

Zadania 1. kola letnej série 2016/2017

Termín: 06.03.2017

Naša adresa: Riešky, Mgr. Viera Babišová, Gymnázium Grösslingová, Grösslingová 18, 811 09 Bratislava 1

Elektronické riešenia: <http://riesky.sk/>

Bol krásny slnečný deň.

Príklad č. 1: Zajo sa snažil dostať z oddelenia vlasovej kozmetiky do oddelenia koláčov. Našťastie boli na ceste medzi týmito dvoma oddeleniami rovnomerne rozmiestnené tabuľky, na ktorých sú vždy dve čísla. Prvé značí vzdialenosť od oddelenia vlasovej kozmetiky a druhé vzdialenosť od oddelenia koláčov. Medzi dvoma za sebou idúcimi tabuľkami je vždy vzdialenosť jeden meter, pričom prvá tabuľka je presne meter od oddelenia vlasovej kozmetiky a posledná meter pred oddelením koláčov. Zajo sčítal čísla na všetkých tabuľkách a vyšlo mu 182. Potom si ale uvedomil, že ho celkom zaujíma koľko vlastne prešiel. Snáď ste si nemysleli, že by chodil za príliš vzdialenými koláčmi! Pomôžte mu a zistite, ako ďaleko sú od seba oddelenie vlasovej kozmetiky a oddelenie koláčov.

Keď sa Zajo poriadne najedol koláčov, konečne mal dostatok energie ísť späť domov. Vo dverách však stretol majiteľa obchodu KúpTu!. Vyzeral byť veľmi rozčúlený, tak sa mu prihovril a spýtal sa ho, či s niečím nepotrebuje pomôcť. Majiteľ sa priznal, že sa jeho obchodu prestalo dariť, odkedy na druhej strane ulice postavili nový obchod TamNekúp!. Teraz jeho bývalí zákazníci v niektoré dni chodia nakupovať do obchodu oproti.



Príklad č. 2: Zuzka, Roman, Sára a Tete nakupovali vždy iba v KúpTu!. Odkedy však postavili TamNekúp! začali zvažovať aj nákupy v tomto obchode. To, kde každý z nich práve dnes nakupuje, závisí od toho, kde nakupovali zvyšní traja v predchádzajúci deň. Vo svojich nákupných návykoch sa správajú nasledovne:

- Tete dnes nakupuje v KúpTu!, iba ak Sára aj Roman obaja nakupovali v KúpTu! včera.
- Roman dnes nakupuje v KúpTu!, iba ak Zuzka alebo Tete (alebo obe) nakupovali v KúpTu! včera.
- Zuzka sa chce vyhnúť Tete a teda dnes Zuzka nakupuje v KúpTu!, iba ak Tete nakupovala včera v TamNekúp! (inak Zuzka nakupuje v TamNekúp!).
- Sára rada robí každý deň niečo iné. Ak včera nakupovala v TamNekúp!, tak dnes nakupuje v KúpTu! a podobne ak včera nakupovala v KúpTu! dnes bude nakupovať v TamNekúp!.

V deň otvorenia TamNekúp! nakupovali všetci v tomto obchode. Po niekoľkých dňoch sa všetci dostanú do stavu, kedy to kam chodia nakupovať sa bude dokola opakovať (každých niekoľko dní). Koľko dní od otvorenia nákupného centra sa to stane? Aké obchody si Zuzka, Roman, Sára a Tete budú vyberať počas tohoto opakovania?

Majiteľ obchodu pokračoval vo svojom žalostnom rozprávaní. Nielen, že stráca svojich zákazníkov, ale aj jeho personál ho prestal poslúchať. Spôsobuje mu to veľa nových problémov.

Príklad č. 3: Na konci dňa sa obchod musí poriadne poupratovať. Upratovačka je lenivá a odmieta pozametať viac ako jednu chodbu, dlhú 540 metrov. Zametá ju nasledovne: Najskôr prejde 10 metrov dopredu a potom sa vráti 7 metrov. Toto opakuje, až kým prvýkrát nepríde na koniec chodby. Majiteľovi sa to nepáči, lebo keby chodila len dopredu a nevracala sa, pozametala by toho oveľa viac za rovnako námahy. Koľko metrov prejde upratovačka dokopy pri zametaní tejto chodby? Koľkokrát prejde po devätnástom metri chodby (teda po časti, ktorá je medzi 18m od začiatku chodby a 19m od začiatku chodby) ?

Na Zaja reči majiteľa veľmi zapôsobili a rozhodol sa, že spraví všetko čo je v jeho silách aby majiteľa trochu upokojil. “Možno by som Vám vedel pomôcť,” ponúkol sa Zajo, “ja som totiž expert na Veľkú noc!” Dohodli sa teda, že si pripravia plán, ako prilákajú zákazníkov späť.

Príklad č. 4: Na Veľkú noc ponúkne obchod limitovanú edíciu darčekových košov, pričom každý z nich je originálny. Dokopy sú v nich síce len štyri druhy sladkostí, no v každom sú práve dva druhy a existuje kôš s každou možnou dvojicou. Žiadne dva koše nemajú rovnaké dva druhy sladkostí. V každom koši je tiež rôzny počet sladkostí, pričom však vždy delí celkový počet sladkostí vo všetkých košoch. Koľko najmenej sladkostí môže byť dokopy v týchto veľkonočných košoch?

Veľkonočné darčekové koše zožali veľký úspech. Nielen, že sa podarilo predať skoro všetky, ale obchod znovu získaval na svojej popularite. Jediný, koho tieto koše neočarili bol Maťo, ktorý sa stravuje zdravo a sladkosti si nekupuje. Jeho nákupy sú oveľa jednoduchšie.



Príklad č. 5: Maťo nakúpil niekoľko jabĺk, ktoré chcel zjesť. Všetky si ich najskôr očísloval postupne od 1. Nejedol ich však jedno po druhom, ale štvrté po druhom. A teda jedol každé druhé jablko (2, 4, 6, ...). Mal ich naukladané do kruhu (v poradí v akom ich očísloval od 1), takže mohol jesť dokola každé druhé jablko, až kým mu nezostalo len jedno posledné. Toto jablko malo zhodou okolností číslo 1. Bolo to však naozaj len tými okolnosťami? Zistite všetky možnosti, koľko si mohol Maťo kúpiť jabĺk. Nezabudnite tiež poriadne zdôvodniť, prečo si nemohol kúpiť iný počet jabĺk.

Veľkonočné koše aj jablká mali úspech, o akom sa majiteľovi ani nespomínalo. Ľudia sa do obchodu KúpTu! hrnuli v davoch. Davy boli všade, človek na človeku, nedalo sa dýchať. Bola to kritická situácia a bolo nutné ju okamžite vyriešiť. Predsa len majiteľovi ide o komfort zákazníkov.

Príklad č. 6: V obchode, ktorý má pôdorys tvaru rovnobežníka $ABCD$, sa chystali veľké zmeny. Bod E je ľubovoľný bod na úsečke AB . Obchod chceli rozdeliť na tri menšie trojuholníkové miestnosti AED , DEC a EBC tak, aby to boli rovnoramenné trojuholníky so základňami DA , DE a CE . Je možné takto rozdeliť obchod? Ak áno, určite veľkosti uhlov DAE , DEC , CEB . Ak nie, poriadne zdôvodnite prečo.

Architekti už mali všetko pekne pripravené, keď sa zrazu objavil pán architekt MuDr. Doc. PaedDr. Ing. Bc. Tomáš PhD.: “Veď to máte celé zle! Bude to takto.”

Príklad č. 7: Na priamke leží n úsečiek, z ktorých každé dve majú spoločný aspoň jeden bod. Dokážte, že existuje bod, ktorý leží vo všetkých týchto úsečkách.



Po podrobných štatistikách sa zistilo, že Tomášove plány naozaj výrazne vylepšili priestory obchodu KúpTu!. Majiteľ sa rozhodol oceniť jeho skvelú prácu tým, že po ňom pomenoval oddelenie vysokého pečiva “To máš upečené!”.

Príklad č. 8: Regál na pečivo má plechy umiestnené v mriežke 8×8 . Keď sa vyprázdni, dopĺňajú ho dvaja brigádnic. Striedavo dopĺňajú po jednom plechu. Začína prvý brigádnik a doplní ľubovoľný plech. Aby to vyzeralo esteticky, každý ďalší doplnený plech musí hranou (vrcholom nestačí) susediť s naposledy doplneným plechom. Brigádnik, ktorý už nemôže doplniť žiaden plech podľa pravidla, prehráva. Má niektorý z nich vyhrávajúcu stratégiu? Ak áno, akú?

Ukázalo sa, že v KúpTu! sa začalo predávať najkvalitnejšie pečivo v okolí. Vóna čerstvých rohlíkov prilákala nejedného zákazníka z mesta. Ich popularita narástla ešte viac, keď sa objavili problémy v konkurenčnom obchode.

Príklad č. 9: V TamNekúp! predávajú v oddelení pečiva žemličky. 100 žemličiek majú vyložených na pulte v tvare štvorca 10×10 . Bohužiaľ (alebo našťastie pre majiteľa KúpTu!) sa medzi žemličkami rozšírila pleseň. Pleseň nakazila niektorých 9 žemličiek. Následne sa šíri. Ak nejaká žemlička susedí (vodorovne, alebo zvislo) s aspoň dvoma nakazenými žemličkami, tak sa tiež nakazí. Môže sa stať, že sa takto postupne nakazí všetkých 100 žemličiek? Ak nie, koľko najviac žemličiek je pleseň schopná nakaziť? (Nezabudnite ukázať, ako nakazí všetkých 100, alebo prečo to nebude viac)

Majiteľ KúpTu! bol veľmi šťastný z toho, ako sa veci vyvinuli. Kto by už len šiel po plesňovej epidémii nakupovať do TamNekúp!? To ale znamenalo, že mal odrazu veľa času na zábavu. Zašiel teda do jeho obľúbeného oddelenia Hráčik kde uvidel nasledujúcu hru.

Prémia: Máme nekonečné štvorčekové ihrisko na ktorom je každé políčko buď biele alebo čierne, a na ňom vyznačenú oblasť políčok 6×6 . Húsenica stojí na políčku ihriska otočená do nejakého zo štyroch smerov.

- Ak stojí na čiernom políčku, tak sa otočí vpravo o 90° , zmení farbu políčka na ktorom stojí a pohne sa o jedno políčko dopredu (v smere kam je otočená).
- Ak stojí na bielom políčku, tak sa otočí vľavo o 90° , zmení farbu políčka na ktorom stojí a pohne sa o jedno políčko dopredu.

Na novom políčku sa tento postup znova opakuje. Na začiatku môžeme zafarbiť políčka na celom nekonečnom ihrisku na čierne alebo na bielo, ako len chceme. Húsenica potom spraví 36 krokov. Následne sa pozrieme, koľko čiernych štvorčekov je vo vyznačenej oblasti 6×6 .

“Skóre” je:

$||\text{počet čiernych políčok v oblasti } 6 \times 6 \text{ na konci}|| - ||\text{počet čiernych políčok v oblasti } 6 \times 6 \text{ na začiatku}||$
(teda koľko čiernych políčok v oblasti pribudlo). Navrhnite také počiatkové ofarbenie ihriska a pôvodné umiestnenie a natočenie húsenice, aby bolo skóre čo najvyššie.

Tento krásny slnečný deň sa pre majiteľa obchodu KúpTu! skončil nečakane dobre. Uvidíme, čo ho čaká v budúcnosti.