne máme, ale najvačšia cifra $d = 5$ nie je väčšia ako súčet zvyšných. Pokračujeme ďalej. Ak $b + d = 12$, $d = 8$ a máme číslo 2418, ktoré spĺňa všetky podmienky zadania. Našli sme jedno riešenie, skúšame hľadať ďalšie.

Ak $d = 6$, potom $b + d$ môže byť $9, 12$ alebo 15. Pri voľbe $b + d = 9$ máme $d = 3$, teda číslo 2613. Jeho najväčšia cifra $d = 6$ ale nie je väčšia ako súčet zvyšných. Ak by $b + d = 12$ máme $d = 6$, ale vo výslednom čísle 2616 sa nám opakujú cifry. Nakoniec ak $b + d = 15$, tak číslo ktoré dostaneme 2619, znovu nespĺňa podmienku o najväčšej cifre.

Posledné na vyskúšanie nám zostáva $d = 8$, potom $b+d$ môže byť $9, 12$ alebo 15. Ak vezememe $b+d = 9$, vo výslednom čísle 2811 nemáme splnenú podmienku o rôznych číslach. Pri $b + d = 12$ dostávame číslo 2814, ktoré nám vyhovuje po každej stránke. A úplne posledné, ak $b + d = 15$, potom v čísle 2817 neplatí podmienka o najväčšej cifre.

Tým sme vyskúšali všetky možnosti z čoho boli správne dve.

Odpoveď: Našli sme dve čísla, ktoré spĺňajú podmienky zo zadania: 2418 a 2814.

Komentár: Veľa z vás sa dopracovalo k správnemu riešeniu. Páčilo sa nám, že veľa z vás dokázalo príklad vyriešiť aj bez skúšania veľa možností. Najčastejšou chybou bolo, že ste zabudli, že nula nepatrí medzi kladné cifry, a teda sa v čísle nemôže nachádzať. Ak ste s ňou rátali, museli ste skúšať o trochu viac. Rozhodli sme sa ale, že sa túto chybu budeme strhávať iba jeden bod. Ostatné body sme postrhávali za nedovysvetlenie postupov a hlavne za nedoskúšanie všetkých možností. Netreba sa uspokojiť s jedným riešením, alebo jednou vyskúšanou možnosťou, ale naozaj treba preveriť všetky :)

Príklad č. 4 (opravovali Tomáš, Paľo, Gabika Š.):

Zadanie: Bude snáď tematikou tohto ročníku Japonsko, krajina samurajov a mrakodrapov? Majster a učeň hrajú hru. Majú figúrky vysoké 1, 2 a 3, každú dvakrát. Majster ich uložil do mriežky 3×2, pričom do každého riadku dal všetky tri rôzne výšky. Učeň má za úlohu zistiť ich uloženie na čo najmenej pokusov.

Každý pokus učeň navrhne rozloženie figúrok. Majster mu potom povie, na koľkých riadkoch a stĺpcoch vidí toľko figúriek, koľko má. Konkrétne súčet týchto dvoch čísiel.

Na stĺpce sa pozerá zhora a na riadky zprava. Ak má byť figúrku vidno, musí mať pred sebou len figúrky nižšie, ako je ona sama. Napríklad, pokiaľ je v mriežke v riadku za sebou $3, 2, 1$, majster vidí v riadku tri figúrky, pokiaľ $2, 3, 1$, tak len dve.

Učeň použil tri pokusy ako v tabuľke 2. Aké môže byť rozloženie mriežky?

Riešenie:

1	2	3	Videné dobre
1	2	3	2
1	3	2	Videné dobre
1	3	2	3
3	2	1	Videné dobre
1	3	2	2

Tabuľka 2: Pokusy

Najprv sa pozrime na prvý pokus. Vo všetkých stĺpcoch a riadkoch vidíme len prednú figúrku (ostatné sú príliš nízke na to, aby sme ich pri pohľade zhora alebo zprava videli), vieme že dva pohľady sú správne. Preto platí, že práve vo dvoch stĺpcoch alebo riadkoch bude vidno len jednu figúrku.

Druhý pokus má tri stĺpce, z ktorých vidno len jednu figúrku a dva riadky, z ktorých vidno figúrky dve. Vieme, že práve tri sú správne. Možu teda nastať tri situácie, buď sú tri stĺpce správne, alebo sú dva stĺpce a jeden riadok správne, alebo jeden stĺpec a dva riadky sú správne. Tri stĺpce nemôžu byť správne, lebo pri všetkých vidno len jednu figúrku, a vieme že musia byť práve dve. Ak sú 2 stĺpce a 1 riadok pravdivé, tak nie je žiaden problém. Čo keď sú 2 riadky a 1 stĺpec pravdivé? Potom sú pravdivé 2 riadky, v ktorých sú v každom vidno práve 2 figúrky. Teda to, že dvakrát vidíme len jednu figúrku, musí byť spôsobené iba stĺpcami. Teraz je vo všetkých stĺpcoch vidno jedna, teda pohľad na dva z nich musí byť správny. Potom už máme 4 správne pohľady, dva za stĺpce a dva za riadky. Zadanie hovorí však o troch, takže to takto nebude.

Preto pri druhej možnosti bude práve 1 riadok pravdivý, kde bude vidno 2 figúrky, a budú 2 stĺpce pravdivé, kde bude vidno len 1 figúrku. Teraz vieme určiť aj koľko bude vidno v druhom riadku, jedna figúrka tam nemôže byť vidno. Oba takéto prípady sú už niekde v stĺpcoch. Dve figúrky tam tiež nemôžu byť, lebo nemôžu byť v oboch riadkoch. Takže v jednom z riadkov vidno tri figúrky a v jednom dve (zatiaľ nevieme povedať ktoré je kde). Pri stĺpcoch máme dva kde vidno jednu figúrku. V poslednom budú vidno dve, ďalšia jednotka nemôže byť vidno a tri sa tam nezmestia (tak isto zatiaľ nevieme povedať, čo kde je).

Zoberme teraz v úvahu 3. pokus učňa. V riadkoch sú najprv vidno v hornom tri a v dolnom riadku dve figúrky. Povedzme najprv, že sú oba riadky dobre. Máme len 2 dobré pohľady, všetky stĺpce sú potom zle-teda v strednom a pravom je vidno 1. Ak majú byť v hornom riadku vidno tri, musí tam byť 3, 2, 1. Potom by museli byť v pravom stĺpci jednotky a v strednom dvojky (aby v nich bolo vidno 1). Tak by ale v dolnom riadku nemohli byť vidno dve. Teda táto možnosť nefunguje.

3	1	2
3	2	1

Tabuľka 3: Výsledné rozostavenie figuriek

Z toho vyplýva, že dve figúrky budú vidno v hornom riadku a tri v dolnom. To znamená, že dva stĺpce musia byť správne. Vidíme, že sú tam 2, v ktorých sú vidno dve figúrky a jeden v ktorom len jednu. Oba stĺpce, stredný aj pravý, nemôžu byť dobre, teda ľavý musí byť dobre a okrem neho jeden z dvoch dvojkových.

Poďme si rozostavať figúrky. V dolnom riadku ich postavíme tak, aby bolo vidieť všetky tri (je iba jedno také poradie a to je 3, 2, 1). Potom do políčka v prvom riadku a stĺpci doplníme 3, pretože checeme v tomto stĺpci vidieť len jednu figúrku a v druhom rade je figúrka výšky 3. Už nám ostáva len položiť dve figúrky výšky 1 a 2. V 1. riadku musí byť vidno 2 figúrky. Ak by sme ich doplnili v poradí 2, 1, bolo by vidno tri figúrky. V opačnom poradí vidno len dve. Máme teda len jednu možnosť.

Odpoveď: Jediné možné riešenie sa nachádza v tabuľke .

Príklad č. 5 (opravoval Lukáš):

Zadanie: Zvyk je železná košeľa. Nedá sa ujsť, pred svetom neutečieš. Kým všetci sme v metaforickom väzení sveta, niektorí si aj naozaj odpykávajú trest za mrežami. Dvaja väzni majú cely na opačných koncoch väzenia. Nemôžu sa stretnúť ani si inak vymieňať informácie.

Jedného dňa ich však strážnici privedú k sebe a povedia im: „Dáme vám šancu vyslobodiť sa. O hodinu vás opäť rozdelíme. Jeden pôjde späť do svojej cely a druhý ostane tu. Prvému ukážeme 6 rôznych čísel, náhodne vybraných z prvých 245 prirodzených čísel. Potom bude musieť vylúčiť jedno zo šiestich čísel a povedať mi ostatných 5, ktoré napíšem na kúsok papiera v takom poradí, v akom si ich vypočujem. Potom bude musieť opustiť miestnosť a zavoláme dnu toho druhého. Po prečítaní 5 napísaných čísel bude musieť uhádnuť to jedno, ktoré bolo vylúčené. Ak ho uhádne, obaja budete voľní.“ Ako sa môžu oslobodiť?

Riešenie: Cieľom tejto úlohy bolo nájsť spôsob, akým prvý väzeň vylúči jedno zo šiestich čísiel a následne zvyšných päť nadiktuje v určitom poradí naspäť dozorcovi tak, aby druhý väzeň dokázal identifikovať vylúčené číslo. Zamerajme sa najprv na to, akú informáciu dokážeme poslať pomocou piatich rôznych čísel. Nakoľko vieme určiť poradie, môžeme sa pohrať s ich rôznymi permutáciami, teda spôsobmi zoradenia. Celkový počet zoradení piatich čísiel je 120, lebo na prvú pozíciu vieme dať 5 čísiel, na druhú 4, na tretiu 3, na štvrtú 2 a na piatu iba 1. Spolu máme $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ možností.

Ďalej sa pozrime na situáciu druhého väzňa. Vypočuje si 5 prirodzených čísiel od 1 do 245. Pre vylúčené číslo mu teda ostane $245 - 5 = 240$ možností, čo je dvojnásobok permutácií piatich čísiel. Tým pádom, ak ku každej permutácii priradíme 2 čísla, tak máme 50% šancu sa trafiť. Napríklad zoradenie od najmenšieho po najväčšie číslo predstavuje číslo 1, ale aj $120 + 1$. Ďalšie zoradenie bude prislúchať číslam 2 a 122, potom 3 a 123, až posledné 120 a 240.

Teraz by sa nám zišiel nejaký signál, ktorým povieme druhému väzňovi, či sa vylúčené číslo nachádza v prvej alebo druhej polovicu. Takýto signál však nemáme k dispozícii. Jediné, čo nám ostáva je využiť možnosť vylúčiť ľubovoľné zo šiestich čísiel. Postup, ktorý sme doteraz opisovali platil pre ľubovoľné vylúčené číslo. Ako teda vylúčiť číslo, aby sme šance zvýšili na 100%?

Rozdeľme si čísla od 1 do 245 do piatich rovnako veľkých skupín: $1-49, 49-98, 99-147, 148-196, 197-245$. Keďže prvý väzeň dostane 6 čísiel, je zrejmé, že aspoň v jednej skupine sa budú nachádzať aspoň dve z nich. Takáto jednoduchá myšlienka sa v matematike nazýva Dirichletov princíp. Väzni sa teda dohodnú, že vylúčia číslo práve zo skupiny, v ktorej sa nachádzajú aspoň 2 čísla. Potom to druhé, ktoré ostalo dajú na prvé miesto, aby ním určili skupinu. Ďalej sa dohodnú, ktoré z tých aspoň dvoch čísiel v jednej skupine škrtnú. Je to potrebné, nakoľko pomocou zvyšných 4 čísiel dokážeme zakódovať iba $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ možností.

Predpokladajme bez ujmy na všeobecnosti, že ide o prvú skupinu čísiel $1-49$. Predstavme si ich napísané po obvode kruhu, napríklad v smere hodinových ručičiek. Zakrúžkujme tie dve čísla z tejto skupiny, ak ich bolo v tejto skupine viac, vyberme si ľubovoľné dve. Zrátajme teraz počet ostatných čísiel medzi nimi. Napríklad ak máme čísla 1 a 13, tak je medzi nimi 11 a 36 čísel. Teraz tvrdíme, že menšie z týchto dvoch čísel je vždy menšie ako 24, lebo dokopy 47 čísiel vieme rozdeliť do dvoch čo najväčších intervalov iba ako 24 a 23 a teda menšie z nich je pod 24. To je práve to čo hľadáme.

Väzni sa teda dohodnú, že po nakreslení čísel do kruhu nájdu veľkosti medzier, a vylúčia číslo na konci kratšieho intervalu. Potom prvý väzeň ako prvé nadiktuje číslo zo začiatku kratšieho intervalu. Tým tomu druhému povie o ktorú z piatich skupín ide a tiež, že utajené číslo je na kruhu medzi najbližšími 24 číslami v smere hodinových ručičiek. Ďalej iba pomocou zvyšných 4 číslic zakóduje o koľko sa treba po kruhu od prvej číslice posunúť a je to.
Odpoveď: Opísaným postupom majú väzni 100% istotu ujsť z väzenia.
Komentár: Veľa z vás nám opísalo spôsob, ako s aspoň 50% šancou uniknúť, ale iba pár z vás naozaj prišlo ku správnemu riešeniu. Ostatní ste však boli na veľmi dobrej ceste, začo vás tiež veľmi chválime.

Príklad č. 6 (opravoval Ivo):

Zadanie: Je dôležité, aby všetko bolo uniformné a nikto príliš nevytŕčal z radu. Preto máme pravidelný 100-uholník. Ľubovoľných 50 vrcholov je bielych, zvyšné červené. Dokážte, že bez ohľadu na rozloženie farieb je možné rozdeliť jeho 100 vrcholov do štvoríc tak, aby v každej boli 2 červené a 2 biele a navyše tvorili obdĺžnik.
Riešenie: Kde bolo, tam bolo, na začiatku bolo 100 bodov, 50 bielych a zvyšok $100 - 50 = 50$ červených. Tieto body vytvorili 50 rovnakých úsečiek. Nielen veľkosťou, ale aj koncovými bodmi, jeden červený a druhý biely. Avšak, potom sme prišli my a povedali im, aby sa usporiadali do radu. Úsečky poslúchli, no pri presune nastal chaos, úsečky sa pozrážali a niektoré si povymieňali koncové body. Keď sa vymenili body rovnakej farby, nič sa nestalo, no stali sa aj také zrážky, kedy sa vymenili červený bod s bielym. Keďže platia zákony zachovania bodov a farby, nastala takáto reakcia medzi úsečkami s bielymi koncovými bodmi (B) a červenými koncovými bodmi (C): $2\overline{BC} = \overline{BB} + \overline{CC}$, pričom medzi novými úsečkami vzniklo zvlášte puto, obdĺžnikové puto.

Potom sme úsečkám rozkázali, aby utvorili dvojice. Úsečky $\overline{BB}$ a $\overline{CC}$ viazané obdĺžnikovým putom ostali spolu, no ostané úsečky $\overline{BC}$ sa začali obávať, či im ostane nejaký parťák do dvojice. My sme ich upokojili - Na začiatku ich bolo 50 a puto tvorí dvojica. Teda aj počet zvyšných úsečiek je párny, čiže si budú vedieť nájsť pár. Keď potom vytvorili dvojice, vzniklo aj medzi týmito dvojicami obdĺžnikové puto.

Keďže sme na úsečky dobrí, nechali sme im postaviť kolotoč v tvare pravidelného 100uholníka. Nanešťastie sa výrobca pomýlil a namiesto toho, aby body jednej úsečky sedeli vedľa seba, sedia oproti sebe. To znamená, že každá z nich tvorí priemer opísanej kružnice toho 100uholníka. Okrem tohto pravidla si sadli úplne náhodne.

Úsečky kolotoč potešil no boli trochu smutné, lebo nevedeli, či ich obdĺžnikové puto s inou úsečkou dokáže túto situáciu vydržať. Lenže ujo Táles nám poradil: Keďže každá z nich je priemerom a oba body z ich spriaznenej úsečky sú na kružnici tvorenej ich priemerom, znamená to, že sú medzi bodmi navzájom pravé uhly, čiže tvoria obdĺžnik. To úsečky rozveselilo a s radosťou sa kolotočovali do večera.

A teraz si prehodíme príbeh do trocha iného časového poradia:

1. Vieme, že ak si zoberieme 2 uhlopriečky pravidelného 100uholníka, tvoria obdĺžnik.
2. Ďalej to znamená, že nám nezáleží na poradí týchto úsečiek.
3. Rozdelíme si uhlopriečky/úsečky do 3 skupín: úsečky $\overline{BC}, \overline{BB}$ a $\overline{CC}$.
4. Ku každej úsečke $\overline{BB}$) existuje práve jedna úsečka $\overline{CC}$. Úsečiek $\overline{BC}$ je párny počet, čiže vedia si urobiť navzájom páry.
5. Každý tento pár tvorí obdĺžnik s práve dvoma bielymi a dvomi červenými bodmi.

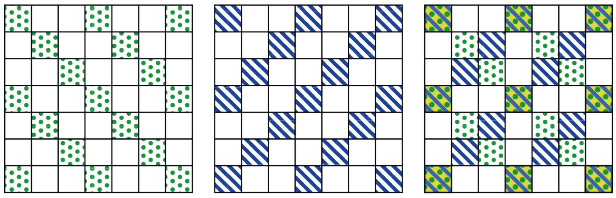
Odpoveď: Dá sa to, práve vďaka vyššie uvedenému dôkazu.
Komentár: Príklad bol pre veľa z vás ľahký, no dávajte si pozor na prehľadnejšie vysvetlenia. Radšej napíšte o 3 riadky viac ako potom strácať nejaký ten bodík :).

Príklad č. 7 (opravovali Tete, Tánička):

Zadanie: Reklama má vo vysielacom programe jedinečné miesto. Máme štvorec 7×7 so 16 dielikmi 3×1 a jedným dielikom 1×1. Na ktorých pozíciách môže byť dielik 1×1?
Riešenie: Pri riešení takéhoto príkladu je fajn začať si vypisovať nejaké možnosti. Po chvíli skúšania máme totiž zhruba predstavu, aké pozície budú tie dôležité, kde by sa mal vedieť nachádzať ten dielik 1×1.

Je však dôležité nezastaviť sa pri skúšaní a skúsiť vymyslieť niečo, čo nám bližšie pomôže. Pri takýchto šachovnicových (kľudne aj s inými rozmermi ako 8×8) úlohách je jedným z typických spôsobov, ktoré sa oplatí poznať, zafarbovanie. Myšlienkou bude zhruba to, že si vyfarbíme niektoré z políčok tak, že keď tam budeme ukladať jednotlivé dieliky, niečo nám to o nich povie.

Pre predstavu, ak by sme mali vyfarbenú šachovnicu a umiestňujeme na ňu dieliky 2×1, tak každý z nich zaberie jedno biele a jedno čierne políčko. V našej úlohe ale umiestňujeme dieliky 3×1, preto namiesto každého druhého políčka (resp. každej druhej uhlopriečky) vyfarbíme každé tretie políčko a s každým riadkom to budeme posúvať.



Obr. 3: Zafarbenia príkladu č. 7

Takto získame naše prvé zafarbenie. Na čo nám je toto zafarbenie dobré? Má totiž tú vlastnosť, že vždy keď na plochu umiestnime ľubovoľne dielik 3×1 tak zaberie **práve** jedno zafarbené políčko. No len keď si zrátame, koľko je takých zafarbených políčok, je ich dokopy 17, čo je o jedno viac ako je dielikov 3×1. Z toho vyplýva, že dielik 1×1 bude položený na tom poslednom zafarbenom políčku, čo ostane.

Dostali sme týmto 17 pozícii, kde môže byť dielik 1×1 a vieme, že nikde inde nebude môcť byť. Napriek tomu, keď sa pokúšame nauskladať naše dieliky, tak nám ten 1×1 nebude sedieť na niektorých týchto pozíciách. To nám napovedá, že sme ešte neskončili.

Totiž ak naše zafarbenie otočíme o $90°$, dostávame druhé zafarbenie s podobnou myšlienkou. Opäť máme 17 políčok a náš dielik 1×1 musí byť na jednom z nich. Výsledné pozície pre dielik 1×1 musia spĺňať podmienky prvého aj druhého zafarbenia, teda musia ležať na ich prieniku.

Týmto dostávame 9 pozícii, pre ktoré ešte musíme ukázať, že naozaj existuje rozloženie dielikov také, že 1×1 sa nachádza práve tam (Na tento krok netreba zabudnúť, lebo zatiaľ sme len ukázali, že na iných pozíciach nebude, nie že na týchto môže byť). To však hravo zládneme, stačí do stĺpca, kde je dielik 1×1 doplniť dva dieliky 3×1 a zvyšok plochy rozdeliť na dva štvorce 3×7, ktoré vieme každý vyplniť 7 dielikmi typu 3×1. (Toto celé naozaj funguje, ale pozor, len pre tých 9 pozícii, ktoré nám ostali)

Odpoveď: Dielik 1×1 sa môže nachádzať na jednej z 9 pozícii, naznačených na výslednom obrázku.

Komentár: Takmer všetci ste mali príklad vyriešený správne. Bohužiaľ riešenie nestačilo na plný počet bodov a teda keď ste napísali, že ste skúšali a nenapísali ako a poslali nám iba riešenie nejaké bodíky ste stratili. Aj napriek tomu, že príklad sa dal vyriešiť aj inak ako skúšaním, väčšina z vás si vybrala tú skúšaciu možnosť a bohužiaľ neukázala, prečo iné riešenia neexistujú. Veľmi nás však potešili riešenia tých z vás, ktorí skutočne prišli na logický postup, alebo ukázali prečo iné riešenia nie sú a tých sme odmenili desiatimi bodmi.

Príklad č. 8 (opravoval Lámač):

Zadanie: Máme kosodĺžnik $ABCD$. Na AD je bod X taký, že $|AB| = |BX|$. Na AB je bod Y taký, že $|DA| = |DY|$. Dokážte, že $|CX| = |CY|$.

Riešenie: Zo zadania vieme, že $|DA| = |DY|$. Preto $\triangle ADY$ bude rovnoramenný, kedže dve jeho strany majú tú istú dĺžku. Podobne vieme, že $|AB| = |BX|$. Preto aj $\triangle ABX$ bude rovnoramenný, kedže dve jeho strany majú tú istú dĺžku. V rovnoramenných trojuholníkoch platí, že jeho dva vnútorné uhly zvierané základňou a ramenom sú rovnako veľké.

Preto vieme:

$$|\angle DYA| = |\angle DAY|$$
$$|\angle AXB| = |\angle XAB|$$
$$|\angle ADY| = |\angle XBA|$$

Kedže je to ten istý úhol platí $|\angle DAY| = |\angle XAB|$. Z rovnoramenných trojuholníkov teda vyplýva, že aj $|\angle AXB| = |\angle DYA|$. Keďže majú dva rovanko veľké uhly, sú $\triangle ADY$ a $\triangle ABX$ podobné podľa vety *uu*. To znamená, že aj veľkosť ich tretieho vnútorného uhla je rovnaká.

V kosodĺžniku platí, že súčet veľkostí jeho dvoch vnútorných uhlov pri ľubovoľnej strane je rovný 180°. Taktiež veľkosť jeho vnútorných uhlov pri protiľahlých vrcholoch je rovnaká. Preto $|\angle ADC| = |\angle ABC|$. Kedže $|\angle ADC| = |\angle ABC|$ a zároveň aj $|\angle ADY| = |\angle XBA|$, tak aj $|\angle YDC| = |\angle CBX|$.

Protiľahlé strany kosodĺžnika sú rovnako dlhé, preto $|DA| = |CB|$ a $|DC| = |AB|$. Keď dáme dokopy čo už vieme, tak aj $|CB| = |DY|$ a $|DC| = |BX|$. Kedže $\triangle YDC$ a $\triangle CBX$ majú dve rovnako dlhé strany a tiež aj veľkosť uhla nimi zvieraného ($|\angle YDC| = |\angle CBX|$), podľa vety *sus* sú zhodné. Preto budú rovnako dlhé aj dĺžky ich tretích strán, čiže $|CX| = |CY|$.

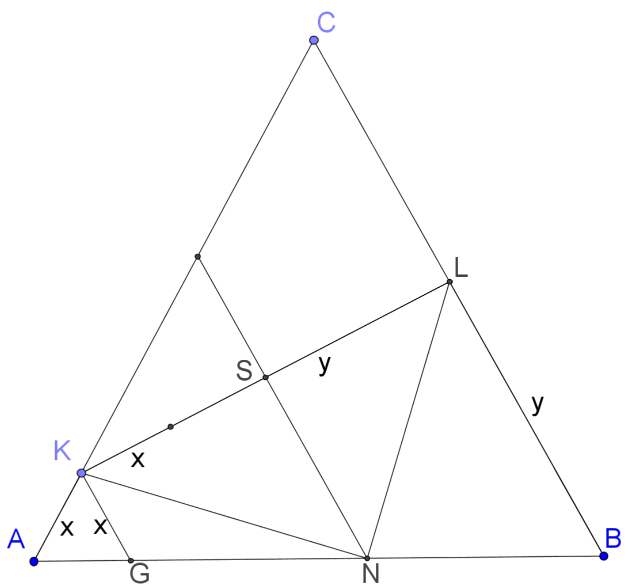
Komentár: Tento príklad riešilo 22 riešiteľov, z toho až 12 dosiahlo plný počet bodov. Spolu ste zaň získali 145 bodov, priemerne každý riešiteľ získal viac ako $6,5$ bodu.

Najčastejším problémom bol zlý prístup k zadaniu. Keď necháte bod X ležať v bode A, tak ste si vlastne zmenili zadanie. My totiž už máme takýto bod X daný. Viacerí z Vás zabúdajú písať absolútne hodnoty (tie známe čiarky $||$). Často vymieňate poradie vrcholov trojuholníkov, keď hovoríte o ich podobnosti, respektíve zhodnosti. Je dôležité povedať, ktorý vrchol prislúcha ktorému vrcholu podobného trojuholníka. Napríklad ak je podobný $\triangle ABC$ s trojuholníkom $\triangle KLM$, tak bodu A prislúcha bod K, bodu B prislúcha bod L a bodu C prislúcha bod M podobného trojuholníka.

Príklad č. 9 (opravoval Zajo):

Zadanie: Majme rovnoramenný trojuholník ABC so základňou AB. Bod K leží na úsečke BC a bod L leží na úsečke CA tak, aby platilo $|AL| + |BK| = |KL|$. Cez stred úsečky KL vedieme rovnobežku s BC, ktorá pretína úsečku AB v bode N. Aká je veľkosť uhlu $|\angle KNL|$?

Riešenie: Po tom, čo si nakreslíme celú situáciu (pozn.: oproti zadaniu sme si s politických dôvodov vymenili body K a L, ale na riešení to nič nemení), sa nám pomerne ťažko používa podmienka zo zadania, že $|AK| + |BL| = |KL|$. Jedným zo spôsobov ako sa s týmto popasovať je vyrobiť si niečo rovnako dlhé, ale na mieste kde nám to bude viac nápomocné.



Obr. 4: Príklad č.9

Zostrojíme preto rovnobežku s BC, prechádzajúcu bodom K. $\triangle AKG$, ktorý nám vznikol, je podobný s $\triangle ABC$, oba majú rovnaké uhly, vďaka rovnobežnosti. Preto aj $\triangle AKG$ je rovnoramenný a teda $|KG| = |AK|$.

Vznikol nám teraz lichobežník $BLKG$ so základňami BL a KG. Úsečku NS teraz môžeme nazývať strednou priečkou tohoto lichobežníka a tá má tú vlastnosť, že jej dĺžka je aritmetickým priemerom dĺžok základní. Dostávame $|NS| = \frac{|AK|+|BL|}{2}$.

Keďže S je stredom KL, tak platí nasledovné vďaka podmienke zo zadania:

$$|NS| = \frac{|AK| + |BL|}{2} = \frac{|KL|}{2} = |KS| = |SL|$$

Stačí nám teda zostrojiť Tálesovu kružnicu (pozn. Ak nevieš čo to je, odporúčame nájsť / pozrieť / naštudovať, je to užitočná znalosť) s priemerom KL. Z rovnosti $|NS| = |KS| = |SL|$ vieme, že aj bod N bude ležať na tejto kružnici (je rovnako vzdialený od jej stredu). Z toho vyplýva aj $|\angle KNL| = 90°$.

Odpoveď: Vo všetkých prípadoch bude platiť $|\angle KNL| = 90°$.

Komentár: Viacerí ste tu pohoreli na tom, že ste sa pokúsili iba narysovať konkrétnu situáciu a pre ňu výsledok ručne odmerať. V Rieškach, ale aj v iných súťažiach takmer vždy hľadáme presný výsledok, ktorý nie je možné dostať ručným odmeraním. Lepším prístupom je teda porovnávať nejaké dĺžky, uhly, príp. obsahy, čo môže viesť k všeobecnému záveru, na rozdiel od merania.

Prémia (opravoval MaťoPaťo):

Zadanie: Cesty osudu sú nevyspytateľné a rovnako náhodne môžu vyzerať aj niektoré básnické prostriedky, s ktorými sa stretneme. Pospájajte dvojice rovnakých čísel cestami. Cesta môže vždy z nejakého políčka pokračovať len na políčko, s ktorým susedí stranou. Cesty z rôznych číslic sa môžu prekrížiť len, keď na políčku prekríženia ani jedna z nich nemení smer. Inak nemôžu byť dve cesty na jednom políčku.

Na políčku s číslom môže cesta len začínať alebo končiť. Nesmie ním prechádzať cesta spájajúca iné dve čísla. Cesty nemôžu vybočovať z hracej plochy, nemusia ju zapĺňať celú.

Vašou úlohou je pospájať všetky dvojice na čo najmenší počet prekrížení ciest. Pošlite nám výsledné rozloženie ciest aj s počtom prekrížení.

Riešenie:

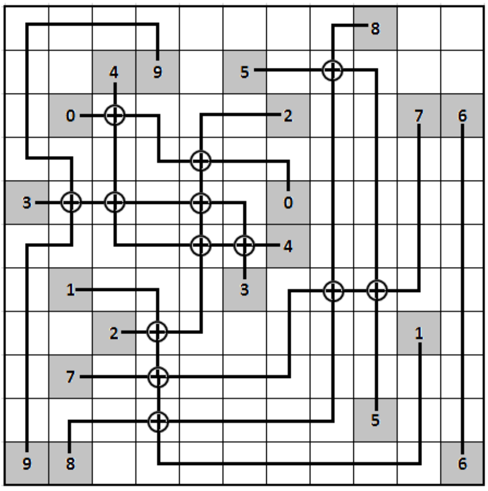
								8		
		4	9		5					
	0					2			7	6
3						0				
						4				
	1				3					
		2							1	
	7									
								5		
9	8									6

Tabuľka 4: Cesty

Zadaniu príkladu ste pochopili takmer všetci a pekne ste sa popasovali s riešením, dôkazom je, že väčšina riešení sa pohybovala iba v rozmedzí 2 prekrížení. Najlepšie riešenie, ktoré ste našli má týchto prekrížení 13 a tu je (Obr. 5).

Odpoveď: Najmenší nájdený počet prekrížení je 13.

Komentár: No čo vám poviem. Šikovní ste :)



Obr. 5: Vyplnená mriežka