Vzorové riešenia 3. kola letnej série 2016/2017

Príklad č. 1 (opravovali Tete, Kornelka):

Zadanie: Agentúra zabezpečila, aby každé 3 minúty vyrazil jeden strážca z KúpTu! tunelom do TamNekúp!, odkiaľ mohol ísť domov (teda tunelom sa už nevracal). Upratovačka vyrazila z KúpTu! v rovnaký čas ako jeden zo strážcov. Každému strážcovi trvá táto trasa 60 minút, no upratovačka sa ponáhľa za svojím vyvoleným, preto jej cesta trvá iba 35 minút. Koľko strážcov upratovačka stretla počas cesty tunelom, ak nerátame toho, s ktorým sa stretla hneď na začiatku, keď vyrážala z KúpTu! ?

Riešenie: Každému strážcovi trvá prejsť tunel práve 60 minút, strážcovia vchádzajú za sebou do tunela po troch minútach a teda v rovnakých časových intervaloch z tunela aj vychádzajú. V momente, keď upratovačka vstúpi do tunela, je v ňom práve $60 : 3 = 20$ strážcov, s tým, že prvý (zo strany TamNekúp!) ho práve v tom momente opúšťa a posledný (nerátajúc toho, čo je na začiatku) je vzdialený od KúpTu! takú vzdialenosť, ktorú vie prejsť za 3 minúty.

Strážcovia, ktorí vojdú do tunela neskôr ako upratovačka (spolu s tým vyrážal zároveň s ňou), sa s ňou už nemôžu stretnúť, lebo sa hýbe rýchlejšie ako oni (celý tunel prejde rýchlejšie).

Upratovačke trvá prejsť tunel 35 minút. Za ten čas stihne tunel opustiť 11 ($12 > 35 : 3 > 11$) strážcov. K týmto jedenástim nesmieme ešte zabudnúť prirátať toho strážcu, ktorý z tunela vyšiel v nultej minúte (v okamihu keď doň vstúpila upratovačka). To je spolu 12 strážcov, ktorí stihli tunel opustiť skôr ako upratovačka prišla na jeho koniec.

Pôvodne sme teda mali 20 strážcov a kým upratovačka prišla na koniec tunela, ostalo ich v ňom len $20 - 12 = 8$, čo tam boli už keď vstupovala. Všetkých z nich po ceste tunelom stretla a tým pádom dostávame riešenie príkladu.

Odpoveď: Upratovačka stretla počas cesty tunelom 8 strážcov.

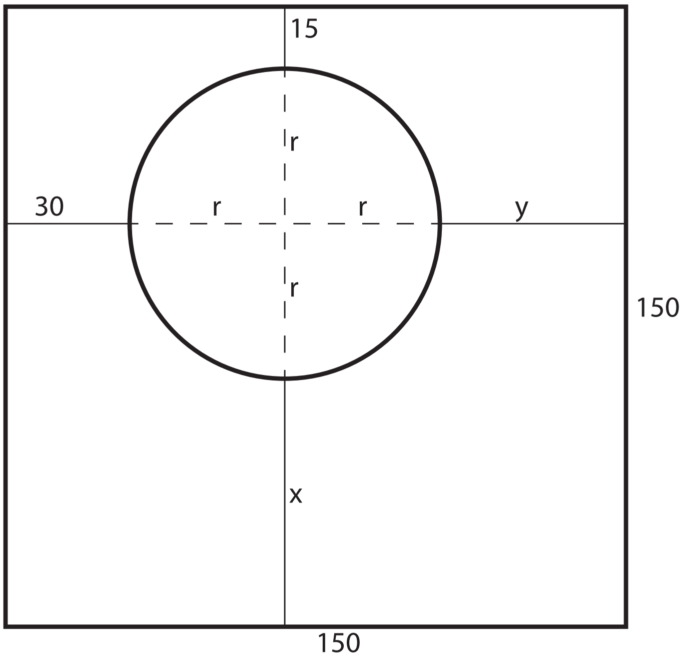
Komentár: Riešení bolo celkom máličko, no na druhú stranu riešil túto úlohu každý trochu odlišným postupom. Hlavné je, že ste mali takmer všetci správnu odpoveď. Hlavnú chybu ste urobili v neporiadnom prečítaní zadania, teda že ste si nevšimli, že sa neráta strážca, ktorý vchádzal do tunela spolu s upratovačkou.

Príklad č. 2 (opravoval Ivo):

Zadanie: Majiteľ mal v kancelárii stôl so štvorcovou doskou o strane $1,5m$. Na ňom bol veľmi dôkladne položený kruhový obrus. Bol to síce obrus, ale vôbec nezakrýval celý stôl. Od najbližšej strany dosky stola bol jeho kraj vzdialený $15cm$, od susednej strany $30cm$ a od najvzdialenejšej strany $60cm$. Aký polomer mal obrus? Ako ďaleko bol okraj obrusu od štvrtej strany dosky stola?

Pozn.: Polomer kruhu je dĺžka úsečky, ktorej jeden koncový bod leží na obvode kruhu a druhý koncový bod v strede kruhu.

Riešenie: Najjednoduchším začiatkom je celú situáciu si nakresliť, ako na obrázku 1. Z toho budeme ľahko vedieť pokračovať ďalej.



Obr. 1: Obrus na stole s vyznačenými dĺžkami

Označenie na obrázku je pomerne priamočiare:

- x je vzdialenosť strany štvorca od kružnice, ktorá je oproti strane vzdialenej 15
- y je vzdialenosť strany štvorca od kružnice, ktorá je oproti strane vzdialenej 30.
- r je polomer kružnice (obrusu)

Napíšme si teraz dve rovnosti, ktoré na obrázku vidíme vo vodorovnom a zvislom smere. Vždy vieme celú stranu stola vyskladať z niekoľkých, nami označených kúskov.

$$y + 2r + 30 = 150, \; x + 2r + 15 = 150$$

Pravé strany rovníc sú v oboch prípadoch rovné 150, preto sa musia rovnať aj ľavé strany:

$$x + 2r + 15 = y + 2r + 30 \quad \rightarrow \quad x + 15 = y + 30 \quad \rightarrow \quad x = y + 15$$

Rovnosť sme len zjednodušili a upravili. Z nej nám vyplýva, že $x > y$, tým pádom aj najväčia strana je x, ktorá je podľa zadania dlhá 60.

Teraz už len spätne dosadíme do rovníc:

$$x = y + 15 \quad \rightarrow \quad y = 45$$

$$x + 2r + 15 = 150 \quad \rightarrow \quad 60 + 2r + 15 = 150 \quad \rightarrow \quad r = 37.5$$

Odpoveď: Vzdialenosť od štvtej strany je 45 a polomer kružnice je 37.5.

Príklad č. 3 (opravoval Ivo):

Zadanie: Dada je známou predavačkou trojuholníkov. Jej trojuholníky majú farebné vrcholy. V jej kolekcii jar-leto sú vrcholy zafarbené na žlto alebo zeleno, pričom sa v nej vyskytuje trojuholník s každým možným zafarbením práve raz. Na výstavu si chcela Dada zobrať všetky kusy zo svojej kolekcie, no nezmestili sa jej do auta. Skoro sa pri tom aute rozplakala, ako sa ich doň snažila napratať. Našťastie ju Jumaj prišiel utešiť a poradil jej, že si nemusí zobrať všetky. Niektoré trojuholníky sa totiž dajú vytvoriť z iných, keď sa pootočia alebo preklopia (alebo oboje). Takže jej stačia len tie trojuholníky, z ktorých vie postupne vyskladať celú kolekciu tým, že ich pootočí alebo preklopí. Koľko najmenej trojuholníkov na to Dada potrebuje?

Rovnaká situácia nastala o pol roka pri kolekcii jeseň-zima. Táto kolekcia však obsahuje 4 farby: červenú, oranžovú, modrú a čiernu. Koľko najmenej trojuholníkov potrebovala Dada doniesť na výstavu, aby z nich vedela podobným spôsobom vyskladať všetky trojuholníky z kolekcie?

Riešenie: Nakoľko môžme trojuholník pretáčať a otáčať, po troche kreslenia prídeme ľahko na to, že nás zaujíma iba to, koľko a akých farieb použijeme na zafarbenie trojuholníku a nie ich rozmiestnenie na ňom. Označme si k počet rôznych farieb vrcholov trojuholníka a n celkový počet farieb, ktoré sú obsiahnuté v kolekcií. Vďaka tejto myšlienke si teda môžeme preformulovať úlohu na to, koľkými spôsobmi môžeme vybrať k rôznych farieb z n a koľko rôznych ofarbení (na počet vrcholov jednou farbou) vieme s každou k-ticou spraviť.

Poďme najprv všeobecne zistiť, koľkými spôsobmi vieme vybrať k rôznych farieb z n. Na vybratie prvej farby máme n možností. Avšak ďalšia farba nemôže byť taká istá, ako predošlá a preto ju budeme vyberať z $n-1$ možností, ďaľšiu z $n-2$ a takto by to pokračovalo až do $n-k+1$. Teraz si uvedomme, že pre každú prvú farbu, musíme zobrať do úvahy všetky druhé farby, všetky tretie atď... Preto musíme tieto čísla medzi sebou vynásobiť.

Ajhľa, dostali sme nejaký počet kombinácií, ale napríklad pre $k=3$ kombinácie farieb ABC a ACB sú z nášho pohľadu také isté. Vo výpočte sú ale započítané každá ako samostatná. Koľko takýchto kombinácií vlastne je? Podobne ako v predchádzajúcom odseku, na prvé miesto môžeme vybrať k farieb, na druhé $k-1$ až na posledné nám ostane iba 1 farba. Súčin týchto čísel je počet možností ako zoradiť vybraté farby pre každú kombináciu k farieb. Z toho môžeme usúdiť, že počet spôsobov ak chceme vybrať k farieb z n a nezáleží nám na poradí ich vybratia je

$$\frac{n \times (n-1) \times \cdots \times (n-k+1)}{k \times (k-1) \times \cdots \times 1}$$

Teraz sa pozrime na možné hodnoty počtu farieb k. Vzhľadom na počet vrcholov trojuholníku, môžu byť k čísla 1 až 3.

- **k=1** Ak ofarbujeme všetky vrcholy jednou farbou, máme iba jednu možnosť ako ich zafarbiť. Teda počet rôznych farieb z n je zároveň aj počtom ofarbení. Podľa vzorca pre jednotlivé n (počty farieb v kolekcií)
  - **n=2** Počet rôznych ofarbení je $\frac{2}{1} = 2$
  - **n=4** Počet rôznych ofarbení je $\frac{4}{1} = 4$
- **k=2** Ak ofarbujeme 3 vrcholy dvoma farbami A a B, môžeme sa rozhodnúť, či budú ofarbené dva vrcholy farbou A a jeden farbou B, alebo opačne dva farbou B a jeden farbou A. Pre každú dvojicu farieb máme teda 2 možnosti ofarbenia
  - **n=2** Počet rôznych ofarbení je $2 \times \frac{2\times1}{2\times1} = 2$
  - **n=4** Počet rôznych ofarbení je $2 \times \frac{4\times3}{2\times1} = 12$
- **k=3** Ak ofarbujeme 3 vrcholy troma farbami, opäť máme iba jednu možnosť ako to spraviť, jednoducho musíme ofarbiť každý vrchol inou farbou.
  - **n=2** Nedostatok farieb.
  - **n=4** Počet rôznych ofarbení je $\frac{4\times3\times2}{3\times2\times1} = 4$

Už nám stačí iba dané počty rôznych ofarbení pre jednotlivé počty farieb sčítať.

Odpoveď: Pre kolekciu jar-leto, kde je počet farieb $n = 2$ si Dada zoberie 4 trojuholníky. Pre kolekciu jeseň-zima, kde je počet farieb $n = 4$ si Dada zoberia 20 trojuholníkov.

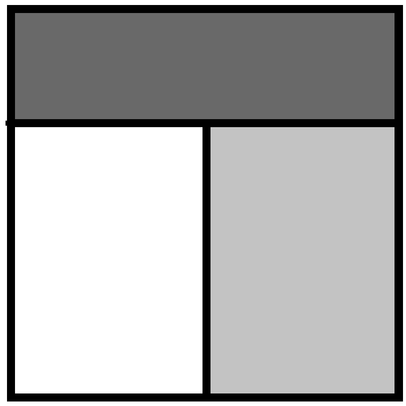
Komentár: Pozor na riešenia, kde si všetky možnosti vypisujete. Potrebujete naozaj ukázať, že sú to naozaj všetky možnosti. Ďalej ste niektorí uvažovali o tvare trojuholníka, čo nebolo úplne potrebné, lebo preklápanie a otáčanie bolo myslené iba na samotné vrcholy.

V tomto vzorovom riešení sme sa pokúsili ukázať spôsob, ktorý je oveľa silnejší, než je potrebné na túto úlohu. Úvahami, ktoré sme tu uviedli totiž vieme vyriešiť drvivú väčšinu podobných úloh našej obtiažnosti. Aj keď sa niektoré kroky môžu teda zdať neintuitívne, odporúčame sa zamyslieť nad jednotlivými princípmi použitými v riešení, môžu sa totiž hodiť.

Príklad č. 4 (opravoval Emil):

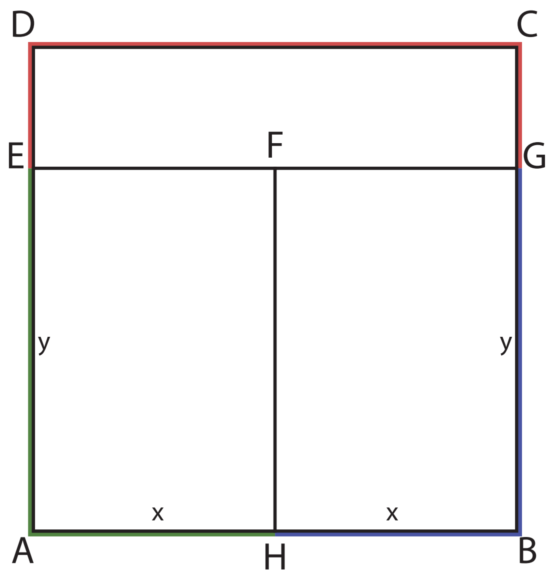
Zadanie: Kedysi dávno v jednej rodine za horami za dolami sa narodili traja synovia. Synovia boli veľmi spravodliví, ale len do dňa, keď do svojej moci získali obchod od otca, ktorý bol tvaru štvorca. Mali si ho spravodlivo rozdeliť jednou vodorovnou a jednou zvislou čiarou, tak ako na obrázku 2. Oddelenie každého zo synov malo po rozdelení obvod 400. Aký bol obvod celého obchodu?

Riešenie:



Obr. 2: Rozdelenie obchodu

Príklad sa dal vyriešiť buď sústavou niekoľkých rovníc, alebo peknou úvahou, ktorou sa dalo rovniciam vyhnúť. V oboch prípadoch nám pomôže označenie pôdorysu obchodu ako na obrázku 3.



Obr. 3: Pozemky, ako si ich synovia rozdelili.

Pri prvom spôsobe si všimneme, že obdĺžniky $AHFE$ a $HBGF$ sú zhodné. Stranu FH majú totiž spoločnú a keďže ide o obdĺžniky musia mať rovnako dlhé aj náprotivné sprany, teda $|AE| = |BG|$. Zo zadania zase vieme, že ich obvod je rovnaký tak rovnako dlhé musia byť aj zvyšné dvojice ich strán:

$$|AH| = |EF| = |HB| = |FG|$$

Túto dĺžku si označíme $x = |HB|$. Dĺžku zvislej strany spodných obdĺžnikov, zase označíme ako $y = |BG|$.

Strana štvorca $ABCD$ je teda rovná $|AB| = |AH| + |HB| = 2x$. Rovnakú dĺžku majú aj obe dlhšie strany horného obdĺžnika (strana CD je totiž stranou štvorca a EG musí byť rovnako dlhá). Dĺžku kratšej strany môžeme vypočítať ako $|ED| = |AD| - |AE| = 2x - y$.

Odvod obdĺžnika $EGCD$ je preto rovný:

$$2x + (2x - y) + 2x + (2x - y) = 8x - 2y \quad \rightarrow \quad 8x - 2y = 400$$

Obvod obdĺžnika $HBGF$ je zasa rovný:

$$x + y + x + y = 2x + 2y \quad \rightarrow \quad 2x + 2y = 400$$

Sčítaním týchto dvoch rovníc dostaneme $10x = 800$ a tým pádom $x = 80$. Strana štvorca $ABCD$ má dĺžku $2x = 160$, jeho obvod bude $4 \cdot 160 = 640$

Riešenie: Pri druhom spôsobe riešenia si rozdelíme obvod štvorca $ABCD$ na 3 časti ako na obrázku 3. Všimnime si, že modrá časť je polovicou obvodu obdĺžnika $HBGF$, pretože je zložená z dvoch jeho susedných strán. A teda má dĺžku 200.

Podobne zelená časť je polovicou obvodu obdĺžnika $AHFE$, pretože opäť je zložená z dvoch jeho susedných strán a má tiež dĺžku 200.

Červená časť je zase od obvodu obdĺžnika $EGCD$ kratšia iba o stranu EG. Teda je dlhá $400 - |EG|$. Celý obvod je teda $800 - |EG|$. Alebo inak, ak pripočítame k obvodu štvorca stranu EG, dostaneme 800. Strana EG je protiľahlou k strane CD, ktorá je stranou štvorca a teda aj EG je rovnako dlhá ako strany štvorca.

Obvod štvorca je štvornásobok jeho strany. A preto podľa toho čo sme napísali vyššie je dĺžka 800 päťnásobkom dĺžky strany štvorca. To znamená, že strana štvorca má dĺžku $800 : 5 = 160$ a obvod má $4 \cdot 160 = 640$.

Odpoveď: Obvod celého obchodu je 640.

Komentár: Väčšina z vás vyriešila príklad správne avšak viacerí ste zabudli vysvetliť niektoré kroky. Snažte sa nabudúce vysvetliť každý krok, ktorí spravíte aj napriek tomu, že sa vám zdá zjavný. Niektorí by ste si vďaka tomu aj odhalili nejakú chybu.

Príklad č. 5 (opravovali Jumaj, Paľo):

Zadanie: Prvý brat sa s ostatnými bratmi stavil o ich podiely obchodu. Na tabuľu napísal čísla $2, 3, 4, 5$ a 6. Povedal im, že im prenechá svoje oddelenie, ak tie čísla zvládnu prepísať na čísla $23, 27, 65, 240$ a 540. Ak to však nezvládnu, bude mať celý obchod pre seba. Malo to však háčik. Čísla mohli prepisovať len nasledovne:

Vždy si vybrali dve čísla, ktoré sa práve nachádzali na tabuli a nahradili ich súčtom a súčinom daných dvoch čísel (celkový počet čísel na tabuli sa nikdy nemení). Takže ak by si na začiatku vybrali čísla 2 a 3, po prepísaní by na tabuli boli čísla $4, 5, 5, 6$ a 6.

Dvaja bratia si s touto úlohou však nevedeli celé dni poradiť, až sa nakoniec vzdali. Ak by ste boli na ich mieste, vedeli by ste čísla prepísať? Mali vôbec bratia šancu? Ak nie, poriadne vysvetlite prečo!

Riešenie: Pozrime sa na to, čo sa môže stať s paritou čísel, ktoré sú na tabuli. Označíme si párne číslo písmenom P a nepárne číslo písmenom N. Sú tri možnosti kombinácie čísel podľa parity, ktoré môžeme zmazať. Konkrétne: P, P (párne a párne), P, N (párne a nepárne, alebo naopak) a N, N (nepárne a nepárne).

Poďme teraz skúmať, ako sa meni parita čísel na tabuli, keď nejaké zmažeme a nahradíme ich podľa pokynov v zadaní:

Ako je vidno podľa tabuľky 1, počet párnych čísel sa môže iba zvýšiť, alebo zostať rovnaký.

zmazané čísla	súčet	súčin	nové čísla	zmena
P, P	$P + P = P$	$P \cdot P = P$	P, P	počet párnych čísel sa nezmenil
P, N	$P + N = N$	$P \cdot N = P$	P, N	počet párnych čísel sa nezmenil
N, N	$N + N = P$	$N \cdot N = N$	P, N	počet párnych čísel sa zvýšil

Tabuľka 1: Možnosti zmeny parity

V zadaní sa ale bratia stavili, že čísla na tabuli budú vedieť prepísať tak, že tam ostanú len dve párne čísla $(240, 540)$. Na začiatku sú na tabuli 3 párne čísla a na konci majú byť 2 párne čísla, to ale nie je možné, lebo by sme museli mať spôsob ako zmenšiť počet párnych čísel.
Odpoveď: Dvaja bratia nemali šancu.
Komentár: Veľa z vás príklad zvládlo. Iný postup, ktorý fungoval, bolo rozpísanie si posledného kroku a dôkaz, že nemôže nastať. Ak sa ale dáte raz na skúšanie možností, musíte poriadne vysvetliť prečo tie možnosti, ktoré sú vypísané, sú tie jediné podstatné.

Príklad č. 6 (opravoval Zajo):

Zadanie: Na začiatku si Lámač stavil určité celočíselné množstvo peňazí, ale prehral. Potom stavil dvakrát viac, opätovne však prehral. Rozhodol sa však aj tak staviť ešte dvakrát viac a stalo sa niečo čo neočakával. Prehral tretí krát. Rovnaká situácia sa zopakovala ešte niekoľko krát (vždy stavil dvakrát viac ako predtým a prehral). Nakoniec z toho bol Lámač úplne zlomený. Za celý večer ani raz nevyhral a celkovo prehral 125984 peňazí. Viete z týchto údajov zistiť, koľkokrát mohol Lámač v kasíne prehrať? Zistite všetky možnosti!
Riešenie: Označme si množstvo peňazí, ktoré Lámač stavil prvý krát ako x a počet jeho prehier ako n. Vieme, že v ďalších jeho pokusoch postupne stavil $2x, 4x, \ldots 2^{n-1}x$ peňazí (napríklad ak n bolo 4, tak stavil postupne $x, 2x, 4x$ a $8x$).

Celkové množstvo peňazí, ktoré Lámač prehral, vieme preto vyjadriť nasledovne:

$$x + 2x + 4x + \cdots + 2^{n-1}x = x(1 + 2 + 4 + \cdots + 2^{n-1}) = x(2^n - 1)$$

V poslednom kroku úpravy predchádzajúcej rovnice sme využili rovnosť $1+2+4+\cdots+2^{n-1} = 2^n-1$. Jej dôkaz vieme formulovať veľa spôsobmi, najjednoduchšie asi tak, že sa jedná o súčet geometrickej postupnosti (viac o geometrických postupnostiach odporúčame pohľadať na internete). Jej platnosť vidno tiež zo zápisu pravej a ľavej strany v dvojkovej sústave, prípadne z matematickej indukcie[1].

Keď už sme uverili vyššie uvedenému vzťahu, tak dostávame zo zadania rovnosť: $125984 = x(2^n-1)$. Pri takýchto rovniciach, kde máme na oboch stranách celé čísla, viacero neznámych a súčin, sa oplatí pozrieť na prvočíselný rozklad, prípadne overovať deliteľnosť na oboch stranách:

$$125984 = 2^5 \cdot 31 \cdot 127 = x(2^n - 1)$$

Zátvorka $2^n - 1$ je zjavne vždy nepárna pre $n \geq 1$, preto vo svojom prvočíselnom rozklade nebude mať ani jednu z piatich dvojok nachádzajúcich sa na ľavej strane. Nepárne čísla sa z ľavej strany dajú vyskladať iba štyri:

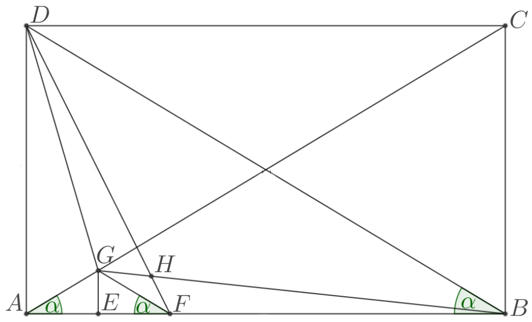
- $1 \to n = 1$, ale v zadaní je písané, že Lámač prehral viac ako raz.
- $31 \to n = 5$ je prvé riešenie.
- $127 \to n = 7$ je druhé riešenie.
- $31 \cdot 127 = 3937$, čo nevieme vyjadriť ako $2^n - 1$ pre celočíselné n (najbližšie možností sú 2047 a 4095).

Odpoveď: Lámač mohol prehrať 125984 peňazí podľa zadania, ak by prehral 5, alebo 7 krát.
Komentár: S príkladom ste si skoro všetci hravo poradili. Druhým najčastejším riešením po tomto vzorovom, ak si nevšimneme parity v prvočíselnom rozklade, bolo vypísať možnosti pre $2^n - 1$ (stačilo prvých 17, potom boli priveľké) a takisto nám mohli vyjsť tie isté dve riešenia.

[1] Matematická indukcia je postup, pri ktorom je našim cieľom odvodiť, že ak tá rovnosť platí pre nejaké n, tak bude platiť aj pre $n + 1$. Potom ak vieme, že platí pre niekoľko malých konkrétnych n, tak vieme ukázať aj to, že platí pre ľubovoľné ďalšie.

Príklad č. 7 (opravoval Lámač):
Zadanie: Láska brata a upratovačky by sa dala zadefinovať ako obdĺžnik $ABCD$. Na jeho strane AB si zvoľme bod F. Os úsečky AF pretína uhlopriečku AC v bode G. Úsečky FD a BG sa pretínajú v bode H. Ukážte, že trojuholníky FBH a GHD majú rovnaké obsahy (nezávisle na voľbe bodu F).
Riešenie: Ako prvé by som chcel vašu pozornosť upriamiť na body G a F. Keďže bod G vznikol pomocou osi AF, spojenie týchto dvoch bodov by nám mohlo pomôcť k lepšiemu pochopeniu problému. Body tak vytvárajú $\triangle AFG$, o ktorom už čo to vieme (spomeňte si, ako vznikol bod G). Občas sa oplatí si do obrázka prikresliť pár čiar.

Možno spozorujeme niečo nové. Netreba to s tým prikreslovaním však preháňať - keď sa v obrázku už nevyznáme, možno sa oplatí naopak odoberať.



Obr. 4: Definícia lásky

Označme E stred úsečky AF. Trojuholníky $\triangle AGE$ a $\triangle FGE$ sú zhodné. Vyplýva to z vety *sus*[2]:

$$|AE| = |EF|, |EG| = |EG|, |\angle AEG| = |\angle FEG| = 90^\circ$$

Z definície bodov a osi úsečky dostávame vyššie uvedené rovnosti, ktorých dôskedkom je zhodnosť spomínaných trojuholníkov.

Ďalej nech $|\angle BAC| = \alpha$, potom aj $|\angle ABD| = \alpha$, nakoľko ide o uhly zvierané uhlopriečkami obdĺžnika a jeho stranou. G leží na osi AF, preto aj uhol $|\angle AFG| = \alpha$ (z už dokázanej zhodnosti $\triangle AGE$ a $\triangle FGE$).

Všimnime si, že GF aj BD zvierajú s AB ten istý uhol. Preto $GF \parallel DB$. Rovnobežky majú tú vlastnosť, že kolmá vzdialenosť bodu na jednej rovnobežke k druhej bude vždy rovnaká. Tieto kolmé vzdialenosti budú presne výšky v $\triangle GFB$ na FG a v $\triangle GFD$ na FG.

Strana GF aj výšky na ňu v trojuholníkoch $\triangle GFB$ a $\triangle GFD$ sú zhodné, budú aj obsahy oboch trojuholníkov zhodné (to vyplýva z toho, že obsah vieme vyrátať ako polovicu súčinu dĺžky strany a výšky na ňu kolmej). Oba z týchto trojuholníkov obsahujú aj $\triangle GFH$, preto jeho obsah môžeme od každého z nich odpočítať a obsahy zvyšku budú tiež zhodné. Zostanú nám $\triangle FBH$ a $\triangle GHD$, ktoré majú zhodný obsah. To sme chceli dokázať.
Komentár: Pri riešení sa skúste aj pozrieť na to, akou cestou viete príklad vyrátať a čí neviete použiť skôr nejaké šikovnejšie kroky, ktoré znížia zložitosť riešenia, namiesto siahodlhých komplikovaných postupov. Odporúčame sa tiež zamyslieť nad používaním substitúcii[3], pri nevhodnom použití nám vedia riešenia viac skomplikovať, než by sme chceli.

Pri odvolávaní sa na podobnosť netreba zabúdať na to, poriadne zdôvodniť prečo (kvôli ktorým stranám) platí.

[2] Vetou *sus* označujeme poznatok o zhodnosti trojuholníkov. Ak dva trojuholníky majú rovnaké dve strany a uhol medzi nimi tak musia byť zhodné. Odporúčame čitateľovi, ak mu tento fakt nie je známy, si ho pohľadať na internete, alebo aspoň zhruba rozmyslieť.

[3] Pod substitúciou v tomto prípade rozumieme označenie, resp. nahradenie si nejakého výrazu, napr. $|AB|+|BC|$ neznámou, napr. x. Substitúciu zvykneme používať na zjednodušenie zápisu riešenia

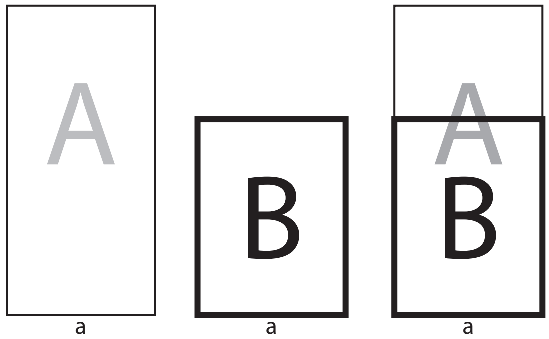
Chybou zvykne bývať aj tzv. „rysovací postup“, keď riešime príklad rysovaním. Problémom vtedy je, že príklad vyriešime iba pre ten konkrétny prípad, ktorý sme si narysovali a aj to nepresne. V správnom riešení nás ale zaujíma všeobecný prípad, nech by bod F ležal kdekoľvek na AB.

Dúfame, že si aspoň niektorú z týchto rád odnesiete do ďalšieho riešenia :)

Príklad č. 8 (opravoval Jumaj):

Zadanie: Najskôr nakazili plesňou jeden z každého druhu pečiva. Druhov pečiva mali 500. Každé pečivo malo tvar obdĺžnika s celočíselnými dĺžkami strán veľkosti aspoň 1 a najviac 999. Žiadny z týchto 500 obdĺžnikov sa "nezmestil" do žiadneho iného *(Pozn.: dva obdĺžniky sa do seba zmestia, ak ich vieme otočiť tak, aby jeden prekrýval celú plochu druhého, takže aj dva rovnaké obdĺžniky sa do seba zmestia)*. Dokážte, že aspoň jeden druh pečiva mal tvar štvorca.

Riešenie: V riešení by sme mali zjavne nejako využiť, že žiadne dva obdĺžniky sa do seba nezmestia. Ako prvé si preto všimnime, čo by sa stalo ak by dva rôzne obdĺžniky mali rovnako dlhú stranu. Ak by sme si ich predstavili vedľa seba, tak jeden z nich má stranu (tú ktorú nemusia mať rovnakú) aspoň tak dlhú ako druhý. Z obrázku 5 vidíme, že potom sa určite jeden z nich zmestí do druhého.



Obr. 5: Dva obdĺžniky s jednou rovnakou stranou sa do seba zmestia

Vyzbrojení týmto poznatkom, vieme zvyšok riešenia doťuknút dvomi spôsobmi:

Prvý z nich zakladá na pozorovaní, že obdĺžnikov je 500 a každý obdĺžnik je daný dvoma dĺžkami strán. To nám dokopy dáva 1000 dĺžok strán, ktoré musíme pre tieto obdĺžniky vybrať. Dĺžky strán sú ale len z rozsahu 1 až 999, čo nám dokopy dáva len 999 možností pre rôzne dĺžky strán.

Z toho vyplýva, že niektorú dĺžku musíme vybrať aspoň dva krát. Už sme ukázali, že dva rôzne obdĺžniky nemôžu mať rovnako dlhú stranu a preto bude musieť existovať jeden obdĺžnik s obomi stranami rovnako dlhými. Inými slovami bude štvorcom.

Odpoveď: Aspoň jeden druh pečiva má tvar štvorca, lebo jednu dĺžku strany vyberieme aspoň dva krát a dva rôzne obdĺžniky ju nemôžu mať.

Riešenie: Alternatívne predpokladajme, že žiaden z obdĺžnikov nie je štvorcom a žiadne dva sa do seba nezmestia. Potom vieme, že žiadnu dĺžku nevieme použiť dva krát (v rôznych obdĺžnikoch kvôli argumentu na obrázku 5, v rovnakom lebo žiaden nie je štvorcom). Pozrime sa teraz na dĺžku strany 999. Nejaký obdĺžnik ju bude musieť mať, aká môže byť jeho druhá strana? Ak by bola dlhšia ako 1, tak obdĺžnik so stranou dlhou 1 by sa do neho určite zmestil (jeho druhá strana by bola menšia ako 999).

Podobne vieme povedať, že obdĺžnik so stranou dĺžky 998, musí mať druhú stranu dlhú 2. Takto dostávame obdĺžniky:

$$1 \times 999, 2 \times 998, \ldots, 499 \times 501, \mathbf{500 \times 500}$$

Postupne vylučujeme dvojice, až kým nám neostane len dĺžka 500. Túto však nevieme spárovať so žiadnou inou, lebo potom by sa tieto dva obdĺžniky zmestili do seba. Tým dostávame spor s predpokladom, že žiaden obdĺžnik nie je štvorcom a našu 500-ticu obdĺžnikov zakončuje štvorec.

Druhé riešenie je možno komplikovanejšie, ale je aj názornejšie, keďže nám aj zostrojilo konkrétny prípad 500 obdĺžnikov spĺňajúcich zadanie.

Príklad č. 9 (opravovali Zajo, Mišo):

Zadanie: O tom, či to bolo jasné ako 42, však nebol majiteľ KúpTu! na 100% predvedčený. Mohlo to byť jasné ako niektoré z veľkého množstva iných čísel. Z množiny $\{1, 2, 3, ..., 99\}$ vyberte čo najväčší počet čísel tak, aby súčet žiadnych dvoch vybraných čísel nebol násobkom jedenástich. Vysvetlite, prečo zvolený výber má požadovanú vlastnosť a prečo žiadny výber väčšieho počtu čísel nevyhovuje.

Riešenie: Na začiatok si všimnime, že keď sčítame dve čísla, zvyšok ich súčtu po delení 11 je rovnaký ako súčet zvyškov pôvodnej dvojice čísel. Rozdeľme si preto pôvodnú množinu čísel na podmnožiny, podľa toho aký majú zvyšok po delení 11.

Podmnožín bude dokopy 11, tak ako možných zvyškov:

- zvyšok 0 : $\{11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99\}$
- zvyšok 1 : $\{1, 12, 23, 34, 45, 56, 67, 78, 89\}$
- zvyšok 2 : $\{2, 13, 24, 35, 46, 57, 68, 79, 90\}$
- zvyšok 3 : $\{3, 14, 25, 36, 47, 58, 69, 80, 91\}$
- zvyšok 4 : $\{4, 15, 26, 37, 48, 59, 70, 81, 92\}$
- zvyšok 5 : $\{5, 16, 27, 38, 49, 60, 71, 82, 93\}$
- zvyšok 6 : $\{6, 17, 28, 39, 50, 61, 72, 83, 94\}$
- zvyšok 7 : $\{7, 18, 29, 40, 51, 62, 73, 84, 95\}$
- zvyšok 8 : $\{8, 19, 30, 41, 52, 63, 74, 85, 96\}$
- zvyšok 9 : $\{9, 20, 31, 42, 53, 64, 75, 86, 97\}$
- zvyšok 10 : $\{10, 21, 32, 43, 54, 65, 76, 87, 98\}$

Vieme, že zvyšok po delení 11 musí byť menší ako 11. To znamená, že ak nám pri súčte dvoch čísel výjde zvyšok 11, bude to to isté ako keď nám výjde zvyšok 0 (12 bude to isté ako 1 atď.). Nula je práve ten zvyšok, ktorý nesmie výjsť pri žiadnej dvojici nami vybraných čísel. Vypíšme si, ktoré dvojice zvyškov majú po sčítaní hodnotu 0, resp. 11 (takých dvojíc je 5):

$$1 + 10 = 2 + 9 = 3 + 8 = 4 + 7 = 5 + 6 = 11$$

$$0 + 0 = 0$$

Čo to pre nás znamená? V takomto prípade si ľahko všimneme, že ak vyberieme číslo so zvyškom 1 a zároveň číslo so zvyškom 10 ich súčet bude deliteľný jedenástimi. Takéto dve čísla teda do nášho výberu obe dať nesmieme. Podobne sú na tom dvojice zvyškov $2 + 9, 3 + 8, 4 + 7, 5 + 6$. Inými slovami čísla môžme vyberať vždy len z jednej množiny zvyškov, ktoré tvoria dvojicu.

Čísel chceme vybrať čo najviac, ale každá množina čísel s rovnakým zvyškom je rovnako veľká, obsahuje 9 čísel. Môžeme si vybrať všetky čísla z piatich množín, ale viac už nie (zo žiadnej ďalšej už brať nemôžeme a zobrať menej než všetkých 9 z tých piatich sa nám tiež neoplatí). Vždy však vyberáme len jednu množinu z dvojíc zvyškov 1 a 10, 2 a 9, 3 a 8, 4 a 7, 5 a 6.

Ostala nám ešte množina čísel so zvyškom 0 po delení 11. Vidíme, že ak vyberieme dve čísla z tejto množiny súčet ich zvyškov bude 0. To znamená, že z tejto množiny môžeme vybrať najviac jedno číslo. Keď k číslu s iným zvyškom prirátame číslo so zvyškom 0 výsledný zvyšok sa nezmení a tým pádom tento súčet nebude deliteľný 11.

Celkový počet čísel je teda 5 podmnožín s nenulovým zvyškom $\cdot$ 9 čísel v každej podmnožine + 1 číslo deliteľné 11. $5 \cdot 9 + 1 = 46$

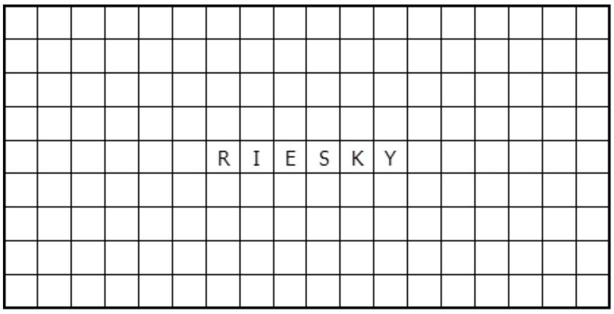
Odpoveď: Vieme vybrať najviac 46 čísel.

Komentár: Príklad ste vo väčšine prípadov zvládli naozaj dobre, občas sa vyskytli drobné chybičky vo vysvetľovaní, ale veľa bodov ste nestrácali.

Prémia (opravovali Zajo, Paľo):

Zadanie: Vložte do mriežky na obrázku 6 niektoré zo slov (ospravedlnení) z obrázka 7 tak, aby zostalo čo najmenej políčok prázdnych. Slová sa nesmú krížiť a môžu byť vložené len vo vodorovnom alebo zvislom smere. Slová sa tiež nesmú prevracať, tj. všetky slová musia byť čitateľné zľava doprava, alebo zhora dole (nikdy nie sprava, ani zdola). Každé slovo je možné použiť najviac raz. Okrem toho, vždy keď vkladáš nové slovo, aspoň jedno jeho písmeno sa musí dotýkať stranou s rovnakým písmenom, ktoré je už vložené v mriežke (Obr. 8).

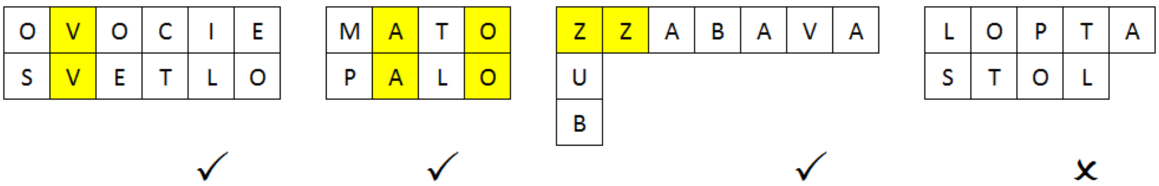
Riešenie:



Obr. 6: Mriežka veľkosti 9 × 18

ADVENTURKA	PLANIKOVA
BYROKRACIA	PONORKA
DRUBOJ	PREDNASKA
FRISBEE	ROZCVICKA
FUTBAL	SEMINAR
GRANDPRIX	SERIA
IZBOVKA	SIFRA
JUMAJ	SPORTY
LAMAC	SUSTREDENIE
MATBOJ	TETE
MATO	TOMASKO
NABOJ	VEDUCI
NOCNAHRA	ZAJO
PALO	ZUZKA

Obr. 7: Zoznam slov



Obr. 8: Príklad troch dobrých a jedného zlého priloženia

Zadanie bolo možné pochopiť dvomi spôsobmi. V oboch prípadoch sa však dala vyplniť celá tabuľka. Väčšina z vás ho pochopila spôsobom „po tom, čo vložíš nové slovo sa hneď musí stranou dotýkať aspoň jedného rovnakého písmena z iného slova“. V tomto prípade sa dá tabuľka vyplniť napríklad takto:

Druhý spôsob ktorým sa mohlo chápať zadanie bol: „Po tom, čo vložíš do mriežky všetky slová, ktoré chceš, vtedy sa musí každé slovo stranou dotýkať aspoň jedného rovnakého písmena z iného slova“. Tu je príklad kompletne vyplnenej tabuľky pri tomto spôsobe:

Odpoveď: Nech už zadanie pochopíme tak alebo onak, vždy sa dá vyplniť celá tabuľka.

Komentár: Niektorí ste to zvládli super, niektorí ste boli viac či menej blízko k zaplneniu celej tabuľky.

B	Y	R	O	K	R	A	C	I	A	T	O	M	A	S	K	O	G
A	D	V	E	N	T	U	R	K	A	P	O	N	O	R	K	A	R
S	P	L	A	N	I	K	O	V	A	I	Z	B	O	V	K	A	A
P	P	R	E	D	N	A	S	K	A	S	E	M	I	N	A	R	N
O	Z	U	Z	K	A	R	I	E	S	K	Y	J	U	M	A	J	D
R	S	U	S	T	R	E	D	E	N	I	E	N	A	B	O	J	P
T	F	R	I	S	B	E	E	T	E	T	E	L	A	M	A	C	R
Y	F	U	T	B	A	L	Z	A	J	O	V	E	D	U	C	I	I
R	O	Z	C	V	I	C	K	A	N	O	C	N	A	H	R	A	X

Obr. 9: Prvý prípad

F	U	T	B	A	L	L	A	M	A	C	D	R	U	B	O	J	N
F	R	I	S	B	E	E	G	R	A	N	D	P	R	I	X	Z	O
S	U	S	T	R	E	D	E	N	I	E	S	E	R	I	A	A	C
S	B	Y	R	O	K	R	A	C	I	A	S	I	F	R	A	J	N
P	N	A	B	O	J	R	I	E	S	K	Y	M	A	T	O	O	A
O	P	L	A	N	I	K	O	V	A	S	E	M	I	N	A	R	H
R	R	O	Z	C	V	I	C	K	A	T	O	M	A	S	K	O	R
T	P	R	E	D	N	A	S	K	A	I	Z	B	O	V	K	A	A
Y	P	O	N	O	R	K	A	A	D	V	E	N	T	U	R	K	A

Obr. 10: Druhý prípad