Vzorové riešenia 1. kola letnej série 2016/2017

Príklad č. 1 (opravovali Lukáš, Tánička):

Zadanie: Zajo sa snažil dostať z oddelenia vlasovej kozmetiky do oddelenia koláčov. Našťastie boli na ceste medzi týmito dvoma oddeleniami rovnomerne rozmiestnené tabuľky, na ktorých sú vždy dve čísla. Prvé značí vzdialenosť od oddelenia vlasovej kozmetiky a druhé vzdialenosť od oddelenia koláčov. Medzi dvoma za sebou idúcimi tabuľkami je vždy vzdialenosť jeden meter, pričom prvá tabuľka je presne meter od oddelenia vlasovej kozmetiky a posledná meter pred oddelením koláčov. Zajo sčítal čísla na všetkých tabuľkách a vyšlo mu 182. Potom si ale uvedomil, že ho celkom zaujíma koľko vlastne prešiel. Snáď ste si nemysleli, že by chodil za príliš vzdialenými koláčmi! Pomôžte mu a zistite, ako ďaleko sú od seba oddelenie vlasovej kozmetiky a oddelenie koláčov.

Riešenie: Súčet na tabuľkách je dokopy 182. Ako prvé si uvedomíme, že vzdialenosť medzi oddelením vlasovej kozmetiky a oddelením koláčov je oboma smermi rovnaká, teda súčet čísel na tabuľkách jedným smerom vypočitáme ako $\frac{182}{2} = 91$.

Keďže sú tabuľky rovnomerne rozmiestnené vo vzdialenostiach $1m$, prvá (najbližšia) tabuľka bude od oddelenia vlasovej kozmetiky vzdialená 1 meter, druhá 2 metre, tretia 3 metre, ..., posledná $x - 1$ metrov, pričom x je celková vzdialenosť medzi vlasovou kozmetikou a koláčmi (od x odpočítavam 1, keďže vzdialenosť poslednej tabuľky v smere od kozmetiky je od koláčov ešte $1m$).

Najľahšia možnosť ako zistiť počet tabuliek medzi oddeleniami je postupne odpočítavať čísla $1, 2, 3, ...,$ $x - 1$ od čísla 91 v tabuľke 1.

$91 - 1 = 90$	$90 - 2 = 88$	$88 - 3 = 85$	$85 - 4 = 81$	$81 - 5 = 76$
$76 - 6 = 70$	$70 - 7 = 63$	$63 - 8 = 55$	$55 - 9 = 46$	$46 - 10 = 36$
$36 - 11 = 25$	$25 - 12 = 13$	$13 - 13 = 0$		

Tabuľka 1: Postupné odpočítavanie

Odpoveď: Počet tabuliek je 13, teda celková vzdialenosť medzi oddeleniami vlasovej kozmetiky a koláčov je $13 + 1 = 14$ metrov.

Komentár: Celkovo bol príklad veľmi úspešný. Väčšina z vás postupovala pri zisťovaní počtu tabuliek z druhého konca, teda prirátavala postupne čísla $1, 2, 3, ...$ až kým celkový súčet nebol 91.

Príklad č. 2 (opravovali Tete, Kornelka):

Zadanie: Zuzka, Roman, Sára a Tete nakupovali vždy iba v KúpTu!. Odkedy však postavili TamNekúp! začali zvažovať aj nákupy v tomto obchode. To, kde každý z nich práve dnes nakupuje, závisí od toho, kde nakupovali zvyšní traja v predchádzajúci deň. Vo svojich nákupných návykoch sa správajú nasledovne:

- Tete dnes nakupuje v KúpTu!, iba ak Sára aj Roman obaja nakupovali v KúpTu! včera.
- Roman dnes nakupuje v KúpTu!, iba ak Zuzka alebo Tete (alebo obe) nakupovali v KúpTu! včera.
- Zuzka sa chce vyhnúť Tete a teda dnes Zuzka nakupuje v KúpTu!, iba ak Tete nakupovala včera v TamNekúp! (inak Zuzka nakupuje v TamNekúp!).
- Sára rada robí každý deň niečo iné. Ak včera nakupovala v TamNekúp!, tak dnes nakupuje v KúpTu! a podobne ak včera nakupovala v KúpTu! dnes bude nakupovať v TamNekúp!.

V deň otvorenia TamNekúp! nakupovali všetci v tomto obchode. Po niekoľkých dňoch sa všetci dostanú do stavu, kedy to kam chodia nakupovať sa bude dokola opakovať (každých niekoľko dní). Koľko dní od otvorenia nákupného centra sa to stane? Aké obchody si Zuzka, Roman, Sára a Tete budú vyberať počas tohoto opakovania?

Riešenie: Riešenie si rozpíšeme na dni. Podľa zadania budeme dopĺňať informácie o nakupovaní do tab. 2.

Môžme si všimnúť, že na ôsmy deň od otvorenia TamNekúp! nakupujú všetci rovnako ako nakupovali šiesty deň od otvorenia. Keďže to kde budú nakupovať závisí iba od predchádzajúceho dňa, vieme, že deviaty deň budú nakupovať rovnako ako siedmy.

deň	osoba	obchod	vysvetlenie
1	všetci	TamNekúp!	Podľa zadania, v deň otvorenia nakupovali všetci v TamNekúp!.
2	Zuzka	KúpTu!	Zuzka nakupuje v KúpTu! práve vtedy, ak tam Tete predošlý deň nenakupovala.
	Roman	TamNekúp!	V prvý deň Zuzka ani Tete nenakupovali v KúpTu!.
	Sára	KúpTu!	Včera nakupovala v TamNekúp!.
	Tete	TamNekúp!	Sára aj Roman nakupovali prvý deň v TamNekúp!.
3	Zuzka	KúpTu!	Tete nakupovala druhý deň v TamNekúp!.
	Roman	KúpTu!	Zuzka nakupovala druhý deň v KúpTu!.
	Sára	TamNekúp!	Včera nakupovala v KúpTu!.
	Tete	TamNekúp!	Sára nakupovala v KúpTu!, ale Roman už nie a podmienkou sú obaja.
4	Zuzka	KúpTu!	Tete nakupovala tretí deň v TamNekúp!.
	Roman	KúpTu!	Zuzka nakupovala tretí deň v KúpTu!.
	Sára	KúpTu!	Včera nakupovala v TamNekúp!.
	Tete	TamNekúp!	Sára nakupovala tretí deň v TamNekúp!.
5	Zuzka	KúpTu!	Tete nakupovala štvrtý deň v TamNekúp!.
	Roman	KúpTu!	Zuzka nakupovala štvrtý deň v KúpTu!.
	Sára	TamNekúp!	Včera nakupovala v KúpTu!.
	Tete	KúpTu!	Sára aj Roman nakupovali štvrtý deň v KúpTu!.
6	Zuzka	TamNekúp!	Tete nakupovala v KúpTu!.
	Roman	KúpTu!	Aj Tete aj Zuzka nakupovali včera v KúpTu!.
	Sára	KúpTu!	Včera nakupovala v TamNekúp!.
	Tete	TamNekúp!	Sára nakupovala piaty deň v TamNekúp!.
7	Zuzka	KúpTu!	Tete nakupovala v TamNekúp!.
	Roman	TamNekúp!	Ani Tete ani Zuzka nenakupovali včera v KúpTu!.
	Sára	TamNekúp!	Včera nakupovala v KúpTu!.
	Tete	KúpTu!	Sára aj Roman nakupovali v KúpTu!.
8	Zuzka	TamNekúp!	Tete nakupovala v KúpTu!.
	Roman	KúpTu!	Tete aj Zuzka nakupovali v KúpTu!.
	Sára	KúpTu!	Včera nakupovala v TamNekúp!.
	Tete	TamNekúp!	Sára ani Roman nenakupovali v KúpTu!.

Tabuľka 2: Informácie o nákupoch

Odpoveď: Stav, kedy sa to, kam chodia Zuzka, Roman, Sára a Tete nakupovať, začne opakovať, nastane práve na šiesty deň. Každý párny deň pôjdu Zuzka s Tete nakupovať do TamNekúp! a Roman so Sárou do KúpTu!. Počas nepárnych dní pôjdu všetci do toho obchodu, v ktorom v párnom dni neboli.
Komentár: Príklad ste takmer všetci vyriešili správne, videli sme veľa 10 bodových riešení. Nezabudnite však, že pokiaľ do riešenia vkladáte tabuľku treba ju aspoň trochu vysvetliť, aby bolo jasné ako ste v riešení postupovali.

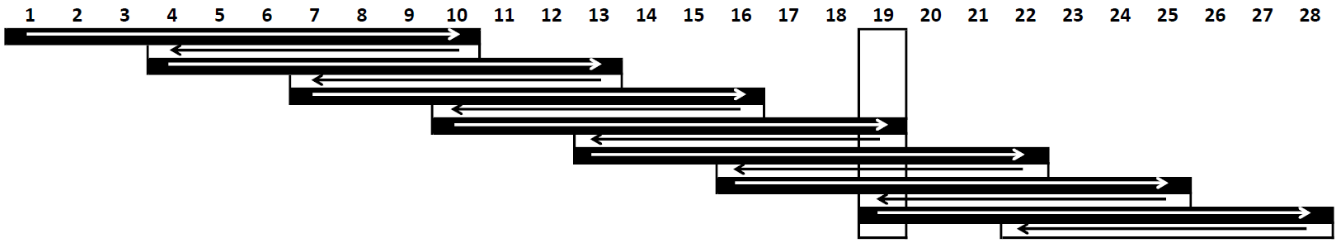
Príklad č. 3 (opravovali MaťoPaťo, Gabika Š.):

Zadanie: Na konci dňa sa obchod musí poriadne poupratovať. Upratovačka je lenivá a odmieta pozametať viac ako jednu chodbu, dlhú 540 metrov. Zametá ju nasledovne: Najskôr prejde 10 metrov dopredu a potom sa vráti 7 metrov. Toto opakuje, až kým prvýkrát nepríde na koniec chodby. Majiteľovi sa to nepáči, lebo keby chodila len dopredu a nevracala sa, pozametala by toho oveľa viac za rovnako námahy. Koľko metrov prejde upratovačka dokopy pri zametaní tejto chodby? Koľkokrát prejde po devätnástom metri chodby (teda po časti, ktorá je medzi $18m$ od začiatku chodby a $19m$ od začiatku chodby) ?
Riešenie: Upratovačka sa popri upratovaní hýbe takým zvláštnym spôsobom. Po posunutí sa o $10m$ dopredu a vrátení sa o $7m$, sa vždy vlastne posunie práve o $3m$ dopredu. Za ten čas sa ale celkom nachodila, pretože pozametala až $17m$.

V prvej časti úlohy nás zaujíma, koľko sa celkovo nachodila, kým tú chodbu pozametala. So zametaním skončí v momente, keď ide smerom ku koncu chodby a narazí na stenu, ktorou chodba končí. Teda sa hýbe spôsobom dopredu, dozadu až na posledný krok dopredu. Ten je dlhý $10m$, takže ho musí začínať niekde medzi $530m$ a $540m$. Zároveň, predchádzajúcim pohybom dopredu nedosiahla koniec chodby, takže začiatok posledného pohybu musí byť vzdialený od konca chodby o viac ako $7m$. Do úvahy teda prichádzajú štartovacie metre $530, 531$ a 532.

Na začiatku sme ale povedali, že sa každým pohybom vpred a vzad posunie o $3m$ dopredu. Teda pohyb dopredu začína vždy z metrov, ktoré sú násobky 3. Z toho vyplýva, že posledný pohyb začínala z metru $531 = 177 \cdot 3$. Upratovačka urobila 177krát pohyb vpred a vzad, teda kým sa dostala na $531m$ prešla $177 \cdot 17 = 3009m$. Do konca chodby chýba $9m$, upratovačka prešla celkovo $3009 + 9 = 3018m$.

Pri druhej časti úlohy je najjednoduchšie riešenie si to vypísať (Obr. 1). Uvedomme si, že akonáhle začíname pohyb dopredu za devätnástym metrom, už sa naň nikdy nevrátime.



Obr. 1: Prvé kroky upratovačky

Odpoveď: Upratovačka prešla celkovo $3018m$ a cez devätnásty meter prejde 7krát.
Komentár: Väčšina z vás sa veľmi šikovne dopracovala k správnemu riešeniu, hoci sa vyskytli nejaké tie chybičky z nepozornosti. Väčšina z Vás ale nedostatočne odôvodnila svoj postup alebo ste iba vydelili dĺžku chodby tromi, avšak vtedy prejde upratovačka cez koniec chodby viackrát.

Príklad č. 4 (opravovali Emil, Paľo):

Zadanie: Na Veľkú noc ponúkne obchod limitovanú edíciu darčekových košov, pričom každý z nich je originálny. Dokopy sú v nich síce len štyri druhy sladkostí, no v každom sú práve dva druhy a existuje kôš s každou možnou dvojicou. Žiadne dva koše nemajú rovnaké dva druhy sladkostí. V každom koši je tiež rôzny počet sladkostí, pričom však vždy delí celkový počet sladkostí vo všetkých košoch. Koľko najmenej sladkostí môže byť dokopy v týchto veľkonočných košoch?
Riešenie: Najskôr sa pokúsime zistiť, koľko darčekových košov existuje. Druhy sladkostí si označíme písmenami A, B, C, D. Koše majú obsiahnuť práve všetky dvojice sladkostí a to sú AB, AC, AD, BC, BD, CD. To znamená, že košov je presne 6.

Vieme aj, že v každom koši sú aspoň 2 sladkosti. Keďže všetky koše majú mať rôzny celkový počet sladkostí, tak sladkostí je nutne aspoň $2+3+4+5+6+7 = 27$. Preto výsledný počet sladkostí je aspoň 27. Posledná podmienka zo zadania hovorí, že počty sladkostí v jednotlivých košoch musia deliť celkový počet sladkostí vo všetkých šiestich košoch. Teda hľadáme číslo, ktoré má aspoň 6 deliteľov rôznych od jednotky (počet sladkostí v koši je vždy aspoň 2) a ktorých súčet sa mu rovná.

Vypisujme postupne čísla, ktoré pripadajú do úvahy a za nimi ich delitele v tabuľke 3.

V prvom prípade má byť sladkostí dokopy 30, ale súčet šiestich najmenších deliteľov väčších ako 1 je $2 + 3 + 5 + 6 + 10 + 15 = 41$. To je viac než 30, preto to nebude možné.

Správnym riešením bude preto druhý prípad, keďže počty sladkostí v košoch $2+3+4+6+9+12 = 36$ spĺňajú všetky podmienky zo zadania.

Tým je úloha vyriešená. Zároveň sme ukázali, že podmienky žiadne menšie číslo splniť nemôže.
Odpoveď: Najmenší počet sladkostí v týchto darčekových košoch je 36.
Komentár: Veľa z vás sa popasovalo z úlohou na výbornú. Našli sa ale aj takí, ktorí napísali riešenie v štýle „skúšal som a vyšlo mi ...“. Toto však nestačí, lebo ak skúšate všetky riešenia, musíte nám ukázať, že ste tak naozaj spravili, lebo inak by ste mohli správne riešenie prehliadnuť. Dávajte si prosím tiež pozor na riadne prečítanie celého zadania, niektorí ste totiž zabudli na niektoré podmienky.

27	málo deliteľov	1,3,9,27
28	málo deliteľov	1,2,4,7,14,28
29	málo deliteľov	1,29
30	1. prípad	1,2,3,5,6,10,15,30
31	málo deliteľov	1,31
32	málo deliteľov	1,2,4,8,16,32
33	málo deliteľov	1,3,11,33
34	málo deliteľov	1,2,17,34
35	málo deliteľov	1,5,7,35
36	2. prípad	1,2,3,4,6,9,12,18,36

Tabuľka 3: Počty sladkostí a ich delitele

Príklad č. 5 (opravovala Gabika):

Zadanie: Maťo nakúpil niekoľko jabĺk, ktoré chcel zjesť. Všetky si ich najskôr očísloval postupne od 1. Nejedol ich však jedno po druhom, ale štvrté po druhom. A teda jedol každé druhé jablko $(2, 4, 6, \dots)$. Mal ich naukladané do kruhu (v poradí v akom ich očísloval od 1), takže mohol jesť dokola každé druhé jablko, až kým mu nezostalo len jedno posledné. Toto jablko malo zhodou okolností číslo 1. Bolo to však naozaj len tými okolnosťami? Zistite všetky možnosti, koľko si mohol Maťo kúpiť jabĺk. Nezabudnite tiež poriadne zdôvodniť, prečo si nemohol kúpiť iný počet jabĺk.

Riešenie: Nazvime jedným „kolom“ prejdenie jabĺčok od jabĺčka s najnižším číslom po jabĺčko s najvyšším číslom na stole. Existujú dve alternatívy ako môže kolo začínať - buď prvé jabĺčko preskakujeme, alebo ho zjeme. Uvažujme, že jablko s číslom jedna je ešte stále na stole, teda je jablkom s najnižším číslom. Pozrime sa na to, ako môže Maťove kolo prebiehať, ak začíname kolo preskočením jablka č. 1, tak ako na začiatku celého jedenia. Či už zamyslením sa, alebo odskúšaním zopár možností prídeme na to, že situácia sa líši pre nepárny a párny počet jabĺk na stole, teda rozlíšime tieto dva prípady.

Predpokladajme, že na stole je nepárny počet jabĺk (väčší ako 1), a začíname kolo preskočením jablka č. 1. V tomto kole Maťo zje všetky jablká na párnych pozíciach, teda jablko s najvyšším číslom bude preskočené. Ďalšie kolo tým pádom začne zjedením jablka s najnižší číslom, jablka č. 1, čo je presne to čomu sa chceme vyhnúť. Z toho vyplýva, že na splnenie podmienky zo zadania nikdy počas celého procesu nesmieme mať na stol nepárny počet jabĺk, ak začíname kolo preskočením prvého jablka.

Čo v prípade ak je na stole párny počet jabĺk a začíname preskočením jablka č. 1? Maťo zje všetky jalbká na párnych pozíciách, teda aj jablko s najvyšším číslom. Počet jabĺk na stole sa zredukuje presne na polovicu a daľšie kolo sa znova začne preskočením prvého jablka.

Úplne na začiatku Maťo jedenie jabĺk začína preskočením jablka č. 1. Z našich predošlých úvah je teda jasné, že nemohol kúpiť nepárny počet jabĺk. Taktiež sme ukázali, že pri párnom počte jabĺk daľšie kolo znova začína preskočením prvého jablka, teda ani v žiadnom z nasledujúcich kôl nemôže byť na stole nepárny počet jabĺk väčší ako jedna. Z toho vyplýva, že Maťo mohol kúpiť iba taký počet jabĺk, ktorý po niekoľkonásobnom delení dvoma ostáva stále párny, alebo dá podiel jedna - inak povedané, počet jabĺk nemôže byť deliteľný žiadnym nepárnym číslom okrem jednotky, teda počet jabĺk musí byť mocnina dvojky.

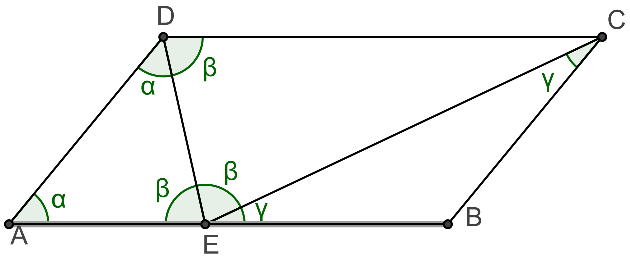
Odpoveď: Počet jabĺk, ktoré Maťo kúpil musel byť mocninou dvojky - číslom, ktoré je súčinom nejakého počtu dvojok.

Komentár: Veľká väčšina z vás príklad zvládla skvelo, najčastejším problémom bol nenapísaný, alebo nedokončený postup. Treba si dať pozor na to, že skúšanie možností je fajn na objavenie hladaného „pravidla“, ale treba aj overiť, že nájdené pravidlo skutočne platí.

Príklad č. 6 (opravovali Zajo, Veronika):

Zadanie: V obchode, ktorý má pôdorys tvaru rovnobežníka $ABCD$, sa chystali veľké zmeny. Bod E je ľubovoľný bod na úsečke AB. Obchod chceli rozdeliť na tri menšie trojuholníkové miestnosti AED, DEC a EBC tak, aby to boli rovnoramenné trojuholníky so základňami DA, DE a CE. Je možné takto rozdeliť obchod? Ak áno, určite veľkosti uhlov DAE, DEC, CEB. Ak nie, poriadne zdôvodnite prečo.

Riešenie: Ako sa k takejto úlohe postaviť? Ak máme zistiť nejaké uhly, najúčínnejšie je nakresliť si obrázok, označiť uhly ktoré poznáme a pokúsiť sa pomocou nich vyjadriť všetky ostatné, ktoré sa budú dať. Použiť pri tom môžeme súčet uhlov v trojuholníku, alebo vlastnosti rovnobežiek. A presne to teraz spravíme, sledujte obrázok 2!



Obr. 2: Rozdelenie miestnosti

Zo zadania vieme o troch rovnoramenných trojuholníkov. Pre tie platí, že uhol oboch ramien oproti základni je rovnaký. Označme preto $\angle EAD = \angle ADE = \alpha$, $\angle DEC = \angle EDC = \beta$ a $\angle BEC = \angle ECB = \gamma$.

Ďalej $\angle CDE = \angle DEA$, tieto uhly sú striedavé, preto sa rovnajú. O rovnobežníku vieme, že protiľahlé vnútorné uhly v ňom sú rovnaké a susedné uhly majú súčet $180°$ (vyplýva z rovnobežiek, súhlasných a stredových uhlov). V trojuholníku je súčet vnútorných $180°$. Preto $|\angle EBC| = 180 - 2\gamma$.

Protiľahlé uhly pri B a D v rovnobežníku sú rovnaké, teda $\alpha + \beta = 180 - 2\gamma$. Susedné pri A a D majú súčet $180°$, čiže $\alpha + \beta = 180 - \alpha$. Ľavé strany v týchto rovniciach sú rovnaké, preto sa rovnajú aj pravé:

$$180 - 2\gamma = 180 - \alpha, 2\gamma = \alpha$$

V $\triangle ADE$ platí $2\alpha + \beta = 180 = 4\gamma + \beta$ (s použitím predchádzajúceho výsledku). Pri bode E je súčet troch uhlov priamy $2\beta + \gamma = 180$. Po dosadení:

$$4\gamma + \beta = 180 = 2\beta + \gamma$$

$$3\gamma = \beta.$$

Teraz už len dorátame veľkosť γ, z čoho dostaneme aj veľkosti ostatných uhlov:

$$2\alpha + \beta = 180$$

$$4\gamma + 3\gamma = 180$$

$$\gamma = \frac{180}{7}$$

$$\alpha = 2 \cdot \frac{180}{7} \qquad \beta = 3 \cdot \frac{180}{7}$$

.

Odpoveď: Obchod vieme rozdeliť podľa zadania, iba ak sú uhly nasledovných veľkostí: $\alpha = \frac{360}{7}$, $\beta = \frac{540}{7}$, $\gamma = \frac{180}{7}$.

Príklad č. 7 (opravovali Lámač, Lucka):

Zadanie: Na priamke leží n úsečiek, z ktorých každé dve majú spoločný aspoň jeden bod. Dokážte, že existuje bod, ktorý leží vo všetkých týchto úsečkách.

Riešenie: Uvažujme situáciu vyhovujúcu zadaniu s n úsečkami. Keď si zoberieme 2 úsečky z nich, musia mať aspoň jeden spoločný bod. Celkovo tieto úsečky vytvárajú určitý prienik bodov, ktorý majú obe spoločný. Aby vyhovovala ďalšia úsečka zadaniu, musí mať aspoň jeden bod v prieniku predchádzajúcich úsečiek, inak by nemala spoločný bod s aspoň jednou z predošlých úsečiek. Úsečka je totiž spojitá (nemôže byť prerušená ako čiarkovaná priamka) a ak by neležala žiadnou svojou časťou v tomto prieniku, musela by byť prerušená aby mohla mať spoločný bod s oboma úsečkami.

Takýmto postupom robíme dookola jednu operáciu, a to vytvorenie prieniku dvoch úsečiek a následné hľadanie prieniku s ďalšou úsečkou (Akoby sme začínali len s dvoma z n úsečiek a ostatné si po jednej domýšlali). Prienik vzniknutý v prvej časti operácie si teda vieme predstaviť ako ďalšiu úsečku nahrádzajúcu predošlé dve.

Prečo to vieme? Lebo všetky ostatné úsečky musia mať zároveň spoločný bod aj s jednou aj s druhou úsečkou, čiže nejakou svojou časťou budú nutne ležať v ich prieniku. Po $n-1$ operáciach sa dopracujeme k finálnem prieniku všetkých n úsečiek. Kedže tento prienik je tvorený aspoň jedným bodom (inak by aspoň dve úsečky nemali spoločný bod, čo je spor so zadaním), náš príklad je týmto vyriešený.

Príklad č. 8 (opravovali Zajo, Terka):

Zadanie: Regál na pečivo má plechy umiestnené v mriežke 8x8. Keď sa vyprázdni, dopĺňajú ho dvaja brigádnici. Striedavo dopĺňajú po jednom plechu. Začína prvý brigádnik a doplní ľubovoľný plech. Aby to vyzeralo esteticky, každý ďalší doplnený plech musí hranou (vrcholom nestačí) susediť s naposledy doplneným plechom. Brigádnik, ktorý už nemôže doplniť žiaden plech podľa pravidla, prehráva. Má niektorý z nich vyhrávajúcu stratégiu? Ak áno, akú?

Riešenie: Pri pohľade na túto úlohu sa prvé myšlienky každého z vás mohli veľmi odlišovať. Jednou z nich by mohol byť odhad, ktorý hráč bude mať vyhrávajúcu stratégiu. Keď sa bavíme o stratégii, potrebujeme vymyslieť jednoznačný návod ako vyhrať, podľa ktorého sa má hráč riadiť, nech súper urobí akýkoľvek ťah. Z matematických dôvodov skúsme volať plechy políčkami, pridanie plechu zaplnením políčka a regál plánikom.

Herný plánik má $8 \times 8 = 64$ políčok, čo je párny počet. Po prvom ťahu ostane nezaplnený nepárny počet políčok $(64-1=63)$, po ťahu druhého hráča bude nezaplnených políčok opäť párny počet $(64-2=62)$. Z toho vyplýva, že ak má vyhrať prvý hráč, prázdnych aj zaplnených políčok bude na konci nepárny počet, a ak má vyhrať druhý hráč, počet zaplnených aj prázdnych políčok bude párny. Keby bol na konci hry plánik celý zaplnený, vyhral by hráč číslo dva. To nám nejak intuitívne hovorí, že by sme mohli skúsiť vymyslieť vyhrávajúcu stratégiu pre druhého hráča.

Vieme, že vyhrá, ak bude celá plocha zaplnená, z čoho tiež vyplýva, že obaja hráči urobia rovnaký počet ťahov. Druhý hráč si musí zaistiť, že na každý súperov ťah bude vedieť "odpovedať". Jeden zo spôsobov je nájsť si ku každému políčku takého "kamaráta", že v prípade kedy ho vyplní prvý hráč, druhý bude môcť zaplniť kamaráta a naopak.

Jednoducho ak prvý hráč zaplní toto políčko, tak druhý hráč automaticky vie, že má zaplniť jeho "kamaráta". Ak sa bude týmto postupom riadiť druhý hráč od začiatku, bude mať vždy zaručený ťah až sa nakoniec dostane hra do stavu, že prvý hráč už nebude môcť ťahať.

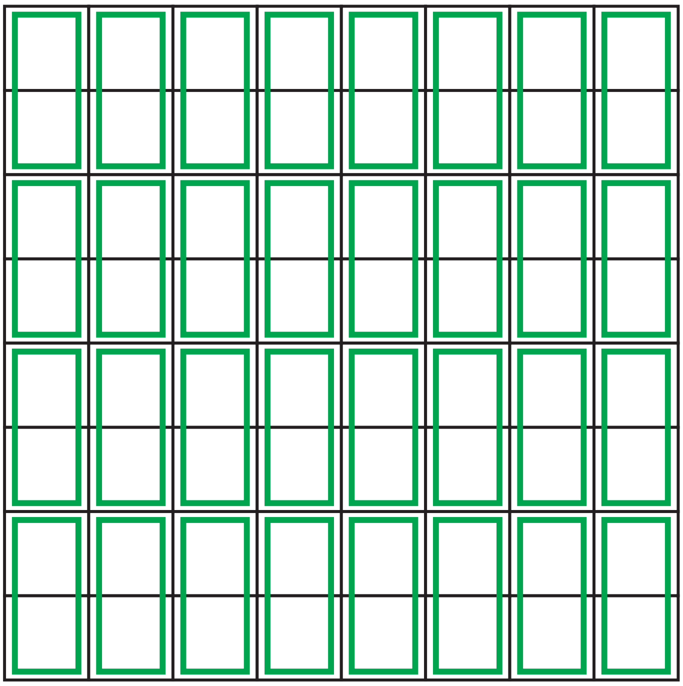
Prvý hráč nemôže tento postup nijak znemožniť, pretože druhý hráč má dopredu určený práve jeden protiťah ku každému ťahu prvého hráča.

Ako tieto dvojice políčok nájsť? Podmienkou je, že políčka v dvojici sa musia dotýkať stranou a každé políčko musí patriť do práve jednej dvojice. Tým pádom vieme, že tieto dvojice budú obdĺžniky 2×1, ako domino. Najjednoduchší spôsob ako usporiadať obdĺžniky 2×1 do mriežky 8×8 je poukladať ich všetky jedným smerom ako na obrázku 3.

Prvý hráč môže urobiť akýkoľvek ťah a hráč číslo dva bude schopný zaplniť jeho dvojicu (druhé políčko dotyčného domina). Nemôže sa stať, že by už dvojica bola zaplnená, lebo každé políčko má práve jednu dvojicu (a dvojicu vždy začne prvý hráč a druhý ju okamžite doplní). Tiež je splnené, že sa ťahy budú vždy dotýkať stranou.

Komentár: Riešenia viacerých z vás mali podobu iba sady dobrých rád a nie stratégie. Ak ste napríklad napísali, že treba vždy odbočovať do oblasti nepárnej veľkosti, tak je to fajn pozorovanie, že ak v nej potom všetko zaplníme tak vyhráme. Problém je však v tom, že možno nebudeme mať na výber kam odbočiť, alebo bude odbáčať súper. Tieto nedostatky sa v iných ako v tomto vzorovom riešení ošetrovali pomerne ťažko čo viedlo aj ku stratám väčšieho množstva bodov.

Zoberte si preto z tohoto príkladu to, že výherná stratégia musí počítať s každým prípadom a o každom prípade musíme vedieť, že bude fungovať.



Obr. 3: Zeleným sú vyznačené dvojice políčok

Príklad č. 9 (opravovali Tomáš, Timka):

Zadanie: V TamNekúp! predávajú v oddelení pečiva žemličky. 100 žemličiek majú vyložených na pulte v tvare štvorca 10×10. Bohužiaľ (alebo našťastie pre majiteľa KúpTu!) sa medzi žemličkami rozšírila pleseň. Pleseň nakazila niektorých 9 žemličiek. Následne sa šíri. Ak nejaká žemlička susedí (vodorovne, alebo zvislo) s aspoň dvoma nakazenými žemličkami, tak sa tiež nakazí. Môže sa stať, že sa takto postupne nakazí všetkých 100 žemličiek? Ak nie, koľko najviac žemličiek je pleseň schopná nakaziť? (Nezabudnite ukázať, ako nakazí všetkých 100, alebo prečo to nebude viac)

Riešenie: Po prečítaní zadania a chvíli skúšania tušíme, že to nepôjde a že zaplníme najviac 81 políčok. Dokázať to na prvý aj druhý pohľad nie je vôbec zjavné. V takýchto príkladoch sa oplatí hľadať čo najjednoduchšie riešenie, ktoré často spočíva skôr v tom si všimnúť tú správnu vlastnosť, než vymýšľať veľké a komplikované rozoberanie prípadov.

Preto nás v tomto príklade bude zaujímať, ako sa mení obvod plochy obsadenej plesňou. Keď si rozložené žemličky predstavíme na štvorčekovej sieti, tak na začiatku má nakazená plocha obvod najviac 4×9, teda 36. To len v prípade, že žiadne dve nakazené políčka sa nedotýkajú stranou.

Ak sa nenakazeného políčka dotýkajú dve nakazené, políčko sa nám nakazí. Do obovdu sa namiesto pôvodných dvoch strán práve nakazeného políčka budú rátať zvyšné dve, ale obvod sa nezmení. No ak sa nenakazeného políčka dotýkajú až tri nakazené, obvod sa dokonca zmenší (z troch na jednu hranu), a to isté platí aj keď sa ho dotýkajú štyri (zo štyroch na nula hrán).

Z toho nám teda vyplýva, že najväčší obvod, aký môžme na konci dosiahnuť je pôvodné maximum 36. A keďže všetkých 100 žemličiek na pulte má obvod 40, tak je jasné, že nemôžeme nakaziť všetky žemličky. Na to, aby sme zistili koľko ich najviac môžme nakaziť, potrebujeme nájsť útvar s najväčším obsahom tak, aby mal obvod 36 – takýmto útvarom je napríklad štvorec 9×9. Na to, aby sme ho nakazili, nám stačí poukladať nakazené žemličky na jeho uhlopriečku.

Odpoveď: Pleseň je schopná nakaziť najviac 81 žemličiek.

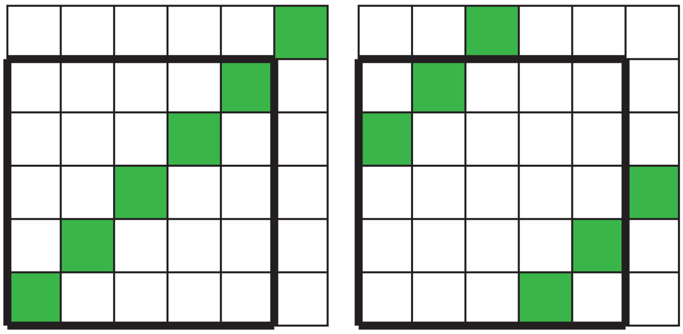
Komentár: Ako ste si mohli všimnúť, tento príklad bol ťažký a mal byť ťažký. Je ale veľmi dobrý na to, aby sme si uvedomili, že ak máme takýto príklad, kde nejaký stav a postupne robíme kroky(nakazenia), skúmať sa dajú naozaj rôzne vlastnosti.

Obsah, obvod, najľavejšie, najvrchnejšie, dve najvzdialenejšie, počet a kopu iných čo nám napadne sú všetko vlastnosti, na ktoré je fajn sa pozrieť. Je totiž celkom slušná šanca, že niektorá z nich nám riešenie ponúkne už takmer zadarmo, ako v tomto príklade.

Veľa z vás tiež založilo svoje riešenie na takej myšlienke, že ste postupne “zväčšovali“ plochu, pre ktorú príklad riešite. Na získanie intuície v riešení príkladu je užitočné si vyskúšať menšie prípady (koľko najviac políčok nakazíme z dvoch, prípadne troch políčok?). V týchto malých prípadoch to ide pomerne jednoducho všetko vyskúšať a získame predstavu.

Problém ale nastal pri “zväčšovaní“. Ak totiž poznáme správne riešenie pre povedzme 3 políčka, ako vieme, že riešenie pre 4 políčka ho bude obsahovať? Nemôže sa stať, že po umiestnení troch políčok to nebude to optimálne riešenie pre len 3 políčka, ale po pridaní štvrtého to bude o toľko lepšie, že to prekoná aj to riešnie štyroch políčok, ktoré sme založili na riešení pre 3 políčka? Podobne pre iné veľkosti

Demonštrujme si túto myšlienku bližšie na príklade na obrázku 4.



Obr. 4: Porovnanie dvoch prístupov k riešeniu 6×6.

Na obrázku naľavo je ilustrovaný prístup postupného rozširovania. Na obrázku napravo je príklad takého rozmiestnenia 6 políčok, že ľubovoľných 5 z nich nestačí na to, aby zafarbili plochu 5×5. Týmto príkladom sme dokázali, že optimálne riešenie pre 6×6 nemusí obsahovať ako svoju časť optimálne riešenie pre 5×5.

Je síce pravda, že lepšie ako tá uhlopriečka to nebude, ale postupné rozširovanie nie je ani zďaleka korektný postup. Aby sme to napravili, museli by sme naozaj ukázať, že rozšírením najlepšieho riešenia opäť dostaneme najlepšie riešenie.

Na tento mylný, ale ľahko uveriteľný postup sa nechalo nalákať viacero z vás a preto veríme, že nabudúce sa nenecháte nachytať a zase raz poznáte o techniku riešenia príkladu viac :)

Prémia (opravovali Tomáš, Timka):

Zadanie: Máme nekonečné štvorčekové ihrisko na ktorom je každé políčko buď biele alebo čierne, a na ňom vyznačenú oblasť políčok 6×6. Húsenica stojí na políčku ihriska otočená do nejakého zo štyroch smerov.

- Ak stojí na čiernom políčku, tak sa otočí vpravo o $90°$, zmení farbu políčka na ktorom stojí a pohne sa o jedno políčko dopredu (v smere kam je otočená).
- Ak stojí na bielom políčku, tak sa otočí vľavo o $90°$, zmení farbu políčka na ktorom stojí a pohne sa o jedno políčko dopredu.

Na novom políčku sa tento postup znova opakuje. Na začiatku môžeme zafarbiť políčka na celom nekonečnom ihrisku na čierno alebo na bielo, ako len chceme. Húsenica potom spraví 36 krokov. Následne sa pozrieme, koľko čiernych štvorčekov je vo vyznačenej oblasti 6×6.

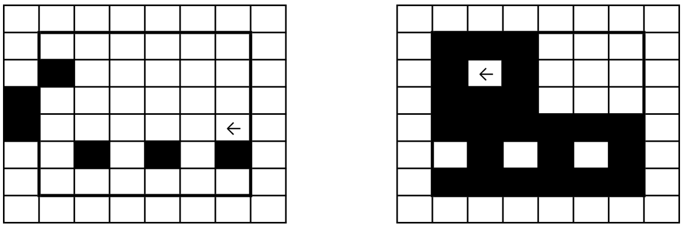
“Skóre” je:

$||\text{počet čiernych políčok v oblasti } 6 \times 6 \text{ na konci}|| - ||\text{počet čiernych políčok v oblasti } 6 \times 6 \text{ na začiatku}||$

(teda koľko čiernych políčok v oblasti pribudlo). Navrhnite také počiatočné ofarbenie ihriska a pôvodné umiestnenie a natočenie húsenice, aby bolo skóre čo najvyššie.

Riešenie: Zadaniu príkladu ste pochopili takmer všetci a pekne ste sa popasovali s riešením. Najčastejšou chybou bolo jedno zlé otočenie, ktoré vám pokazilo zvyšok riešenia. Najlepšie riešenia, ktoré ste našli majú skóre 18 a tu je jedno z nich (Obr. 5).

Odpoveď: Najväčšie dosiahnuté skóre je 18.



Obr. 5: Riešenie

Komentár: Pre zaujímavosť, verejne známy problém, ktorým sme sa pri tvorbe príkladu inšpirovali sa po anglicky volá Langton's Ant. Ak vás úloha zaujala, na internete si môžete nájsť aj niekoľko simulátorov a pohrať sa s nimi.