

Zadania 2. kola letnej série 2016/2017

Termín: 03.04.2017

Naša adresa: Riešky, Mgr. Viera Babišová, Gymnázium Grösslingová, Grösslingová 18, 811 09 Bratislava 1

Elektronické riešenia: <http://riesky.sk/>

Bol škaredý upršaný deň.

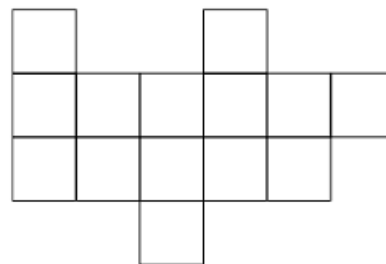
Bodaj by aj nebol, však pleseň sa z TamNekúp! rozrástla aj do KúpTu!. Strašlivý to deň.

Príklad č. 1:

Telo plesne je zložené zo štvorčekov. Majiteľ vie odstrániť iba dva štvorčeky plesne, lebo nemá viac čistiaceho prostriedku. Najúčinnější bude jeho zákrok vtedy, keď po ňom budú platiť tieto dve podmienky:

- **Pleseň ostane súvislá.** To znamená, že všetky jej štvorčeky sú poprepájané hranami (rohom nestačí).
- **Pleseň bude mať najväčší možný obvod.** Teda obvod sa odstránením dvoch štvorčekov zväčší o najviac, ako sa dá.

Ktorú dvojicu štvorčekov má majiteľ odstrániť, aby bol jeho zákrok najúčinnější? Nájdi všetky možnosti.



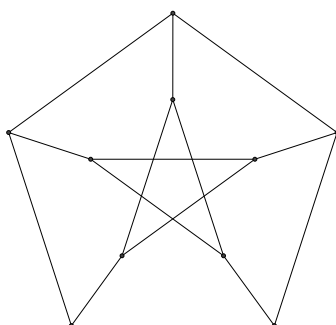
Obr. 1: Telo plesne

Majiteľovi KúpTu! sa podarilo nakoniec vyčistiť všetku pleseň, no stále nemal pokoj v duši. Plesne sa predsa nemohla len tak rozšíriť z TamNekúp!. Nieкто za tým musí byť. A čo ak je to nieкто z jeho vlastných radov? Nemohol by to byť Paľo? A čo ak je to Mišo? Musí to prešetriť. Najlepšie dotazníkom, ale tak nenápadne, aby na to jeho zamestnanci neprišli. Dal teda do svojho dotazníka všemožné, aj nemožné otázky, aby nikto neprišiel na jeho pravý zámer.



Príklad č. 2: Koľkými najmenej farbami sa dá vyfarbiť obrázok 2

tak, aby žiadne dve jeho časti susediace hranou nemali rovnakú farbu? Prečo menej farieb nestačí?



Obr. 2: Dotazníková úloha

Dotazník bol úspešný. Nájdené dôkazy majiteľa priviedli až k odľahlej časti obchodu. Najskôr sa zdalo, že je tam len veľa prachu a kuchynských spotrebičov, ktoré sa nepredali. Za trojdverovou chladničkou ale našiel niečo zaujímavé. Bol to panel so svetielkami a tlačidlami, ktorý nikdy predtým nevidel. Rozhodol sa preskúmať, čo tento prístroj robí.

Príklad č. 3: V odľahlom kúte obchodu je panel, na ktorom je 15 svietielok a tri tlačidlá.

- Prvé tlačidlo s nápisom “vymeň” rozsvieti všetky svietielka čo predtým nesvietili a zhasne všetky čo svietili.
- Druhé tlačidlo s nápisom “zhasniŠesť” funguje iba vtedy, ak svieti aspoň 6 svietielok. Jeho stlačením nejakých 6 svietielok zhasne.
- Tretie tlačidlo s nápisom “zažniDvakrát” funguje iba vtedy, ak svieti najviac 7 svietielok. Jeho stlačením sa zažne toľko ďalších svietielok, koľko ich už predtým svietilo.

Ak na začiatku svieti iba jedno svietielko, čo máme postláčať, aby svietili všetky? Dá sa to vôbec? Ak áno, popíš ako, ak nie, vysvetli prečo.

Keď majiteľ KúpTu! konečne zasvietil všetky svetlá, zbadal niečo, o čom sa mu nikdy ani len nesnívalo! Našiel tmavú podozrivú neidentifikovateľnú diery v stene. “Pekelné potkany!” povedal si. V tom si však uvedomil, že táto diera je priveľká na potkany, dokonca taká veľká, že by sa do nej zmestil, keby chcel. Majiteľ KúpTu! nepozeral veľa filmov, preto nemal ani poňatia o tom, čo sa mu môže stať, keď vojde do tmavej podozrivej neidentifikovateľnej diery v stene. A teda vošiel.

Príklad č. 4: Na stene jaskyne bola nakreslená legenda. O 6:00 ráno začalo niekoľko krtkov raziť prvú diery. Podľa plánov mala byť dvakrát väčšia ako druhá diera. Presne o 12:00 sa krtkovia rozdelili. Polovica pokračovala v razení prvej diery a druhá polovica začala raziť druhú diery. Skončili o 20:00 večer s tým, že prvú diery mali hotovú. Na druhej ostávalo toľko práce, že to zvládli na druhý deň traja krtkovia od 8:00 do 12:00. Koľko krtkov začalo v prvé ráno raziť diery?

Majiteľa táto legenda vcelku vystrašila. Nebol si totiž istý, či to naozaj boli krtkovia - s privretým okom totiž vyzerali skôr ako nahnevané gorily. Preto odtiaľ rýchlo odišiel, no nedalo mu to. Čo tam tá diera robila? Vedie niekam? Chodí tam niekto? Odpovede na svoje otázky sa rozhodol získať s pomocou súkromnej detektívky Karin. Tá si však najskôr nechala zaplatiť, až potom bola ochotná pracovať. Majiteľ sa pozrel na tú faktúru a zistil, že si asi bude musieť najatť ďalšieho súkromného detektíva (a to práve teba!) na vypátranie, koľko a ako to má vlastne zaplatiť. Karin si dopredu nechala zaplatiť istú čiastku. Majiteľ je však trochu zvláštny v tom, ako platí svoje účty, a rozhodol sa, že túto čiastku vyplatí nielen platením, ale aj vymáhaním si niektorých peňazí naspäť.

Príklad č. 5: Faktúra vyzerala takto:

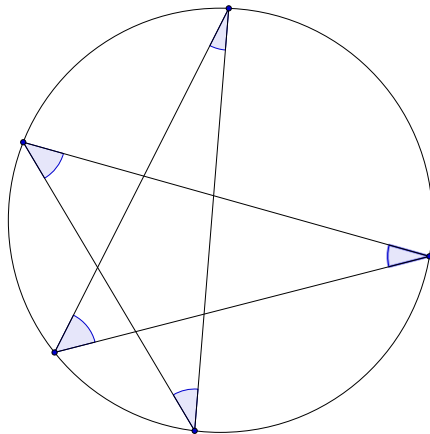
$$1_2_3_4_5_6_7_8_9_10_ \dots _2016 = 2017$$

Je naozaj veľa možností, ako na prázdne miesta vložiť + a – tak, aby na každom mieste bolo práve jedno znamienko. Koľko je však takých možností, aby rovnica platila?



Stálo to veľa, ale stálo to za to. Výsledky boli okamžité. Karin zistila, že to naozaj boli krtkovia a nie strašidelné gorily. Ostávalo však ešte veľa otázok na zodpovedanie. Niektoré boli zmyslupné, ako napríklad: Ako sa tu táto diera ocitla? Kedy prídu noví zákazníci a kúpia si veľkonočné koše? alebo Ako rozoznať krtka od gorily? To Karin nerobilo až taký problém, nasledujúcu otázku však vôbec nečakala.

Príklad č. 6: Máme kružnicu (Obr. 3) a na jej obode vyznačených 5 rôznych bodov. Každý z nich spojíme s ďalšími dvomi, ktoré s ním nesusedia na obode kružnice. Dokopy teda nakreslíme 5 čiar, ktoré budú tvoriť útvar podobný (nie nutne pravidelnej) päť-cípej hviezdy. Aký najväčší a aký najmenší môže byť súčet vnútorných uhlov v piatich cípoch hviezdy?



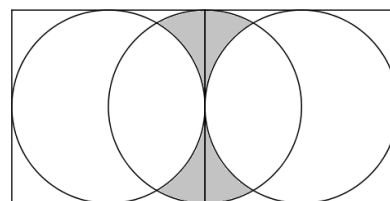
Obr. 3: Zvýraznené sú vnútorné uhly v cípoch, ktorých súčet hľadáme.

Karin úspešne našla to, čo majiteľ KúpTu! tak dlho hľadal. Nielenže vedela odpoveď na tento hviezdny problém, prišla s mnohými ústrižkami, stopami a dôkazovým materiálom, a tvrdila, že si je istá tým, čo tam tá diera robí, ako sa tam objavila, a dokonca aj koho zásluhou sa na tomto mieste nachádza.

Príklad č. 7: Každý papier s dôkazom alebo stopou, ktorý dala Karin majiteľovi, mal na sebe číslo. Čísla na papieroch boli po sebe idúce kladné celé čísla (nemuseli však začínať jednotkou). Súčet čísel na všetkých papieroch bol 15059072. Koľko papierov s dôkazovým materiálom dala Karin majiteľovi KúpTu!? Nájdi všetky možnosti.

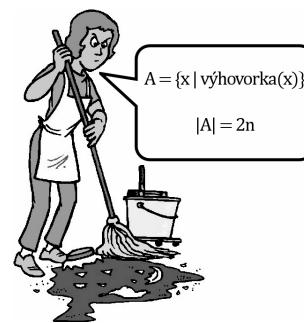
Majiteľ nasadil okuliare - najskôr slnečné, potom plavecké a nakoniec aj lyžiarske a pustil sa do čítania. Ako prvé mu Karin povedala, že to vôbec nie je len taká diera, dokonca ani jaskyňa to nie je, je to tunel! Zaviedla ho do tohto tunela a začala s výkladom: “Zmerala som fotosyntézu asimilovanú vulkanickou sedimentáciou na povrchu konvexného prokrastinátora narušeného kontempláciou a odvodila som z toho hodnotu aklimatizovanej dekadencie hydrosféry, ktorá bola brilantne distingvovaná, z čoho som usúdila, že 42 je odpoveďou na otázku života, vesmíru a všetkého.” Majiteľ sa na ňu pochybovačne pozrel: “A preto si komplikovaná?” Karin sa zamyslela. “Už viem, čo Vám otvorí oči!” víťazoslávne vyhlásila a dala mu dole najskôr lyžiarske, potom plavecké a nakoniec aj slnečné okuliare. Majiteľ zbadal. Hlboko v tuneli videl upratovačku, ako zametá oveľa usilovnejšie, ako ju kedy videl zametať v jeho obchode. “Veď to sa Vám tu celý čas snažím povedať,” vzdychla si Karin.

Príklad č. 8: Upratovačka v tuneli zametala takto: Predstavila si, že na zemi má vedľa seba dva rovnako veľké štvorce, ktoré majú spoločnú jednu stranu. V oboch sú vpísané kružnice. Ďalej si predstavila kružnicu, ktorá prechádza stredmi oboch štvorcov a oboma ich spoločnými vrcholmi. Pracovala síce usilovnejšie ako v obchode, ale stále je trochu lenivá a teda v tuneli uprace všetko okrem časti zvýraznenej na obrázku 4. Aký je obsah časti, kde upratovačka nebude zametať, ak dĺžka strany jedného zo štvorcov je x ?



Obr. 4: Tunel

“Tak toto čo má znamenať?” pomyslel si majiteľ KúpTu!. “Nielen, že u mňa v obchode je neustále špinavo, ale ty tu upratuješ tento temný podozrivý tunel?” tentokrát si to majiteľ nielen pomyslel, ale naozaj to upratovačke aj povedal. Karin sa, keď toto počula, pre istotu nenápadne vytratila. “A určite si to bola aj ty, čo priniesla plesň do môjho obchodu!” Bohužiaľ si neuvedomil, ako veľmi pravdivý bol tento jeho výrok. Skutočne, keby sa Karin nevytratila, povedala by presne to isté. Naozaj to bola upratovačka, ktorá priniesla plesň do KúpTu!



Príklad č. 9: Upratovačka na majiteľa vychrlila množinu $2n$ výhovoriek* v rovine, z ktorých žiadne tri výhovorky neležia na jednej priamke. Polovica z nich je pravdivých a druhá polovica sú klamstvá. Rozhodnite, či existuje takých n úsečiek, z ktorých žiadne dve nemajú spoločný bod a ich koncové body sú vždy dvojica pravdivej a nepravdivej výhovorky z množiny upratovačkiných výhovoriek.

*Pozn.: Výhovorky predstavujú body v rovine.

Medzi výhovorkami povedala aj niečo, čo u majiteľa zarezovalo. Ževraj do tunela chodila preto, aby sa tam stretávala s majiteľom obchodu TamNekúp!. A ešte k tomu všetkému, to bola pravdivá výhovorka! Všetko to začalo dávať zmysel, iste preto doniesla aj plesň do KúpTu!, či už náročky alebo nechtiac. K úplnej pravde bolo treba ešte urobiť kus práce. Postupne to však začalo do seba zapadať.

Prémia: Máš k dispozícii veľa informácii veľkosti 1. Väčšie informácie môžeš stavať pomocou menších informácii. Keď už postavíš informáciu určitej veľkosti, môžeš ju použiť ľubovoľne veľa krát. Napríklad môžeš postaviť informáciu veľkosti 2 z dvoch informácií veľkosti 1 a potom postaviť informáciu veľkosti 6 z troch informácií veľkosti 2. Pri stavbe však nemôžeš miešať informácie rôznych veľkostí a ani použiť len časť informácie. Napríklad nemôžeš postaviť informáciu veľkosti 3 z informácie veľkosti 2 a informácie veľkosti 1. Musíš na to použiť tri informácie veľkosti 1.

Stavanie však nie je zadarmo. Použitie informácie pri stavaní ťa vždy stojí 1 peniaz bez ohľadu na veľkosť informácie. Napríklad postavenie informácie veľkosti 5 by ťa stálo 5 peňazí (1 peniaz za každú z piatich informácií veľkosti 1). Keď už máš informáciu veľkosti 5, tak postavenie informácie veľkosti 10 z dvoch informácií veľkosti 5 stojí 2 peniaze (1 peniaz za každú z dvoch informácií veľkosti 5).

V nasledujúcich dvoch príkladoch si môžete pozrieť, ako sa informácie stavajú a aká je ich cena:

1. **Príklad 1:** Postavte informácie veľkosti 5 a 14.

Riešenie: Postavíme informáciu veľkosti 5 z piatich informácií veľkosti 1. To bude stáť 5 peňazí. Potom postavíme informáciu veľkosti 2 z dvoch informácií veľkosti 1 za 2 peniaze. Informáciu veľkosti 14 nakoniec postavíme zo siedmich informácií veľkosti 2 za 7 peňazí. Dokopy nás to stálo $5 + 2 + 7 = 14$ peňazí.

2. **Príklad 2:** Postavte informácie veľkosti 9 a 18.

Riešenie: Postavíme informáciu veľkosti 3 z troch informácií veľkosti 1 za 3 peniaze. Potom postavíme informáciu veľkosti 9 z troch informácií veľkosti 3 za 3 peniaze. Informáciu veľkosti 18 postavíme z dvoch informácií veľkosti 9 za 2 peniaze. Dokopy nás to stálo $3 + 3 + 2 = 8$ peňazí.

Majiteľ od teba chce, aby si mu postavil informácie týchto 10 veľkostí: 26, 32, 44, 66, 72, 88, 112, 128, 520 a 1170. Tvojou úlohou je splniť túto požiadavku za čo najmenšiu cenu. Popíš, ako by si skladal informácie a koľko by to stálo. Svoje riešenie nemusíš odôvodňovať.

“Druhý deň skončil veľkým odhalením,” povedal si majiteľ. Kto by to bol spočiatku pri toľkom daždi očakával? A povie majiteľ všetky podrobnosti tohto odhalenia aj nám? Ako sa vôbec niekomu ako je majiteľ TamNekúp! podarilo zbalit' niekoho ako upratovačku z KúpTu!? Dúfajme, že to pre nás neostane záhadou.