Vzorové riešenia 2. kola letnej série 2016/2017

Príklad č. 1 (opravovali Sára, Zajo):

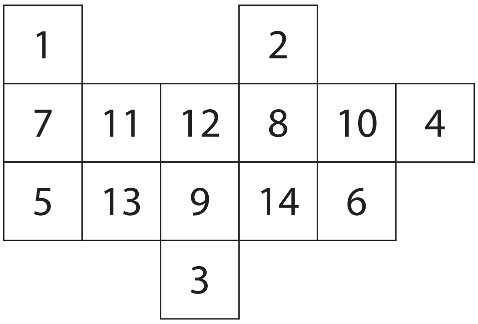
Zadanie:

Telo plesne je zložené zo štvorčekov. Majiteľ vie odstrániť iba dva štvorčeky plesne, lebo nemá viac čistiaceho prostriedku. Najúčinnejší bude jeho zákrok vtedy, keď po ňom budú platiť tieto dve podmienky:

- **Pleseň ostane súvislá.** To znamená, že všetky jej štvorčeky sú poprepájané hranami (rohom nestačí).
- **Pleseň bude mať najväčší možný obvod.** Teda obvod sa odstránením dvoch štvorčekov zväčší o najviac, ako sa dá.

Ktorú dvojicu štvorčekov má majiteľ odstrániť, aby bol jeho zákrok najúčinnejší? Nájdi všetky možnosti.

Riešenie: Na pleseň sa pozrieme postupne po jednotlivých typoch štvorčekov.



Obr. 1: Očíslovaná pleseň

Môžeme si všimnúť že keď odstránime štvorčeky 1, 2, 3, 4 obvod plesne sa zmenší o 2.

Ak by sme odstránili štvorčeky 5, 6 obvod plesne by sa nezmenil.

Po odstránení štvorčeka 7, 8, 9 alebo 10 sa pleseň stane nesúvislou, teda so štvorčekom 7 by sme museli odstrániť aj štvorček 1 (aby sa zachovala súvislosť) a obvod by sa zmenšil o 2. S 8 by sme museli odstrániť aj 2 a obvod by sa nezmenil, s 9 by sme odstránili aj 3 a obvod by sa nezmenil a s 10 by sme odstránili 4 a obvod by sa zmenšil o 2.

Zostali nám štvorčeky 11, 12, 13, 14. Po odstránení ľubovoľného z nich sa obvod plesne zväčší o 2. Ak by sme však odstránili 13 a 12, 11 a 13 alebo 12 a 14 zároveň, pleseň by sa stala nesúvislou. Ak by sme odstránili 11 a 12, obvod plesne by sa zväčšil len o 2 pretože majú spoločnú stranu. Teda najvýhodnejšie možnosti odstránenia sú 13 a 14 alebo 11 a 14, vtedy zväčšíme odvod maximálne a to o 4.

Odpoveď: Dvojice štvorčekov ktoré po odstránení zväčšia obvod najviac sú 13 s 14 a 11 s 14.

Komentár: Všetci ste úlohu vyriešili správne, jediné na čo si treba dať pozor je zdôvodnenie prečo je práve tento obvod ten najväčší a či naozaj neexistujú žiadne ďalšie možnosti.

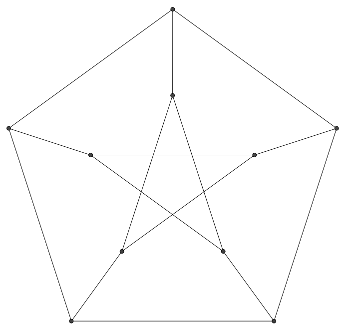
Príklad č. 2 (opravoval MaťoPaťo):

Zadanie: Koľkými najmenej farbami sa dá vyfarbiť obrázok 3 tak, aby žiadne dve jeho časti susediace hranou nemali rovnakú farbu? Prečo menej farieb nestačí?

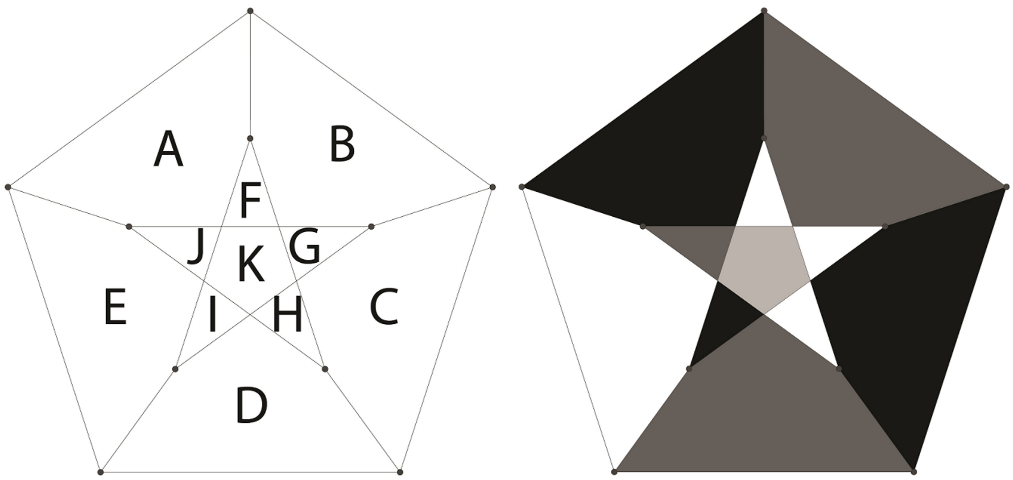
Riešenie:

Do riešenia takéhoto príkladu sa dá pustiť viacerými spôsobmi. Jeden zo spôsobov je, že ukážeme že to sa to dá spraviť s n farbami a potom budeme dokazovať, že na menej to ísť nemôže. Druhý je, že budeme postupne, systematicky robiť kroky vedúce k cieľu (ofarbenie obrázku) a každý krok odôvodníme, prečo sme ho museli spraviť. Týmto druhým spôsobom sa dnes vydáme.

Všimnime si hneď na začiatku oblasti A, B a F (Obr. 3 vľavo). Tieto oblasti sa dotýkajú hranov každá s každou, z čoho môžeme usúdiť, že na ofarbenie musíme použiť aspoň 3 farby. Týmmito troma farbami ofarbime oblasti A až E. Rozmyslite si, že vzhľadom na to, že týchto oblastí je 5 a sú usporiadane do kruhu, môžeme z nich ofarbiť maximálne 2 jednou farbou. Teda 2 budú ofarbené prvou farbou, 2 budú druhou a jedna treťou.



Obr. 2: Dotazníkova úloha



Obr. 3: Vyfarbenie obrázku

Chceme čo najmenší počet farieb a preto pokračujme ofarbovaním iba s troma farbami. Trojuholníkove oblasti F až J sa dotýkajú vždy dvoch rôznych farieb a preto ich farba je vždy z našich troch farieb jednoznačne určená a je to tá ostávajúca. Podarilo sa nám zafarbiť všetky oblasti až na oblasť K troma farbami. Tá sa ale dotýka všetkých 3 farieb (a nezávisle od ofarbenia oblastí A až E vždy bude), z čoho vyplýva, že na ofarbenie potrebujeme aspoň 4 farby.

Už nám ostáva iba jedna vec, na ktorú nesmieme zabudnúť a tou je ukážka, že sa obrázok štyrmi farbami zafarbiť naozaj dá.

Odpoveď: Na ofarbenie obrázka podľa pravidiel potrebujeme aspoň 4 farby. Ukážka ako sa to dá je na obrázku 3.

Komentár: Šikovní ste. Všetci ste prišli na správny výsledok, no nezabúdajte, že poriadne a podrobne popisovať vaše myšlienkové postupy je pri písaní riešení veľmi dôležité.

Príklad č. 3 (opravovala Tete):

Zadanie: V odľahlom kúte obchodu je panel, na ktorom je 15 svetielok a tri tlačidlá.

- Prvé tlačidlo s nápisom "vymeň" rozsvieti všetky svetielka čo predtým nesvietili a zhasne všetky čo svietili.
- Druhé tlačidlo s nápisom "zhasniŠesť" funguje iba vtedy, ak svieti aspoň 6 svetielok. Jeho stlačením nejakých 6 svetielok zhasne.
- Tretie tlačidlo s nápisom "zažniDvakrát" funguje iba vtedy, ak svieti najviac 7 svetielok. Jeho stlačením sa zažne toľko ďalších svetielok, koľko ich už predtým svietilo.

Ak na začiatku svieti iba jedno svetielko, čo máme postláčať, aby svietili všetky? Dá sa to vôbec? Ak áno, popíš ako, ak nie, vysvetli prečo.

Riešenie: Pre prehľadnosť si spravíme tabuľku do ktorej vpíšeme pre každý počet zasvietených svetielok to, ako sa budú meniť stáčaním jednotlivých tlačidiel.

Počet zasvietených svetiel	Vymeň	ZhasniŠesť	ZažniDvakrát
0	15	X	0
1	14	X	2
2	13	X	4
3	12	X	6
4	11	X	8
5	10	X	10
6	9	0	12
7	8	1	14
8	7	2	X
9	6	3	X
10	5	4	X
11	4	5	X
12	3	6	X
13	2	7	X
14	1	8	X
15	0	9	X

Tabuľka 1: Tabuľka zasvecovania svetielok

- Pokiaľ najskôr svieti 1 zasvietené svetlo, vieme ho prepnúť na 14 alebo 2 zasvietené svetlá.
  - 14 zasvietených svetiel vieme zmeniť na 1 zasvietené svetlo alebo 8 zasvietených svetiel.
    - 1 svetlo už sme v postupe mali a teda keby sme ho zasvietili, vráti nás to na predchádzajúci krok.
    - 8 zasvietených svetiel vieme vymeniť za 7 zasvietených svetiel, alebo 2 zasvietené svetlá.
      - Zo 7 zasvietených svetiel sa vieme dostať na 8, 1 alebo 14 svetiel. Na každom z týchto stavov už sme boli a teda touto cestou sa na 15 svetiel nedostaneme.
- Z 2 zasvietených svetiel sa vieme vypínačmi dostať na 13 alebo 4 zasvietené svetlá.
  - 13 zasvietených vieme vymeniť za 2 alebo 7. Obe sme už mali v postupe.
  - 4 zasvietené svetlá vieme prepnúť na 11 alebo 8.
    - 8 už sme mali, 11 prepneme na 4 alebo 5.
    - 5 zasvietených svetiel vieme prepnúť na 10 zasvietených, 4 zasvietené svetlá už v postupe sú.
    - 10 svetiel ktoré svietia vieme stláčaním vypínačov prepnúť na 5 alebo 4 zasvietené svetlá a obe už sme v postupe mali a teda na 15 zasvietených svetiel sa nedá dostať.

Iné riešenie:

Z tabuľky vidíme, že 15 sa dá dosiahnuť iba keď stlačím „vymeň“ pri zasvietených 0 svetlách. K tomu sa viem dopracovať iba zo 6 zasvietených svetiel (pokiaľ neberieme do úvahy 15 zasvietených svetiel). Ku 6 zasvieteným svetlám sa vieme dostať z 9, 12 alebo 3 zasvietených svetiel, teda z počtu zasvietených svetiel ktorý je deliteľný tromi.

- Tlačidlo „zhasniŠesť“ odpočíta 6 zasvietených svetiel (odráta číslo deliteľné 3) a teda nám číslo deliteľné 3 zmení na číslo deliteľné 3. Číslo nedeliteľné 3 zmení na číslo nedeliteľné 3.
- Tlačidlo „zažniDvakrát“ zdvojnásobí číslo počtu zasvietených svetiel a teda zdvojnásobí aj zvyšok po delení 3 a nezmení deliteľnosť 3 tohto čísla.
- Tlačidlo „vymeň“ nám vypočíta nový počet zasvietených svetiel, ktorý je 15-pôvodný počet zasvietených svetiel. Teda taktiež nezmení deľiteľnosť 3.

Vidíme teda, že k počtu zasvietených svetiel 15 sa vieme dostať len z počtu zasvietených svetiel, ktorý je deliteľný tromi. Číslo 1 nie je deliteľné tromi a teda nie je možné postláčať vypínače tak, aby svietili všetky.

Odpoveď: Zasvietiť všetky svetlá stláčaním vypínačov pri pôvodne zasvietenom 1 svetle nie je možné.
Komentár: Príklad ste mali väčšinou správne, pokiaľ vám chýbal nejaký ten bodík bolo to hlavne z nepresného popísania dôvodu, ale to sú už iba detaily.

Príklad č. 4 (opravovali Emil, Gabika Š.):

Zadanie: Na stene jaskyne bola nakreslená legenda. O 6:00 ráno začalo niekoľko krtkov raziť prvú dieru. Podľa plánov mala byť dvakrát väčšia ako druhá diera. Presne o 12:00 sa krtkovia rozdelili. Polovica pokračovala v razení prvej diery a druhá polovica začala raziť druhú dieru. Skončili o 20:00 večer s tým, že prvú dieru mali hotovú. Na druhej ostávalo toľko práce, že to zvládli na druhý deň traja krtkovia od 8:00 do 12:00. Koľko krtkov začalo v prvé ráno raziť diery?
Riešenie: Najprv si spresníme, koľko krtkov a ako dlho pracovali na prvej diere. Ráno, v čase od 6:00 do 12:00 to boli všetci krtkovia a pracovali takto 6 hodín (12:00 − 6:00 = 6 hodín). Potom sa krtkovia rozdelili na dve polovice a na tejto diere ostala polovica krtkov pracovať 8 hodín (20:00 − 12:00 = 8 hodín). Ak tu pracovala polovica krtkov osem hodín, všetci krtkovia by do zvládli za polovičný čas, čo sú 4 hodiny. V tento večer už bola prvá diera dokončená a preto vieme povedať, že všetci krtkovia by ju stihli vykopať za 10 hodín ($6 + 4 = 10$ hodín).

Na druhej diere pracovala v prvý deň polovica krtkov 8 hodín, čiže vieme, že všetci krtkovia by to zvládli za 4 hodiny. Diera však nebola dokončená a tak na druhý deň museli ešte traja krtkovia kopať 4 hodiny (12:00 − 8:00 = 4 hodiny). Vieme, že druhá diera je dvakrát menšia ako prvá, teda by ju museli všetci krtkovia kopať dvakrát kratšie.

My vieme, že všetci krtkovia kopali prvú dieru 10 hodín. Druhú dieru teda museli kopať všetci 5 hodín ($10 \div 2 = 5$). Ďalej vieme, že v prvý večer ju akoby kopali všetci krtkovia 4 hodiny. Ten zvyšok, čo museli traja krtkovia ráno dokopať by teda zvládli všetci za 1 hodinu ($5 - 4 = 1$). To čo by urobili všetci krtkovia za hodinu, urobili traja štyrikrát pomalšie a to za 4 hodiny. Muselo ich teda byť aj štyrikrát menej. Všetkých krtkov teda bolo 12 ($3 \cdot 4 = 12$).
Odpoveď: : Ráno začalo prvú dieru kopať 12 krtkov.
Komentár: : Bolo veľmi milé prekvapenie, že všetci ste našli správny výsledok. Ak ste k nemu prišli skúšaním, často ste zabudli napísať, prečo je jediný a ďalšie riešenie ste už jednoducho nehľadali. Tento príklad sa dal riešiť aj veľmi peknou rovnicou, ktorú ale bolo treba poriadne vysvetliť.

Príklad č. 5 (opravovali Zajo, MaťoV):

Zadanie: Faktúra vyzerala takto:

$$1\_2\_3\_4\_5\_6\_7\_8\_9\_10\_\ldots\_2016 = 2017$$

Je naozaj veľa možností, ako na prázdne miesta vložiť + a − tak, aby na každom mieste bolo práve jedno znamienko. Koľko je však takých možností, aby rovnica platila?
Riešenie: Keď dostaneme takýto príklad, tak ako prvé je dobré si skúsiť povymýšľať nejaké kombinácie znamienok, ktoré by spĺňali rovnicu zo zadania. Po chvíli ale zistíme, že sa nám veľmi nedarí nájsť takú kombináciu znamienok, aby zadanie platilo.

Vtedy prechádzame do časti, kedy sa pokúšame dokázať prečo to nepôjde. Možností ako na to prísť bolo viacero, ukážme si tú najpriamočiarejšiu.

Ak by sme všade dali znamienka +, tak na ľavej strane dostaneme súčet:

$$1 + 2 + 3 + \cdots + 2016 = \frac{2016 \cdot 2017}{2} = 2033136$$

Ak pri čísle k zmeníme znamienko, tak hodnota na ľavej strane sa zmení o $-(+k) + (-k) = -2k$. Dokopy sa teda zmenší o dvojnásobok čísla, pri ktorom sme menili znamienko.

Všimnime si teraz, že ak dosadíme samé znamienka +, tak na ľavej strane dostaneme párny súčet. Ak meníme znamienka pri číslach, tak sa hodnota na ľavej strane rovnice mení o párne číslo. Ak od párneho čísla odpočítame párne, dostávame opäť párne číslo.

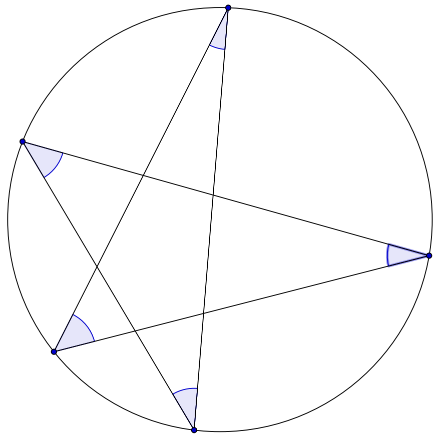
Na pravej strane rovnice máme ale nepárne číslo, zatiaľ čo na ľavej stále párne, tým pádom nebude existovať ani jedna možnosť ako doplniť znamienka tak, aby rovnica platila.

Odpoveď: Znamienka nie je možné doplniť tak, aby rovnica platila.

Príklad č. 6 (opravovali Zajo, Mišo):

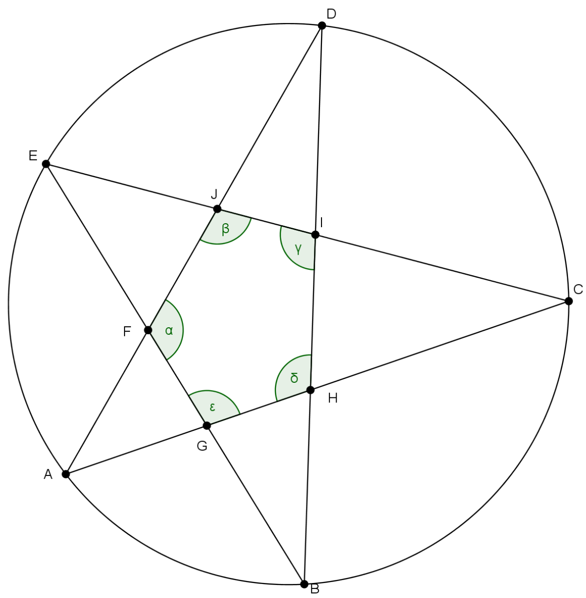
Zadanie: Máme kružnicu (Obr. 4) a na jej obvode vyznačených 5 rôznych bodov. Každý z nich spojíme s ďalšími dvomi, ktoré s ním nesusedia na obvode kružnice. Dokopy teda nakreslíme 5 čiar, ktoré budú tvoriť útvar podobný (nie nutne pravidelnej) päť-cípej hviezde. Aký najväčší a aký najmenší môže byť súčet vnútorných uhlov v piatich cípoch hviezdy?

Riešenie:



Obr. 4: Zvýraznené sú vnútorné uhly v cípoch, ktorých súčet hľadáme.

Nech si vezmeme ľubovoľnú päťcípu hviezdu, môžme si všimnúť, že v jej strede vznikne päťuholník. Jeho uhly si označíme $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon$ ako na obrázku 5. Ich súčet bude vždy $540°$ (súčet vnútorných uhlov 5-uholníka). Nás však zaujíma súčet uhlov v cípoch hviezdy.



Obr. 5: Označené uhly päťuholníka

Z obrázka vidíme, že tieto uhly sa nachádzajú vo vrcholoch trojuholníkov, ktoré susedia stranami s päťuholníkom uprostred. Tieto trojuholníky majú tiež vnútorné uhly pri vrcholoch päťuholníka. Môžeme si všimnúť, že tieto uhly sú susedné s uhlami v päťuholníku. To znamená, že spolu so susedným uhlom v päťuholníku musia mať dokopy veľkosť 180°. Takto si vieme postupne označiť veľkosti týchto uhlov ako 180°− susedný uhol päťuholníka.

Nakoľko je súčet uhlov v trojuholníku vždy 180°, dokážeme teraz vyjadriť uhly vo cípoch pomocou uhlov päťuholníka.

$$|\angle GAF| = 180 - (180 - \alpha) - (180 - \epsilon) = \alpha + \epsilon - 180$$
$$|\angle HAG| = 180 - (180 - \epsilon) - (180 - \delta) = \delta + \epsilon - 180$$
$$|\angle IAH| = 180 - (180 - \delta) - (180 - \gamma) = \delta + \gamma - 180$$
$$|\angle JAI| = 180 - (180 - \gamma) - (180 - \beta) = \beta + \gamma - 180$$
$$|\angle FAJ| = 180 - (180 - \beta) - (180 - \alpha) = \beta + \alpha - 180$$

Teraz nám už nič nebráni ich sčítať.

$$|\angle GAF| + |\angle HAG| + |\angle IAH| + |\angle JAI| + |\angle FAJ| =$$
$$\alpha + \epsilon - 180 + \delta + \epsilon - 180 + \delta + \gamma - 180 + \beta + \gamma - 180 + \beta + \alpha - 180 =$$
$$2\alpha + 2\beta + 2\gamma + 2\delta + 2\epsilon - 5 \cdot 180$$

Teraz si už len uvedomíme, že sa v našom súčte nachádza každý vnútorný uhol päťuholníka práve dvakrát. Keďže súčet všetkých vnútorných uhlov päťuholníka je vždy 540°, vieme túto hodnotu doplniť do rovnice a dorátať výsledný súčet. Už teraz vidíme, že nám vyjde jedno číslo, bez ohľadu na to kam by sme body na kružnicu umiestnili.

$$2 \cdot 540 - 5 \cdot 180 = 180°$$

Odpoveď: Súčet uhlov v päťcípej hviezde bude vždy rovnaký, konkrétne 180°.
Komentár: Väčšina z vás zvládla príklad naozaj dobre. Niektorí ste využili stredové a obvodové uhly, prípadne ste si uhly v trojuholníku vyjadrili pomocou uhlov z päťuholníka, čo boli taktiež správne postupy. Najčastejšie chyby spočívali v chýbajúcom popise toho ako ste vypočítali uhly.

Príklad č. 7 (opravovali Mišof, Zuzka V.):

Zadanie: Každý papier s dôkazom alebo stopou, ktorý dala Karin majiteľovi, mal na sebe číslo. Čísla na papieroch boli po sebe idúce kladné celé čísla (nemuseli však začínať jednotkou). Súčet čísel na všetkých papieroch bol 15059072. Koľko papierov s dôkazovým materiálom dala Karin majiteľovi KúpTu!? Nájdi všetky možnosti.
Riešenie: Našou úlohou bolo nájsť všetky prípady, kedy má niekoľko po sebe idúcich prirodzených čísel súčet 15 059 072.

Ako si s takouto úlohou poradiť? Problém je v tom, že nevieme ani to, koľko tých čísel je, ani to, aké sú veľké. Samozrejme, keby nám niekto prezradil jednu z týchto dvoch informácií, vedeli by sme si dopočítať druhú. Napríklad keby sme vedeli, že hľadáme súčet 7 čísel, ľahko už dopočítame, ako musia byť veľké, aby to vyšlo. Lenže nik nám neporadí a všetkých možností je priveľa na to, aby sme si mohli dovoliť všetky ich vyskúšať. Budeme musieť prísť na niečo šikovnejšie.

Nepárny počet papierov

Pozrime sa najskôr na možnosť, že hľadaný počet čísel je nepárny. Ak máme nepárny počet po sebe idúcich čísel, ich súčet zistíme tak, že prostredné z nich vynásobíme ich počtom. Napríklad súčet $11 + 12 + 13 + 14 + 15$ je zjavne rovnaký ako súčet $13 + 13 + 13 + 13 + 13$: čo v prvých sčítancoch do 13 chýbalo, to je v posledných navyše.

To isté si môžeme zapísať pomocou premenných. Ak máme nepárny počet čísel, určite existuje nejaké $k \geq 0$ také, že ich je presne $2k+1$. Ak si prostredné číslo označíme x, celý náš súčet potom vyzerá nasledovne:

$$(x - k) + (x - k + 1) + \cdots + (x - 1) + x + (x + 1) + \cdots + (x + k - 1) + (x + k)$$

Ľahko overíme, že hodnota tohto súčtu je $(2k+1)\cdot x$. Ak má byť tento súčet rovný 15 059 072, musí teda byť hľadaný počet čísel deliteľom tohto čísla.

Ručným delením (alebo za pomoci kalkulačky či počítača) ľahko zistíme, že $15\,059\,072 = 2^7 \cdot 7^6$. Ak má teda počet čísel byť nepárny, musí to byť 1, 7, 7^2, ..., alebo 7^6.

Nie všetky tieto možnosti sú však platnými riešeniami našej úlohy. Prečo? Pretože čím viac čísel máme, tým menšie je stredné z nich, a od istej hranice sa nám potom stane, že už niektoré zo sčitovaných čísel budú záporné.

Kde je táto hranica? Ak by sme mali $7^4 = 2\,401$ papierov, bolo by $x = 15\,059\,072/2\,401 = 6\,272$. Ak má stredný z 2 401 papierov číslo 6 272, majú tieto papiere čísla od 5 072 po 7 472, čiže toto je ešte platné riešenie.

Pre $7^5 = 16\,807$ papierov však už dostaneme $x = 896$ a teda by papiere mali mať čísla začínajúce od $-7\,507$. Táto možnosť už teda nie je riešením našej úlohy.

Dokopy sme teda zistili, že ak Karin mala nepárny počet papierov, bolo to jedno z čísel 1, 7, 49, 343 a 2 401.

Párny počet papierov

Ak je počet papierov párny, súčet ich čísel dostaneme napríklad tak, že súčet prostredných dvoch vynásobíme polovicou ich počtu. Napríklad súčet $11 + 12 + 13 + 14 + 15 + 16$ môžeme rozdeliť na tri dvojice s rovnakým súčtom: $11 + 16$, $12 + 15$ a $13 + 14$.

Opäť si to isté zapíšeme aj pomocou premenných. Ak máme $2k$ čísel, z ktorých prostredné dve sú x a $x + 1$, celý súčet vyzerá nasledovne:

$$(x-k+1)+\cdots+(x-1)+x+(x+1)+\cdots+(x+k-1)+(x+k)$$

Ľahko overíme, že hodnota tohto súčtu je $k \cdot (2x + 1)$.

No a toto je skoro tá istá situácia ako predtým. Chceme, aby platilo $k \cdot (2x + 1) = 15\,059\,072$. Číslo k je teda deliteľom zadaného čísla 15 059 072.

Navyše si môžeme všimnúť, že číslo 15 059 072 je deliteľné 2^7 zatiaľ čo číslo $2x + 1$ je určite nepárne. Aby aj ľavá strana rovnice $k \cdot (2x + 1) = 15\,059\,072$ bola deliteľná 2^7, musí byť 2^7 deliteľné číslo k.

Začnime teda skúšať možnosti pre k.

Ak $k = 2^7 = 128$, máme $2k = 256$ papierov a dostávame, že $2x + 1 = 15\,059\,072/128 = 117\,649$. Z toho už ľahko dopočítame, že čísla na papieroch budú od 58 697 po 58 952.

Ak $k = 7 \cdot 2^7 = 896$, máme $2k = 1\,792$ papierov a čísla na papieroch budú od 7 508 po 9 299.

Ak $k = 7^2 \cdot 2^7 = 6272$, už dostaneme, že najmenšie číslo papiera by muselo byť záporné. Toto k nám už teda nedá platné riešenie. A navyše vieme, že nemá zmysel skúšať žiadne väčšie k, lebo tým zodpovedá viac papierov a menšie čísla prostredných z nich, čiže aj vo všetkých ostatných prípadoch by sme už dostali záporné čísla na papieroch.

Dokopy nám v tejto možnosti teda pribudli dve riešenia: papierov mohlo byť 256 alebo 1 792.

Stručnejšie riešenie

Namiesto rozboru možností sa dalo postupovať aj nasledovne: Označme si počet čísel k a najmenšie z nich x. Súčet všetkých čísel má potom hodnotu $xk + k(k-1)/2$. Táto hodnota sa má rovnať 15 059 072. Túto rovnicu vieme upraviť do nasledujúcej podoby: $k(2x + k - 1) = 30\,118\,144 = 2^8 \cdot 7^6$.

Podobne ako vo vyššie uvedenom riešení si teraz môžeme všimnúť, že k musí byť deliteľom čísla $2^8 \cdot 7^6$. Môžeme však spraviť dve pozorovania navyše. V prvom rade si môžeme všimnúť, že čísla k a $2x + k - 1$ majú opačnú paritu. Jedno z nich je teda nepárne, čiže musí byť mocninou siedmich.

Druhým pozorovaním je, že keďže x má výjsť kladné, dobré riešenia sú práve tie, v ktorých $2x+k-1 > k$. Keď teda zapíšeme 30 118 144 ako súčin párneho a nepárneho čísla, to menšie z nich bude k a to väčšie bude $2x + k - 1$. Pre každú mocninu siedmich takto dostaneme práve jedno riešenie našej úlohy.

Odpoveď: Je 7 možností pre počet papierov, ktoré Karin odovzdala. Mohlo ich byť 1, 7, 49, 256, 343, 1 792 alebo 2 401.

Komentár: S úlohou ste sa popasovali dobre. Viacerí z vás však prehliadli niektoré riešenia. Asi najčastejšie ste zabúdali prekvapivo na to najzjavnejšie – na možnosť, že Karin mala len jediný papier s číslom 15 059 072. Ak ste zabudli len na tú, body sme vám nestrhli, nabudúce si na to ale dajte pozor!

(Keby ste matematikovi ukázali len jeden papier, povie vám, že čísla na papieroch, ktoré ste mu ukázali, idú po sebe. To isté by povedal aj keby ste mu ukázali nula papierov :) Len pochopiteľne súčet čísel na nula papieroch nebude 15 059 072.)

Viacerí ste sa nás snažili presvedčiť, že počet papierov musí byť deliteľom zadaného čísla. Toto ale nie je vo všeobecnosti pravda. Predstavte si napríklad, že by zadané číslo bolo 10. Toto vieme zapísať ako 1+2+3+4, avšak 10 nie je deliteľné štyrmi.

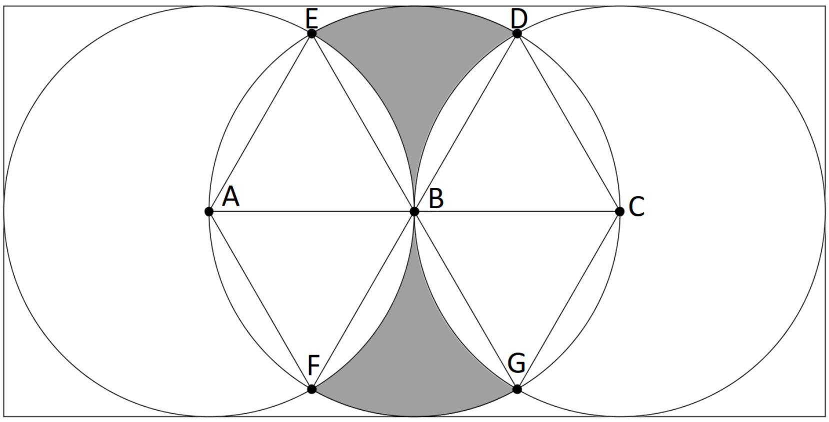
Príklad č. 8 (opravovali Lámač, Kubo):

Zadanie: Upratovačka v tuneli zametala takto: Predstavila si, že na zemi má vedľa seba dva rovnako veľké štvorce, ktoré majú spoločnú jednu stranu. V oboch sú vpísané kružnice. Ďalej si predstavila kružnicu, ktorá prechádza stredmi oboch štvorcov a oboma ich spoločnými vrcholmi. Pracovala síce usilovnejšie ako v obchode, ale stále je trochu lenivá a teda v tuneli uprace všetko okrem časti zvýraznenej na obrázku 6. Aký je obsah časti, kde upratovačka nebude zametať, ak dĺžka strany jedného zo štvorcov je x?

Riešenie: Všetky tri kružnice majú polomer $\frac{x}{2}$, lebo sú vpísané do štvorcov so stranou dĺžky x a stredy štvorcov sú od seba vzdialené x. Ďalej vieme, že

$$\triangle ABE, \triangle ABF, \triangle BCD, \triangle BCG$$

sú rovnostranné, lebo všetky ich strany sú tvorené polomermi kružníc.



Obr. 6: Situácia zo zadania

Obsah vyfarbenej plochy vieme vypočítať ako obsah kružnice so stredom B od ktorého odpočítame obsahy prienikov so susednými kružnicami. Tieto prieniky majú rovnaké obsahy vďaka symetrií celej situácie.

Polovica obsahu jedného prieniku sa dá vyskladať z obsahu kruhového výseku AE kružnice so stredom v B a kruhového odseku EB. Zo symetrie tiež vieme, že všetky výseky sú zhodné a podobné odseky.

Obsah jedného odseku vieme vypočítať ako rozdiel obsahu kruhového výseku a obsahu rovnostranného trojuholníka so stranou $\frac{x}{2}$.

Keďže výseky majú vpísané rovnostranné trojuholníky, tak sú tvorené uhlom 60°, teda ich obsah je šestinou obsahu celej kružnice:

$$\frac{1}{6}\pi\left(\frac{x}{2}\right)^2$$

Obsah rovnostranného trojuholníka [1] so stranou $\frac{x}{2}$ je:

$$\frac{a \cdot v_a}{2} = \frac{1}{2}\frac{x}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{x}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{16}x^2$$

[1] Ak máme stranu dlhú a v rovnostrannom trojuholníku, tak výška je vo všeobecnosti dlhá $\frac{\sqrt{3}}{2}a$. K tomuto záveru sa dá dospieť po použití pytagorovej vety na trojuholník tvorený dvomi vrcholmi a pätou výšky.

Polovica obsahu jedného prieniku je:

$$\frac{1}{6}\pi\left(\frac{x}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{6}\pi\left(\frac{x}{2}\right)^2-\frac{\sqrt{3}}{16}x^2\right)=x^2\left(\frac{1}{12}\pi-\frac{\sqrt{3}}{16}\right)$$

Prieniky sú 2, preto ich celkový obsah je štvornásobkom predchádzajúceho výsledku:

$$x^2\left(\frac{1}{3}\pi-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$$

Aby sme dostali obsah vyfarbených častí, stačí nám od obsahu jedného kruhu s polomerom $\frac{x}{2}$ odrátať obsah dvoch prienikov:

$$\frac{x^2\pi}{4}-x^2\left(\frac{1}{3}\pi-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)=x^2\left(\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{\pi}{12}\right)=\frac{1}{4}x^2\left(\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}\right)$$

Odpoveď: Upratovačka nebude zametať na časti veľkej $\frac{1}{4}x^2\left(\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}\right)$.

Príklad č. 9 (opravoval Zajo):

Zadanie: Upratovačka na majiteľa vychŕlila množinu $2n$ výhovoriek* v rovine, z ktorých žiadne tri výhovorky neležia na jednej priamke. Polovica z nich je pravdivých a druhá polovica sú klamstvá. Rozhodnite, či existuje takých n úsečiek, z ktorých žiadne dve nemajú spoločný bod a ich koncové body sú vždy dvojica pravdivej a nepravdivej výhovorky z množiny upratovačkiných výhovoriek.

**Pozn.:* *Výhovorky predstavujú body v rovine.*

Riešenie: V tomto vzorovom riešení sa pozrieme na dva možné prístupy k príkladu.

V prvom bude našou snahou bude nájsť nejaké konkrétne charakterizované pospájanie[2] bodov (výhovoriek) o ktorom následne dokážeme, že sa v ňom žiadne dve úsečky nepretínajú (nemajú spoločný bod). Dôkaz takéhoto tvrdenia zvyčajne prebieha sporom. Inými slovami zistíme, že ak by sa v našom pospájaní niečo pretínalo, tak je niekde problém v tom, čo sme považovali za pravdivé.

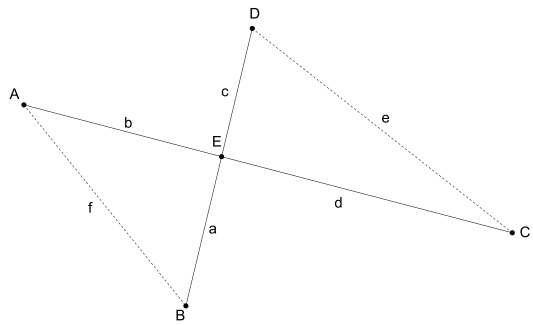
[2]Pod pospájaním rozumieme v tomto príklade sadu n úsečiek, pričom každá z nich spája dva z našich $2n$ bodov a zároveň každým bodom prechádza aspoň jedna z týchto úsečiek.

Dobrými pokusmi o charakterizáciu pospájania bodov v tomto príklade by mohli byť:

- Každý bod spojiť s tým, ktorý je mu najbližšie a ešte nemá pár, postupne od najbižšej dvojice.
- Body spájať zľava doprava, tj. každému priradiť taký, čo je od neho najbližšie vpravo.
- Postupne spájať body od okrajov, až do stredu.
- ...

Každý z týchto prístupov nás ale ďaleko nedovedie. Majú v sebe totiž nejasnosti, ktoré keď sa pokúsime ošetriť, vždy budeme vedieť nájsť protipríklad, kedy sa nám niečo prekríži.

Dobrou charakterizáciou v tomto príklade je vybrať si *také pospájanie bodov, pre ktoré je súčet dĺžok všetkých spojení najmenší* (ak ich je viac, vyberieme ktorékoľvek z nich). Ak by sa totiž v tomto pospájaní nejaké dve úsečky pretínali, bola by situácia bez ujmy na všeobecnosti nasledovná:



Obr. 7: Situácia, keď sa dve spojenia pretínajú

Úsečky AC a BD sa pretínajú v bode E. Do celkového súčtu dĺžok spojení sa za tieto dve zarátava:

$$|AC| + |BD| = (b + d) + (a + c)$$

Už na obrázku sa nám ale niečo nepozdáva, vyzerá to tak, že keby sme radšej zvolili spojenie AB a DC (resp. symetricky AD a BC, podľa toho ktoré sú pravdami a klamstvami) bol by celkový súčet dĺžok spojení menší.

Vďaka trojuholníkovej nerovnosti vieme, že súčet dĺžok dvoch strán v trojuholníku je vždy ostro väčší, ako dĺžka tretej strany. V našom obrázku:

$$f < a + b, e < c + d$$

$$e + f < a + b + c + d$$

Týmto sme dokázali, že ak by sme namiesto spojenia AC a BD, spojili AB a CD, celková dĺžka spojení by bola menšia. To je ale spor s tým, že sme si vybrali také spojenie, kde je celková dĺžka najmenšia.

Na záver je fajn spomenúť, že sme v skutočnosti nenašli žiadne konkrétne pospájanie v ktorom sa úsečky nepretínajú, len sme ukázali, že také musí existovať. S istotou totiž vieme povedať, že zo všetkých možných pospájaní bude mať jedno (alebo viac) najkratšiu celkovú dĺžku. Pomohlo nám tiež, že žiadne tri body neležia na priamke. Ak by ležali, tak by situácia s pretínaním nemusela vyzerať ako na obrázku a už by sme nemuseli vedieť použiť trojuholníkovú nerovnosť.

Komentár: Viacero riešení sa pokúšalo deliť množinu na dve časti, ktoré by sme potom samostatne vyriešili, ukázalo sa ale ako dosť obtiažne toto delenie poriadne spísať a dokázať. V takýchto príkladoch väčšinou existuje aj jednoduchšia cesta.

Takisto sme dostali kopu riešení, ktoré navrhovali nasledovný postup. Výhovorky pospájame ľubovoľne a následne keď sa niečo pretína, tak to opravíme výmenou spojení. Toto opakujeme, kým sa žiadne dve úsečky nebudú pretínať. Problém tejto úvahy je zásadný a síce, že sme nikde nevysvetlili, či a prečo s takýmto vymieňaním spojení niekedy skončíme. Nemohlo by sa totiž stať, že po nejakej výmene si pridáme ďalšie pretnutia? A ich vyriešenie nám opäť pridá nejaké z pôvodných pretnutí? Ak uvádzame nejaký postup na nájdenie riešenia, je potrebné ukázať aj to, že sa k nemu skutočne raz dopracujeme.

Príklad bol opäť zo súdka s ťažšími príkladmi, dúfame preto, že ste sa s ním nejakú chvíľu zahrali, potrápili a že vás niečo naučil :)

Riešenie: Načrtneme tiež inú cestu, ako sa dal príklad riešiť (detaily dôkazu však nechávame na čitateľovi, uvádzame len niekoľko kľúčových myšlienok). Touto cestou príklad skolilo niekoľko z Vás a boli sme prekvapení, že sa Vám to podarilo dotiahnuť do konca.

Ak sa pozrieme na konvexný obal [3] všetkých našich bodov, tak ak na ňom ležia dva body (výhovorky) rôznej pravdivosti, tak ich môžeme spojiť a zaoberať sa už iba zvyšnými bodmi (keďže lezali na konvexnom obale, už ich spojnicu určite nič nepretne).

Toto vieme opakovať, kým nám neostanú na konvexnom obale iba výhovorky jednej z pravdivostných hodnôt. S tým si poradíme tak, že sa pokúsime ukázať, že túto množinu vieme vždy rozdeliť na dve neprázdne časti, ktoré vyriešime samostatne (čo vieme následne opakovať, kým v jednej z častí neostanú len dva body, čo už triviálne vyriešime).

Prechádzajme teraz cez našu množinu priamkou rovnobežnou s jednou zo súradnicových osí (v skutočnosti by fungovala aj ľubovoľná iná). Budeme si vždy zaznamenávať, koľko pravdivých a koľko nepravdivých výhovoriek je v časti, ktorú sme už priamkou prešli.

Než sme sa dostali k prvému bodu, tak boli počty $(0, 0)$. Po prvom bode boli počty $(1, 0)$, teda výhovoriek pravdivostnej hodnoty ako na konvexnom obale je zatiaľ viac. Predtým, než prejdeme cez posledný bod našej množiny budú počty $(n - 1, n)$. Keď prejdeme cez celú množinu budú počty (n, n)

Všimnime si, že po prejdení prvým bodom bolo viac výhovoriek nejakej pravdivostnej hodnoty a pred prejdením posledným bodom bolo viac výhovoriek opačnej pravdivostnej hodnoty. Keďže výhovorky pribúdajú po jednom, postupne ako ich prechádzame (prípad, že dve výhovorky tvoria priamku rovnobežnú s prechádzajúcou ľahko ošetríme, stači body pridať postupne), tak v jednom momente musela nastať situácia, že počty už prejdených pravdivých aj nepravdivých výhovoriek sa museli rovnať.

Tým sme priamkou oddelili dve množiny, ktoré sú neprázdne a majú po jednej rovaký počet pravdivých ako nepravdivých výhovoriek, preto ich môžeme riešiť ako samostatný problém. Opäť na nich aplikujeme trik s konvexným obalom a následne ich zase rozdelíme na polovice. Opakovaním týchto metód dostaneme pospájanie bodov spĺňajúce podmienky zo zadania.

Odpoveď: Výhovorky sa dajú vždy pospájať n úsečkami.

Prémia (opravoval Zajo):

Zadanie: Máš k dispozícii veľa informácii veľkosti 1. Väčšie informácie môžeš stavať pomocou menších informácii. Keď už postavíš informáciu určitej veľkosti, môžeš ju použiť ľubovoľne veľa krát. Napríklad môžeš postavať informáciu veľkosti 2 z dvoch informácií veľkosti 1 a potom postaviť informáciu veľkosti 6 z troch informácii veľkosti 2. Pri stavbe však nemôžeš miešať informácie rôznych veľkostí a ani použiť len časť informácie. Napríklad nemôžeš postaviť informáciu veľkosti 3 z informácie veľkosti 2 a informácie veľkosti 1. Musíš na to použiť tri informácie veľkosti 1.

Stavanie však nie je zadarmo. Použitie informácie pri stavaní ťa vždy stojí 1 peniaz bez ohľadu na veľkosť informácie. Napríklad postavenie informácie veľkosti 5 by ťa stálo 5 peňazí (1 peniaz za každú z piatich informácií veľkosti 1). Keď už máš informáciu veľkosti 5, tak postavenie informácie veľkosti 10 z dvoch informácií veľkosti 5 stojí 2 peniaze (1 peniaz za každú z dvoch informácií veľkosti 5).

V nasledujúcich dvoch príkladoch si môžete pozrieť, ako sa informácie stavajú a aká je ich cena:

1. **Príklad 1:** Postavte informácie veľkosti 5 a 14.
   Riešenie: Postavíme informáciu veľkosti 5 z piatich informácií veľkosti 1. To bude stáť 5 peňazí. Potom postavíme informáciu veľkosti 2 z dvoch informácií veľkosti 1 za 2 peniaze. Informáciu veľkosti 14 nakoniec postavíme zo siedmych informácií veľkosti 2 za 7 peňazí. Dokopy nás to stálo $5 + 2 + 7 = 14$ peňazí.

[3] Neformálne si to môžeme predstaviť, akoby boli body tyčky v zemi a my okolo nich natiahneme špagáť, čím vznikne mnohouholník. Formálnejšie konvexný obal je najmenší konvexný mnohouholník, ktorý obsahuje všetky dané body. To, že mnohouholník je konvexný znamená, že ak spojíme dva body na jeho obvode, aj všetky body na tejto spojnici budú vždy ležať v jeho vnútri.

2. **Príklad 2:** Postavte informácie veľkosti 9 a 18.
   Riešenie: Postavíme informáciu veľkosti 3 z troch informácií veľkosti 1 za 3 peniaze. Potom postavíme informáciu veľkosti 9 z troch informácií veľkosti 3 za 3 peniaze. Informáciu veľkosti 18 postavíme z dvoch informácií veľkosti 9 za 2 peniaze. Dokopy nás to stálo $3 + 3 + 2 = 8$ peňazí.

Majiteľ od teba chce, aby si mu postavil informácie týchto 10 veľkostí: 26, 32, 44, 66, 72, 88, 112, 128, 520 a 1170. Tvojou úlohou je splniť túto požiadavku za čo najmenšiu cenu. Popíš, ako by si skladal informácie a koľko by to stálo. Svoje riešenie nemusíš odôvodňovať.

Riešenie: V príklade sa ako efektívne ukázalo stavať najmä prvočíselné veľkosti, ktoré raz aj tak budeme potrebovať. Ich nasledovné použitie potom mohlo byť o to lacnejšie.

Najlepším riešením bolo postavenie potrebných informácii za cenu 73, za čo sa dalo získať 6 bodov.

Uvedieme si jeden príklad takéhoto postavenia, podľa riešenia Miška Pajtáša.

Veľkosť informácie, ktorú skladáme	Počet informácii	Veľkosť skladanej informácie
26	2	1
	13	2
32	2	2
	2	4
	2	8
	2	16
44	11	2
	2	22
66	3	22
72	3	8
	3	24
88	2	44
112	7	16
128	4	32
520	5	26
	4	130
1170	3	130
	3	390
Celková cena:	73	

Tabuľka 2: Príklad riešenia s cenou 73