Vzorové riešenia 3. kola zimnej série 2015/2016

Príklad č. 1 (opravoval Tomáš):

Zadanie: Chuť vajíčka výrazne ovplyvní počet minút, počas ktorých ho varíme. Každé vajíčko môžeme variť len celočíselný počet minút a to aspoň jednu aby nebolo surové. Mám však len dvojo presýpacích hodín a to 3 a 7-minútové, pomocou nich meriam všetky časy. Dokážem namerať pomocou týchto dvoch hodín každý čas na varenie vajíčka? Pozn.: Môžem spustiť hodiny aj pred začiatkom meraného času.

Riešenie: Najprv si uvedomíme, že každé celé číslo vieme zapísať ako násobok čísla 3 plus zvyšok (číslo 3 preto, lebo najmenšie presýpacie hodiny merajú 3 minúty). Teda máme tri možnosti: $3k$, $3k+1$ a $3k+2$, kde k je tiež celé číslo. Jediné, čo musíme spraviť, je zistiť, ako odmerať 1 minútu pre $3k+1$ a 2 minúty pre $3k+2$. Keď to budeme mať odmerané, jediné, čo musíme spraviť, je pridať k otočení menších presýpacích hodín.

Je viacero možností, ako odmerať 1 a 2 minúty, ja ukážem ten najjednoduchší. 1 minútu vieme odmerať nasledovne: Na začiatku otočíme obe hodiny. Keď sa 3-minútové dosypú, ostávajú vo väčších ešte 4 minúty. Menšie otočíme hneď, ako prvýkrát skončia. Väčšie sme otočili len raz a menšie dvakrát, čiže keď menšie druhýkrát skončia, na väčších ostáva len jedna minúta $(7-2\cdot 3=1)$.

2 minúty vieme odmerať podobne, akurát neotočíme menšie hodiny dvakrát, ale trikrát. Pretože, keď sa väčšie hodiny dosypú, na menších ostanú presne 2 minúty $(3\cdot 3-7=2)$.

Akékoľvek väčšie číslo ako 2 najprv vydelím tromi, dostanem $3k+$ zvyšok. Najprv odmeriame zvyšok a následne k-krát otočíme menšie hodiny. Takto vieme namerať akýkoľvek počet minút.

Odpoveď: Pomocou 3 a 7-minútových hodín vieme namerať akúkoľvek celočíselnú dĺžku varenia.

Komentár: Príklad sa dal riešiť viacero spôsobmi, všetci ste ukázali, ako odmerať malé čísla, no niektorým z vás chýbalo vysvetlenie pre čísla väčšie ako tie, ktoré ste priamo ukázali.

Príklad č. 2 (opravovala Dada):

Zadanie: Majme štvorec zo zápaliek. Takýto štvorec vznikne tak, že jeho stranu vytvoríme niekoľkými zápalkami a jeho vnútro vyplníme štvorčekovou sieťou s dĺžkou strany jedna zápalka. Teda ak je strana štvorca 2 zápalky, použijeme na stavbu 12 zápaliek. Koľko zápaliek použijeme na stavbu štvorca so stranou 100 zápaliek?

Riešenie: Dobrý večer milé dámy a milí páni. Dostalo sa mi do uší, že ste sa minulý týždeň viacerí hrali so zápalkami. Som rada, že z hasičskej stanice nemáme hlásený nadmerný počet výjazdov, poďme sa teda pozrieť bližšie, čo ste to s tými zápalkami stvárali.

Čo ste to robili? Skladali štvorce? Veľké? A koľko zápaliek ste potrebovali? Aháá, to ste zisťovali? No poďme teda na to.

Predstavme si najprv menší štvorec zo zápaliek, pre začiatok dajme 5×5. Tieto zápalky sa dajú spočítať celkom jednoducho, naším cieľom ale bude nájsť systém, ako sa zápalky dobre počítajú. Tento postup potom uplatníme aj na veľký štvorec.

Vidíme iste, že tu máme nejaké vodorovné a nejaké zvislé zápalky. A čo ešte vieme? No, že keď takýto štvorec otočíme o 90 stupňov, bude to stále štvorec. Potom sa zo zvislých stanú vodorovné zápalky a naopak. Preto môžeme povedať, že počet vodorovných a zvislých zápaliek bude rovnaký. Poďme porátať teraz vodorovné zápalky. Náš štvorec má na jednej strane 5 menších štvorcov (so stranou 1 zápalka). Môžeme teda z každého štvorca zarátať iba jednu zápalku, a to tú hornú. Keď tak spravíme, máme zatiaľ $5\cdot 5=25$ štvorcov a z každého iba vrchnú zápalku, teda dokopy 25 zápaliek.

Čo nám ešte chýba ku šťastiu? No predsa zrátať spodný riadok, aby sme mali štvorec „ukončený“. To je teraz 5 zápaliek, a vo všeobecnosti to bude toľko zápaliek, koľko je ich na jednej strane veľkého štvorca. Vodorovných zápaliek bude teda $25+5=30$, dohodli sme sa, že zvislých bude rovnako, preto dokopy máme $30\cdot 2=60$ zápaliek.

Tak čo, pripravení na veľký štvorec? Poďme na to:

Vodorovných zápaliek je rovnako ako zvislých. Rátajme teda iba hornú z každého malého štvorca. Malých štvorcov je $100\cdot 100=10000$, teda máme rovnako 10000 zápaliek. Musíme ešte pripočítať tie, na ktoré

sme zabudli – teda spodný riadok – to je 100 zápaliek (lebo máme štvorec 100×100). Máme teda dokopy $10000+100 = 10100$ vodorovných a ešte rovnako veľa zvislých zápaliek. Spolu ich teda máme $10100+10100 = 20200$.
Odpoveď: Na veľký štvorec so stranou 100 použijeme 20200 zápaliek.
Komentár: Väčšina z vás sa k riešeniu dopátrala aj s úplne správnym postupom. Viacerí ste nepočítali zvislé a vodorovné zápalky, ale obvod a vnútornú sieť štvorca, čo bolo rovnako dobré a pekné riešenie. Body boli strhávané iba za drobné nedovysvetlenia prípadne iné nezrovnalosti, ktorých bolo ale veľmi málo.

Príklad č. 3 (opravoval Peťo):

Zadanie: 47 žiakov sa zúčastnilo skúšky z matematiky, fyziky a informatiky. Skúšku z informatiky nespravilo 31 žiakov a 1 žiak spravil iba skúšku z fyziky a nič iné. Polovica ľudí, čo spravila skúšku z informatiky, spravila aj skúšku z fyziky. Skúšku z matematiky aj z fyziky spravilo desaťkrát viac študentov ako iba skúšku z fyziky a z ničoho iného. Skúšku len z matematiky spravilo dvakrát menej študentov, ako počet študentov ktorí spravili skúšku z matematiky aj fyziky, ale nie z informatiky. Skúšku z matematiky aj informatiky ale nie z fyziky spravilo o dvoch študentov viac, ako počet študentov, ktorí spravili len skúšku z informatiky. Všetky tri skúšky spravilo o jedného študenta menej, ako skúšku len z informatiky. Koľko študentov spravilo aspoň jednu skúšku?
Riešenie: Najprv sa zamyslíme a určíme si, koľko a akých skúšok mohli žiaci spraviť. Zadanie hovorí, že žiaci sa zúčastnili na skúškach z matematiky, fyziky a informatiky. Teda mohli spraviť buď:

- iba matematiku a nič iné (označme si túto skupinu žiakov ako M), alebo
- iba fyziku a nič iné (F), alebo
- iba informatiku a nič iné (I), alebo
- matematiku a fyziku, ale nie informatiku (MF), alebo
- matematiku a informatiku, ale nie fyziku (MI), alebo
- fyziku a informatiku, ale nie matematiku (FI), alebo
- všetky tri skúšky (MFI), alebo
- ani jednu skúšku (N).

Je dobré si pamätať, že jeden žiak je presne v jednej z týchto skupín.

Teraz už len stačí postupne čítať informácie zo zadania a príklad sa bude riešiť prakticky sám. Druhá veta začína slovami *„Skúšku z informatiky nespravilo* 31 *žiakov ...“*. Keďže všetkých žiakov bolo 47, tak tých, čo spravili informatiku potom musí byť $47 - 31 = 16$. To sú žiaci, ktorí patria do skupín I, MI, FI a MFI.

Tretia veta znie: *„Polovica ľudí, čo spravila skúšku z informatiky, spravila aj skúšku z fyziky.“* V predchádzajúcom odseku sme už prišli na to, že 16 žiakov spravilo informatiku. Teda polovica z nich je 8 žiakov. To sú žiaci, ktorí spravili informatiku aj fyziku (o matematike sa tam nič nepíše, teda niektorí ju mohli spraviť a niektorí nie) – žiaci v skupinách FI a MFI. Keďže táto polovica spravila skúšku z fyziky, tak druhá polovica ju nespravila. To sú žiaci v skupinách I a MI, ktorých je spolu tiež 8.

A teraz prichádza zákernosť vedúcich. Treba sa totiž pozrieť až na šiestu vetu: *„Skúšku z matematiky aj informatiky ale nie z fyziky spravilo o dvoch študentov viac, ako počet študentov, ktorí spravili len skúšku z informatiky.“* Už sme prišli na to, že táto veta hovorí spolu o 8 žiakoch (sú to žiaci v skupinách I a MI). Sú rozdelení do dvoch skupín, pričom jedna má o dvoch žiakov viac ako druhá. To sa dá len tak, že v skupine I budú 3 a v skupine MI budú 5 žiaci.

Siedma veta hovorí: *„Všetky tri skúšky spravilo o jedného študenta menej, ako skúšku len z informatiky.“* Teda v skupine MFI budú $3 - 1 = 2$ žiaci.

Teraz sa treba pozrieť na štvrtú vetu, ktorá znie: *„Skúšku z matematiky aj z fyziky spravilo desaťkrát viac študentov ako iba skúšku z fyziky a z ničoho iného.“* Skúšku z matematiky a fyziky spravili žiaci v skupine MF a (na čo pár riešiteľov zabudlo) aj v skupine MFI. Z konca druhej vety vieme, že iba skúšku z fyziky spravil jeden žiak, teda v skupinách MF a MFI bude spolu $10 \cdot 1 = 10$ žiakov. V predchádzajúcom odseku sme prišli na to, že všetky tri skúšky spravili dvaja žiaci. Preto žiakov, ktorí spravili skúšky z matematiky a fyziky, ale nie z informatiky, je $10 - 2 = 8$.

Zostáva už iba piata veta: *„Skúšku len z matematiky spravilo dvakrát menej študentov, ako počet študentov ktorí spravili skúšku z matematiky aj fyziky, ale nie z informatiky.“* Vyššie sme zistili, že v skupine MF je osem žiakov, čo znamená, že len skúšku z matematiky spravili štyria žiaci.

Nakoniec, keď spočítame počty žiakov v skupinách M, F, I, MF, MI, FI a MFI, dostaneme odpoveď na poslednú vetu zadania: *„Koľko študentov spravilo aspoň jednu skúšku?“*

Odpoveď: Aspoň jednu skúšku spravilo 29 žiakov.

Komentár: Príklad ste krásne zvládli, čoho dôkazom je aj veľký počet desaťbodových riešení.

Príklad č. 4 (opravovala Tete):

Zadanie: Samko si staval vežu z klasických hracích kociek. Klasická hracia kocka má na šiestich stenách čísla od 1 po 6, pričom čísla oproti sebe majú vždy súčet 7. Pri stavaní platí, že sa k sebe dajú priložiť vždy iba steny kocky s rovnakým číslom. Skóre nazvime číslo, ktoré je súčtom hodnôt, ktorými sa steny dotýkajú. Napríklad ak sa 2 moje kocky dotýkajú stenami so 4 a ďalšie 2 kocky stenami s 5, moje skóre je 9. Samko postavil vežu z 8 kociek na sebe. Potom mu 5 horných kociek spadlo a jeho skóre kleslo o 15. Jednu padnutú kocku odobral a zvyšné dal po dvojiciach na seba. Stále je však jeho skóre o 4 menšie než jeho pôvodné skóre. Aký je súčet čísel na vrchu všetkých troch vežičiek?

Riešenie: Máme 8 kociek na sebe, teda máme 7 miest, kde sa kocky spájajú. Keď má spoj hodnotu x, tak spoje okolo neho musia mať hodnotu $7 - x$.

Po spadnutí 5 kociek, spadlo 5 spojov (4 spoje medzi nimi a 5., ktorým boli spojené zo zvyškom kociek) a skóre sa znížilo o 15. Ako sme ukázali predtým, dva susedné spoje majú súčet 7. Čiže v piatich spojoch máme dve dvojice a jeden osamotený spoj. Dve dvojice sú dokopy $2 \cdot 7 = 14$.

Pre posledný spoj potom ostalo 1. To znamená, že $x = 1$. Každé párne spojenie v prvotnej veži je $7 - x$ a každé nepárne spojenie je x. Keďže spojenie, ktoré spájalo oddelené kocky s tými, čo ešte stoja, sme tiež zarátali, tak je buď 1. v poradí alebo 5. (posledné). V oboch prípadoch je nepárne, čiže je rovné 1. Na vrchu veže z troch kociek je číslo 1.

Vieme, že po postavení dvoch menších veží je skóre menšie už len o 4, číže vzrástlo o $15 - 4 = 11$. Ak chceme dostať súčet 11 z čísel od 1 po 6, vieme to len ako súčet 5 a 6. To znamená, že jedna veža má na vrchu $7 - 5 = 2$ a druhá má na vrchu $7 - 6 = 1$. Súčet na vrchu veží je teda $1 + 2 + 1 = 4$.

Odpoveď: Súčet na vrchu všetkých troch vežičiek je 4.

Príklad č. 5 (opravovali Jumaj, Mišo, Zuzka V.):

Zadanie: Bol som už strašne unavený z dlhého pochodu lesom, chcelo sa mi spať. Doplazil som sa na čistinku, kde sa predo mnou zjavili čísla. Boli nádherné a veselo tancovali v kruhu. Všimol som si, že ciferný súčet každého čísla bol o 1 väčší ako jeho ciferný súčin. Žiadne zároveň nebolo väčšie ako 112 a všetky boli prvočísla. Všetky čísla, ktoré toto spĺňali, na lúke tancovali. Keď som toto o číslach odhalil, zamenili sa. Mali sme kruh čísel, napr. 12;34;56 v takomto vzájomnom poradí oddelené oddelovačmi. Zameniť sa znamená, že sa oddeľovače posunú o 1 doľava. Teda by nám vznikol kruh čísel 23;45;61. Ako treba usporiadať čísla v kruhu, aby sa po zamenení ich súčet zmenil čo najmenej? A o koľko sa potom ich súčet zmení?

Riešenie: Najprv zistime, aké čísla na lúke tancujú. Ciferný súčet jednociferného čísla je to isté číslo. Ciferný súčin takisto. Zadanie ale hovorí, že ciferný súčin má byť o 1 menší, čo teda pre jednociferné čísla neplatí.

Pozrime sa teraz na trojciferné čísla. Zo zadania vieme, že na lúke neboli čísla väčšie ako 112 a všetky boli prvočísla. Toto spĺňajú len $101, 103, 107, 109$. Všetky tieto čísla majú v sebe 0, teda ich ciferný súčin bude tiež 0. Potom by zo zadania musel byť ich ciferný súčet 1. Čiže trojciferné čísla nemôžeme použiť.

Povedzme si, že jedna cifra z dvojciferného čísla sa rovná 1. Potom je ciferný súčin rovný druhému číslu. Ich súčet bude väčší práve o 1 od druhého čísla. Teda všetky dvojciferné čísla, ktoré obsahujú 1, vyhovujú zadaniu. Pokiaľ dosadíme akékoľvek iné dvojciferné číslo, zistíme, že druhá cifra musí byť 1. Takže na lúke tancujú konkrétne tieto čísla: 11, 13, 17, 19, 31, 41, 61 a 71.

Spočítajme si v tomto usporiadaní čísiel ich súčet. Na mieste jednotiek je ich súčet 24. Prekvapivo aj na mieste desiatok sa ich ciferný súčet bude rovnať 24. Keď ich spolu spočítame, ich celkový súčet bude $24 \cdot 10 + 24 = 264$. Vidíme, že sme dostali aj na mieste jednotiek, aj na mieste desiatok rovnaké číslo. Zamenenie je vlastne iba výmena cifier na pozícii desiatok aj jednotiek. Je jedno, ako ich usporiadame. Vždy po zamenení budú rovnaké cifry na pozícií desiatok a rovnaké na pozícií jednotiek.

Poďme si vyčísliť, ako sa zmení súčet po zamenení. Zo zadania vieme, že sa oddeľovač posunie o 1 doľava, čiže nové usporiadanie týchto čísiel bude vyzerať takto: 11, 31, 71, 93, 14, 16, 17 a 11. Vypočítame si celkový súčet, ktorý sa rovná 264. Vidíme, že sa ciferný súčet vôbec nezmenil. Toto sa dá vidieť tiež z toho, že celkový súčet na pozícii jednotiek a desiatok je rovnaký.

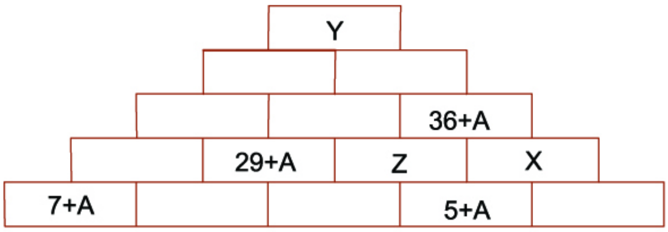
Odpoveď: Je jedno, ako čísla v kruhu zoradíme, ich súčet sa nikdy nezmení.

Komentár: Veľa z vás čísla, ktoré tancovali na lúke, jednoducho vypísalo bez nejakého komentáru. Body sme za to nestrhávali, no oplatí sa popísať, ako ste sa k číslam dostali – keby ste sa náhodou pomýlili.

Ďalší sa v zisťovaní našich ôsmich čísiel odvolali na všeobecné tvrdenie, že číslo, ktoré má ciferný súčin o 1 menší ako ciferný súčet, musí obsahovať 1. Toto síce platí (okrem jednociferných), no bez dôkazu sú to v riešení len slová do vetra. Celkovo ste ale príklad zvládli pekne.

Príklad č. 6 (opravoval Ivo):

Zadanie: Pred sebou máme tzv. sčítavaciu pyramídu (Obrázok 1). Každá tehlička obsahuje súčet čísel v dvoch tehličkách pod ňou (a spodný riadok obsahuje niekoľko prirodzených). Poznáme však iba niektoré z čísel. Ďalej vieme že X, Y a Z predstavujú tiež nejaké čísla o ktorých vieme, že $Y + Z = 236$. Viete určiť hodnotu X?



Obr. 1: Sčítavacia pyramída

Riešenie: Ideme si vyjadriť všetky spodné obdĺžničky pomocou dvoch premenných A a Z. Začnime sprava. Vieme, že toto číslo, nazvime ho B, po sčítaní s $5 + A$ nám dá X:

$$B + (5 + A) = X$$

Zároveň si vieme vyjadriť X ako číslo, ktoré po sčítaní so Z nám dá $36 + A$:

$$X + Z = 36 + A$$

Spojením týchto dvoch rovníc do jednej nám vyšlo:

$$36 + A = Z + X = Z + B + (5 + A)$$

Odtiaľto si po úpravách vyjadríme $B = 31 - Z$. Ideme si vyjadriť tretie políčko sprava. Opäť tam je nejaké číslo, nazveme C, ktoré po sčítaní s $5 + A$ nám dá Z. Z tohto vyplýva, že:

$$C = Z - (5 + A) = Z - 5 - A$$

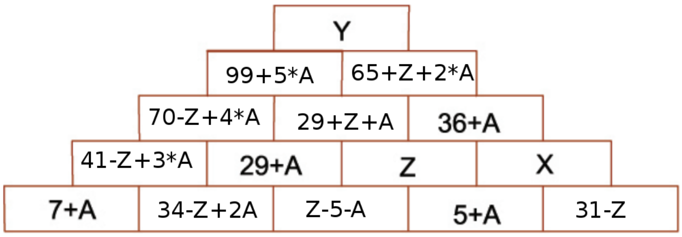
Obdobným spôsobom sa dostaneme k vyjadreniu štvrtého políčka zľava ako $2 \cdot A - Z + 34$. Takto si vieme vyjadriť všetky políčka (Obrázok 2).

Z obrázka nám vyplýva rovnica:

$$Y = 164 + 7A + Z$$

Za Y si dosadíme $236 - Z$, vyjadríme si A pomocou Z a následne si vyjadríme celý spodný riadok iba pomocou A:

$$Z = \frac{72 - 7 \cdot A}{2}$$



Obr. 2: Pyramída pomocou A a Z

Zadanie sa dalo pochopiť dvoma spôsobmi. Prvý bol, že v 5. riadku bude naozaj iba niekoľko, teda nie nutne všetky (no aspoň dve), prirodzených čísel. Druhý bol, že všetky čísla v 5. riadku sú prirodzené. Ako prvé si rozoberieme prvé pochopenie zadania, potom sa pozrieme na druhé pochopenie.
Uvažujme, že aspoň dve čísla v spodnom riadku musia byť prirodzené.

Najprv si ukážeme, že A môže byť iba celé číslo. Ak by A nebolo celé číslo, ani čísla $7+A$ a $5+A$ nebudú celé, teda ani prirodzené. Teda 2 čísla z trojice $\frac{11\cdot A-4}{2}$, $\frac{62-9\cdot A}{2}$, $\frac{7\cdot A-10}{2}$ budú prirodzené. Toto nastáva iba vtedy, keď budú čitatele aspoň dvoch zlomkov párne. Pozrieme si pre jednotlivé zlomky, kedy to nastáva:

$$\frac{11\cdot A-4}{2}$$

Výraz $11\cdot A-4$ musí byť párny, väčší od 0. Čo z toho vyplýva pre A? Vyjadríme si A ako reálne číslo v tvare $\frac{e}{f}$, e a f sa už nedajú navzájom skrátiť, $f>0$. Toto sú všetko podmienky, ktoré si môžem určiť bez ujmy na všeobecnosti. Zároveň, po vynásobení 11, musí vzniknúť celé číslo. Aby sa tak naozaj stalo, f musí byť také číslo, aby sa dalo prinajhoršom skrátiť 11. Inak povedané, f delí 11, a také čísla sú len 2. $f=1$ alebo $f=11$. Ak $f=1$, A je celé číslo, čo v tomto prípade nerozoberám. Idem si pozrieť e.

Teraz, po dosadení $f=11$, sa nám výraz upravil na $e-4$, ktorý musí byť párny a e celé. Jediný spôsob, ako môže byť celý tento výraz párny, je, že ako 4, tak aj e musia mať rovnakú paritu. To sa dá dosiahnuť iba tak, že e bude tiež párne. Zároveň platí aj $e-4>0$, z čoho vyplýva, že $e>4$.

Podobným spôsobom si viem vyjadriť podmienku, aké musia byť e a f aj pre ostatné 2 zlomky. Pre zlomok $\frac{62-9\cdot A}{2}$ bude f rovné buď 1, 3, alebo 9 a zároveň $e<62$. Pre zlomok $\frac{7\cdot A-10}{2}$ bude f rovné 1 alebo 7 a zároveň $e>10$. Pre oba mi vychádza podmienka, že e je párne a celé číslo.

Teraz hľadám nejakú spoločnú podmienku, ktorá platí aj pre e, aj pre f, aspoň pre 2 zlomky. Zhoda čísla f nastáva iba vtedy, pokiaľ sa rovná 1. Inak povedané, ak chceme aby aspoň 2 zo zlomkov $\frac{11\cdot A-4}{2}$, $\frac{62-\cdot A}{2}$, $\frac{7\cdot A-10}{2}$ boli prirodzené, bude sa $A=e$, čiže A môže byť iba celé, párne číslo.
Odteraz stačí uvažovať o A iba ako o celom čísle, pre celú časť riešenia odtiaľto.

Porovnáme si podmienky prirodzenosti týchto zlomkov s podmienkami prirodzenosti čísel $5+A$ a $7+A$. Tieto čísla budú obe určite prirodzené pre $A>-5$. Toto je silnejšia podmienka, ako je pri zlomkoch $\frac{11\cdot A-4}{2}$ a $\frac{7\cdot A-10}{2}$. Neexistuje predsa len ešte nejaké A, okrem $A>-5$? Existuje. My si totiž môžme povedať, že prirodzenými číslami budú naraz $7+A$, najsilnejšia podmienka ohraničujúca A zo spodu a $\frac{62-9\cdot A}{2}$, jediné číslo, ktorého prirodzenosť ohraničuje A zhora.

Kombináciou podmienok $-7<A$ a $A<\frac{62}{9}$, pričom musím uvažovať o jeho párnosti, dostávam už posledné riešenie $A=-6$. Takto sa dostávame ku všetkým možným A, A je celé číslo väčšie ako -5 alebo $A=-6$.

Toto ale nebolo naším cieľom. Máme zistiť, čomu sa môže rovnať X. Preto si okopírujeme rovnicu zhora, ale namiesto normálneho Z tam dáme už Z vyjadrené pomocou A.

$$36+A=X+Z=X+\frac{72-7\cdot A}{2}$$

Vyjadríme si odtiaľ X, a upravíme:

$$X=\frac{72-7\cdot A}{2}-(36+A)=\frac{9}{2}\cdot A$$

A ako sme zistili, A nie je jednoznačné, preto nemôžme presne určiť ani X. Vieme iba, že X sa môže rovnať -27, alebo $X = -18, -13,5, -9, ...$

Uvažujme, že všetky čísla v spodnom riadku musia byť prirodzené

Zoberme si podmienky, ktoré mi vyšli pre predchádzajúci príklad. Konkrétne, že A je párne číslo a $A < \frac{62}{9}$. Toto môžme spraviť kvôli tomu, že tento prípad je iba podmnožina riešení prvého prípadu.

Teraz potrebujeme dolné ohraničenie A. Toto ohraničenie zoberieme z podmienky, že aj zlomky $\frac{11 \cdot A - 4}{2}$ a $\frac{7 \cdot A - 10}{2}$ sú prirodzené. Teda väčšie ako 0.

$\frac{11 \cdot A - 4}{2} > 0$ a zároveň $\frac{7 \cdot A - 10}{2} > 0$

Z čoho po úpravách vyplýva:

$A > \frac{4}{11}$ a zároveň $A > \frac{10}{7}$, z čoho zoberieme silnejšie tvrdenie, a to $A > \frac{10}{7}$

Máme horné aj dolné ohraničenie pre A, pričom vieme, že je párne. Z toho nám vyplýva, že A môže byť iba 2, 4 alebo 6. Následne podľa vzťahu závislosti X od A, $X = 4,5 \cdot A$, nám vyplýva, že X je 9, 18 alebo 27.

Odpoveď: Nevieme určiť X presne, ani keď sú všetky čísla v 5. riadku prirodzené. Vieme si ho avšak vyjadriť ako $X = 4,5 \cdot A$, pre podmienku prirodzenosti celého 5. riadku: $X = 9, 18, 27$.

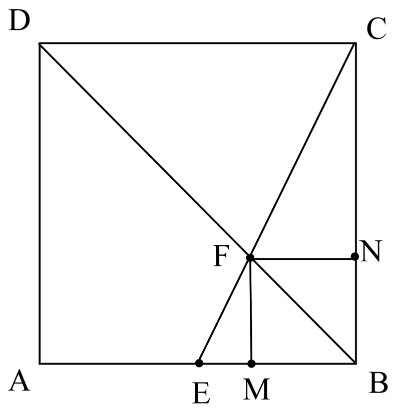
Bodovanie: Dostali ste 10 bodov aj za dobré riešenie prípadu, v ktorom ste riešili, že všetky čísla 5. riadku sú prirodzené.

Komentár: V komentároch máte komentáre, ktoré Vás opravujú aj podľa 1. časti vzorového riešenia, no nestrhávali sa za to body.

Príklad č. 7 (opravovala Zuzka):

Zadanie: Máme štvorec $ABCD$ s dĺžkou strán 24. Stred strany AB si označíme E. Priesečník priamok BD a EC si označíme F. Aká je vzdialenosť bodu F a priamky AB? Aká je vzdialenosť bodu F a priamky BC?

Riešenie: Z bodu F si urobíme kolmicu na AB, ktorá pretína priamku AB v bode M. Úsečka FM reprezentuje vzdialenosť bodu F od priamky AB. Takisto si urobíme kolmicu na BC z bodu F, ktorá pretína priamku BC v bode N (obrázok 3). Úsečka FN reprezentuje vzdialenosť bodu F od priamky BC. Keďže bod F leží na uhlopriečke štvorca, tak jeho vzdialenosť od oboch strán je rovnaká.



Obr. 3: Štvorec $ABCD$

Úsečka EB je polovicou strany štvorca, a teda má dĺžku 12. $\triangle EBC$ je pravouhlý, preto sa dá jeho obsah vypočítať ako polovica súčinu dĺžok odvesien: $\frac{|EB| \cdot |BC|}{2} = 144$. Tento $\triangle EBC$ je rozdelený na dva trojuholníky – $\triangle EBF$ a $\triangle FBC$.

Výška $\triangle EBF$ (nad stranou EB) je úsečkou FM. Preto je obsah tohto trojuholníka rovný:

$$\frac{|EB| \cdot |FM|}{2} = \frac{12 \cdot |FM|}{2} = 6 \cdot |FM|$$

Výška $\triangle FBC$ (nad stranou BC) je FN. Jeho obsah je rovný:

$$\frac{|BC| \cdot |FN|}{2} = \frac{24 \cdot |FN|}{2} = 12 \cdot |FN|$$

Vrátime sa späť k obsahu celého $\triangle EBC$, ktorý sa rovná 144. Zároveň sa však rovná súčtu obsahov $\triangle EBF$ a $\triangle FBC$, čo je $6 \cdot |FM| + 12 \cdot |FN|$. Ako už vieme, $|FM|$ sa rovná $|FN|$. Už nám to stačí dať do jednej jednoduchej rovnice: $144 = 18 \cdot |FM| \to |FM| = 8$

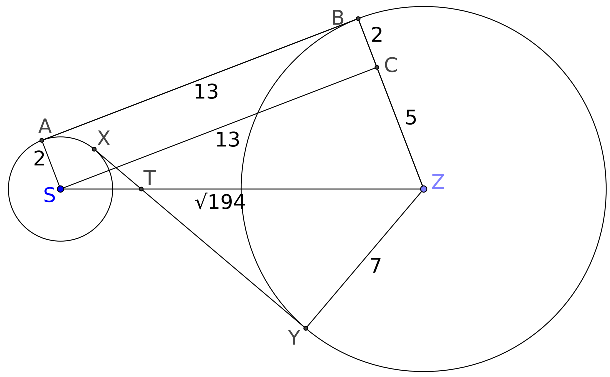
Odpoveď: Bod F je od priamky AB aj od priamky BC vzdialený 8.

Príklad č. 8 (opravoval Zajo):

Zadanie: Majme kružnicu k s polomerom 2 a stredom S a kružnicu l s polomerom 7 a stredom Z. Tieto kružnice sa nepretínajú. Zostrojíme ku nim dotyčnicu p, ktorá nepretína úsečku SZ a dotýka sa kružníc k a l v bodoch A a B. Následne zostrojím dotyčnicu q, ktorá pretína úsečku SZ a kružníc k a l sa dotýka v bodoch X a Y. Aká dlhá je úsečka XY, pokiaľ vieme, že $|AB| = 13$?

Riešenie: S príkladom si väčšina z vás hravo poradila, postup bol pomerne priamočiary. Dĺžky, ktoré sme mali zo zadania, sme mohli použiť na vyrátanie vzdialenosti stredov kružníc $|SZ|$.

Keď zostrojíme rovnobežku s AB prechádzajúcu S, pretne BZ v bode C vzdialenom 5 od Z (obrázok 4). Uhol SCZ bude pravý, lebo je rovnaký ako $\angle ABZ = 90°$ (Uhol medzi dotyčnicou a spojnicou so stredom je vždy pravý).

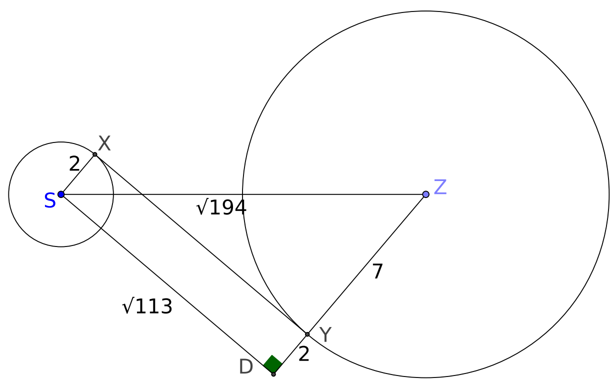


Obr. 4: Výpočet dĺžky SZ

Pytagorovou vetou pre $\triangle SCZ$ dostávame dĺžku SZ.

$$|SZ| = \sqrt{13^2 + 5^2} = \sqrt{194}$$

Hodilo by sa nám, ak by sme dostali ďalší pravouhlý trojuholník, kde by dve strany boli už známe a tretia hľadané XY. To sa dá urobiť napríklad zostrojením rovnobežky s XY prechádzajúcou S. Jej priesečník s ZY nazveme D (obrázok 5).



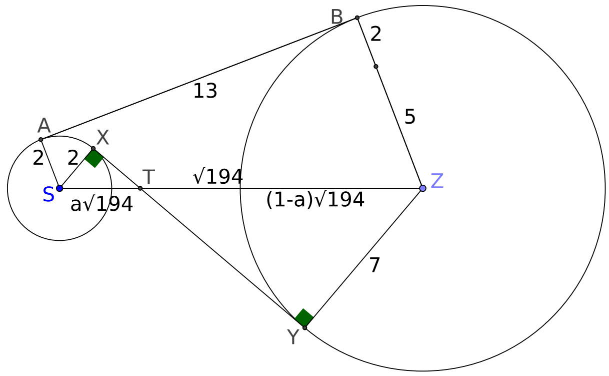
Obr. 5: Zostrojenie pravouhlého trojuholníka $\triangle SZD$

A už stačí len pytagorova veta pre $\triangle SZD$:

$$|XY| = |SD| = \sqrt{|SZ|^2 - |ZS|^2} = \sqrt{194 - 9^2} = \sqrt{113}$$

Iné riešenie: Príklad sa dal vyriešiť aj bez nápadu posunúť XY a vytvoriť pravouhlý trojuholník ako v predchádzajúcom riešení.

Označme si priesečník dotyčníc T (obrázok 6). Trojuholníky $\triangle SXT$ a $\triangle ZYT$ sú podobné, lebo majú dva spoločné uhly (pravý a pri T). Koeficient podobnosti je $2:7$ (zo strán, ktoré sú polomermi).



Obr. 6: Druhé riešenie s podobnosťou

Aj ST a ZT sú v pomere $2:7$:

$$\frac{2}{7} = \frac{a\sqrt{194}}{(1-a)\sqrt{194}}$$

$$2(1-a) = 7a, 2-2a = 7a, \frac{2}{9} = a, \frac{7}{9} = (1-a)$$

Z Pytagorových viet pre $\triangle SXT$ a $\triangle ZYT$:

$$2^2 + |XT|^2 = a^2\sqrt{194}^2$$

$$7^2 + |YT|^2 = (1-a)^2\sqrt{194}^2$$

Po úprave:

$$|XT|^2 = \frac{4}{81}\cdot 194 - 4 = \frac{4\cdot 194 - 4\cdot 81}{81} = \frac{4}{81}\cdot 113$$

$$|YT|^2 = \frac{49}{81}\cdot 194 - 49 = \frac{49\cdot 194 - 49\cdot 81}{81} = \frac{49}{81}\cdot 113$$

V súčte dostávame výsledok:

$$|XY| = |XT| + |YT| = \sqrt{\frac{4}{81}113} + \sqrt{\frac{49}{81}113} = \frac{2}{9}\sqrt{113} + \frac{7}{9}\sqrt{113} = \sqrt{113}$$

Odpoveď: Dĺžka úsečky $XY = \sqrt{113}$.

Príklad č. 9 (opravoval Lámač):

Zadanie: Dokážte, že najmenší spoločný násobok $[a,b]$ a najväčší spoločný deliteľ (a,b) ľubovoľných dvoch kladných celých čísel a,b spĺňajú nerovnosť $a\cdot(a,b) + b\cdot[a,b] \geq 2ab$ Zistite, kedy v tejto nerovnosti nastane rovnosť. Ževraj to má niečo dočinenia s tým, že často platí $[a,b]\cdot(a,b) = ab$. A ozaj, neplatí toto vždy?

Riešenie: Ako prvé sa pozrieme, čo vlastne jednotlivé čísla vyjadrujú, čomu sa rovnajú. Z definície vyplýva, že (a,b) delí a a taktiež aj b. Preto platí $a = (a,b)\cdot x$ a $b = (a,b)\cdot y$, pre prirodzené čísla x a y, pre ktoré platí $(x,y) = 1$. Čísla x a y sa nazývajú nesúdeliteľné, keďže ich najväčší spoločný deliteľ je 1.

Číslo x je súčinom všetkých prvočísel obsiahnutých v prvočíselnom rozklade a, a zároveň neobsiahnutých v prvočíselnom rozklade b. Číslo y je súčinom všetkých prvočísel neobsiahnutých v prvočíselnom rozklade a, no obsiahnutých v b. Najmenší spoločný násobok dvoch čísel dostaneme ako násobok jedného z čísel a prvočíselného rozkladu druhého čísla neobsiahnutého v prvočíselnom rozklade prvého (akoby sme každé prvočíslo zarátali najviac toľkokrát, koľkokrát je v jednom z čísel), preto platí $[a,b] = (a,b)\cdot x\cdot y$.

Dokážeme všeobecne platnú časť $[a,b] \cdot (a,b) = ab$. Vieme, že $[a,b] = (a,b) \cdot x \cdot y$. Z čoho po vynásobení (a,b):

$$[a,b] \cdot (a,b) = (a,b) \cdot x \cdot y \cdot (a,b) = (a,b) \cdot x \cdot (a,b) \cdot y$$

Zároveň $b = (a,b) \cdot y$ resp. $a = (a,b) \cdot x$, tak:

$$[a,b] \cdot (a,b) = (a,b) \cdot x \cdot (a,b) \cdot y = a \cdot b$$

Súčin najmenšieho spoločného násobku a najväčšieho spoločného deliteľa dvoch čísel je rovný súčinu tých dvoch čísel, ČBTD.

Prejdime k dôkazu $a \cdot (a,b) + b \cdot [a,b] \geq 2ab$. Ako prvé odčítame od oboch strán nerovnice $2ab$. Ako už vieme, $[a,b] \cdot (a,b) = ab$, preto môžeme $2ab$ nahradiť výrazom $ab + [a,b] \cdot (a,b)$. Naša upravená nerovnica momentálne vyzerá takto:

$$a \cdot (a,b) + b \cdot [a,b] - ab - [a,b] \cdot (a,b) \geq 0$$

Výraz $a \cdot (a,b) + b \cdot [a,b] - ab - [a,b] \cdot (a,b)$ môžeme zapísať v súčinovom tvare ako $(a - [a,b]) \cdot ((a,b) - b)$. Nerovnosť potom vyzerá takto:

$$(a - [a,b]) \cdot ((a,b) - b) \geq 0$$

Z definície vyplýva $(a,b) \geq b$ a zároveň $a \geq [a,b]$, tak $(a - [a,b]) \cdot ((a,b) - b)$ je nezáporné. Na ľavej strane nerovnosti sú preto dve nezáporné čísla, ktorých súčin je tiež nezáporný, čím sme dokázali jej platnosť, ČBTD.

Rovnosť nastane vtedy, keď sa aspoň jedna zo zátvoriek bude rovnať 0. To je vtedy, keď $(a,b) = b$ alebo $a = [a,b]$. Keď sa však pozrieme na našu dokázanú rovnicu $[a,b] \cdot (a,b) = ab$, vidíme, že tieto dve rovnosti môžu nastať len súčasne (Po dosadení do vzťahu z jednej vyplýva druhá a naopak). Inými slovami, vtedy, keď $b|a$ (čítaj b delí a), pretože násobok a musí byť násobok b, resp. musí byť rovné (a,b).

Odpoveď: Dôkazy sú uvedené v riešení. Rovnosť nastane, keď $(a,b) = b$, resp. $[a,b] = a$ (nastanú obe naraz), teda b bude deliť a.

Komentár: Príklad riešilo 21 riešiteľov, celkovo ste dostali 157 bodov, priemerne 7,48 boda. Najviac riešení bolo desaťbodových. Na to, že je to dôkazová úloha, ste ju zvládli pomerne dobre. Dokázať platnosť tvrdenia je jedna z ťažších úloh v matematike. Niektoré dôkazy si vyžadujú dať do súvislosti viacero informácií. Čím viac sa však budete zaoberať riešeniami ťažších matematických úloh, narazíte na viac a viac dôkazov. Preto je dobré sa naučiť správne dokazovať. Každé tvrdenie musí byť niečím, čo je logicky správne, podložené. Tvrdiť niečo vo všeobecnosti možno, iba ak to má všeobecnú platnosť, čiže dosadením hodnoty 4 za a nezískam žiadnu všeobecnú informáciu o a.

ČBTD je skratka „Čo bolo treba dokázať“ pochádzajúca z latinského Q.E.D. (quod erat demonstrandum) oznamujúca zakončenie dôkazu.

Prémia (opravoval MaťoPaťo):

Zadanie: Majme ľubovoľný počet mravcov hmotnosti 1, 2, 6 a 12 gramov. Každý mravec unesie svoju hmotnosť a ešte dvakrát toľko. Mravce sa na seba skladajú do pyramídy spôsobom, že mravec stojí vždy na dvoch mravcoch na poschodí pod ním. Ako postaviť čo najvyššiu pyramídu (s najviac poschodiami?) Mravec, ktorý stojí na dvoch pod ním tlačí polovicou svojej hmotnosti na každého z tých dvoch. Napríklad: Máme na vrchných troch riadkoch pyramídy 6g mravcov. Potom mravci na druhom poschodí nesú váhu 9g každý (včítane svojej). Stredný mravec na treťom poschodí nesie váhu 15g.

Riešenie: Zo zadania vieme, že mravec dokáže na svojich nohách uniesť okrem svojej hmotnosti ešte dvojnásobok jeho hmotnosti. Teda celková hmotnosť mravca aj s tým, čo nesie, musí byť menšia alebo rovná trojnásobku jeho váhy. V Tabuľke 1 je ukázané najlepšie riešenie, ktoré ste našli. Má 8 poschodí. Čísla v ňom sú hmotnosti mravcov na daných miestach.

V Tabuľke 2 je to isté najlepšie riešenie. Tentokrát čísla v ňom ukazujú hmotnosť, ktorú nesú mravce na svojich nohách (teda spolu aj s hmotnosťou ich samých).

Odpoveď: Najväčšia nájdená pyramída má 8 poschodí.

Komentár: Väčšina z vás našla takéto riešenie s ôsmimi poschodiami. Tieto riešenia boli ohodnotené piatimi bodmi.

							1							
						1		1						
					1		1		1					
				1		2		2		1				
			1		2		6		2		1			
		1		2		6		6		2		1		
	1		2		6		12		6		2		1	
1		2		6		12		12		6		2		1

Tabuľka 1: Hmotnosti mravcov

							1							
						1,5		1,5						
					1,75		2,5		1,75					
				1,88		4,13		4,13		1,88				
			1,94		5		10,13		5		1,94			
		1,97		5,47		13,56		13,56		5,47		1,97		
	1,98		5,72		15,52		25,56		15,52		5,72		1,98	
1,99		5,85		16,62		32,54		32,54		16,62		5,85		1,99

Tabuľka 2: Zaťaženie mravcov