Vzorové riešenia 2. kola zimnej série 2015/2016

Príklad č. 1 (opravoval MaťoPaťo):

Zadanie: „Prokrastinujúcou“ dvojicou nazvime dve také rôzne dvojciferné čísla, ktoré spĺňajú toto: Obidve majú rovnakú prvú cifru a ak k menšiemu pripočítame cifru, ktorú má na mieste desiatok, dostaneme druhé číslo z dvojice. Koľko takýchto prokrastinujúcich dvojíc existuje?

Riešenie: Zo zadania vyplýva, že prokrastinujúcou dvojicou sú napríklad čísla 10 a 11. Platí, že obe majú rovnakú prvú cifru a ich rozdiel je rovný tejto prvej cifre. Najväčšie číslo, ktoré môže byť v nejakej prokrastinujúcej dvojici s cifrou 1 na začiatku je teda 19 s dvojicou $19 - 1 = 18$. Uvedomme si, že každé jedno číslo medzi 10 a 18 bude menším číslom jednej prokrastinujúcej dvojice. Teda existuje 9 prokrastinujúcich dvojíc začínajúcich s cifrou 1.

Teraz si zoberieme prokrastinujúce dvojice začínajúce na 2. Opäť, najväčšie číslo je 29, a to má dvojicu $29 - 2 = 27$. Teraz teda môžu byť menšie čísla z dvojíc len od 20 do 27 a bude ich 8.

Vždy keď zvýšime počet desiatok o jedna, zníži sa nám menšie číslo z poslednej prokrastinujúcej dvojice s daným počtom desiatok o 1. Z toho vyplýva, že aj počet prokrastinujúcich dvojíc sa zníži o 1. Ak má prokrastinujúca dvojica začínať na 9, tak nám existuje už len jedna, a to 90 a 99.

Prokrastinujúcich dvojíc začínajúcich na 1 je 9 a ukázali sme, že s rastúcou cifrou na začiatku počet klesá vždy o 1, a teda súčet všetkých prokrastinujúcich dvojíc je $9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 45$.

Odpoveď: Existuje 45 prokrastinujúcich dvojíc.

Komentár: Príklad ste zvládli skoro všetci na plný počet bodov, takže som na vás hrdý a gratulujem vám.

Príklad č. 2 (opravovala Zuzka):

Zadanie: Bolo raz jedno číslo A (nemusí byť celé). Malo kamaráta B, čo bolo najväčšie možné celé číslo menšie ako A. Tete sa rozhodla, že A vynásobí štyrmi a pripočíta k tomu B. Takto dostala výsledok 27. Akú hodnotu môže mať B?

Riešenie: Keďže B je najväčšie možné celé číslo menšie ako A, tak ich rozdiel je väčší ako 0 a zároveň menší alebo rovný 1. A sa vlastne rovná súčtu B a tohto rozdielu. V zadaní sa píše, že súčet čísla A vynásobeného štyrmi a čísla B je 27. Číslo A si nahradíme súčtom čísla B a ich rozdielu. Môžeme teda povedať, že súčet čísla B vynásobeného piatimi a rozdielu vynásobeného štyrmi je 27. Keďže 27 aj číslo B sú celé čísla, tak aj rozdiel vynásobený štyrmi musí byť celé číslo. Ako sme si už stanovili vyššie, tento rozdiel je väčší ako 0 a zároveň menší alebo rovný 1. Jeho štvornásobok bude preto väčší ako 0 a zároveň menší alebo rovný 4. Keďže to však zároveň môže byť len celé číslo, zostávajú nám len štyri možnosti, a to 1, 2, 3 a 4. Keď od 27 odpočítame štvornásobok rozdielu, malo by nám zostať číslo deliteľné piatimi. To sa stane, len ak je štvornásobok rozdielu 2. Číslo B je potom 5 a A je $5,5$.

Odpoveď: B môže mať len hodnotu 5.

Komentár: K správnemu výsledku ste sa dostali všetci. Ťažšie pre vás bolo vysvetliť, prečo je to jediný výsledok. Radila by som vám posnažiť sa nájsť nejaký pekný postup a nielen skúšať možnosti a potom nejasne prehlásiť, že iné možnosti nie sú.

Príklad č. 3 (opravoval Ivo):

Zadanie: Miško sa rozhodol, že až sa vráti domov, tak si svoje zošity označí farebnými nálepkami. Má 8 zošitov, 28 červených nálepiek a 38 modrých nálepiek. Koľko rôznych kombinácií nálepiek môže vzniknúť na jeho zošitoch, ak platí, že po polepení všetkých nálepiek je na každom jeho zošite iný počet červených, iný počet modrých nálepiek a modrých je na každom viac než červených?

Riešenie: Zo zadania máme podmienku, že počty nálepiek sú rôzne. Taktiež môžme predpokladať, že počet je prirodzené číslo alebo 0. Z týchto dvoch podmienok vyplýva, že existuje nejaký minimálny počet nálepiek, ktorý bude vždy na zošitoch. Ak hľadáme nejaké minimum, zoberieme si vždy najmenší možný počet nálepiek a ten dáme na zošit. V tomto prípade od 0 do 7 pre červenú farbu a 1 až 8 pre modrú farbu. Modré sme samozrejme ukladali tak, aby rozdiel medzi počtami nálepiek iných farieb bol čo najmenší, čiže

1. Teraz si spočítame, koľko voľných nálepiek ostalo.

$$28 - (0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7) = 28 - 28 = 0$$

$$38 - (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8) = 38 - 36 = 2$$

Ostali nám 2 modré. Ak chcem do rozmiestnenia 28/36 pridať nejaké ďalšie modré, musím ich pridávať opatrne. Prvý spôsob je, že na zošit dám toľko nálepiek, aby ich bolo o 1 viac ako na zošite s najviac nálepkami. Keby sme sa ľubovoľne inde zastavili, tak by bol niekde rovnaký počet modrých nálepiek. Druhý spôsob je, že na zošit pridám 1 nálepku a pre každý zošit, ktorý mal v pôvodne viac, urobím rovnaký postup. Výnimku tvorí zošit s najvyšším počtom modrých nálepiek, ktorému môžme pridať ďalšie modré bez toho, aby sme museli pridať aj inému zošitu, nakoľko by určite neexistoval iný zošit ktorý by mal rovnaký počet modrých nálepiek. Teraz existujú 3 možnosti:

1. dám nálepku zošitu s 3. najvyšším alebo nižším počtom modrých nálepiek
2. dám nálepku zošitu s 2. najvyšším počtom modrých nálepiek
3. dám nálepku zošitu s najvyšším počtom modrých nálepiek

V 1. prípade dám modrú nálepku vybranému zošitu. Následne mám dve možnosti: Prvá – dám tomu zošitu samotnému ešte toľko, aby dosiahol maximum plus 1. Druhá – budem sa držať druhého spôsobu a každému zošitu s väčším alebo rovnakým počtom dám po nálepke. Potom existujú aspoň 2 zošity, ktorým budem musieť dať modrú nálepku. V každej možnosti musím rozdať minimálne 3 nálepky. Mám ich však iba 2. Preto 1. prípad nemôže nastať.

Poďme na 2. prípad. Je iba jeden zošit s väčším počtom modrých nálepiek. Teda môžeme použiť oba spôsoby.

Keď nastane 3. prípad, sú len 2 možnosti, kam dať poslednú modrú nálepku. Jedna možnosť je, že aj druhú dáme na zošit s najvyšším počtom nálepiek. Druhá možnosť, je dať ho na zošit s druhým najväčším počtom, tá je však už zarátaná v 2. prípade.

Poznámka: Keby sme ešte navzájom rozlišovali zošity, musíme najprv vytvoriť „kopy“ nálepiek, ktoré následne budeme prideľovať zošitom. Pre prvý zošit existuje 8 takých kôp, ktoré tam môžme dať, pre druhý už len 7 kôpok, pre tretí, 6 atď… A keďže všetky možnosti sa navzájom násobia, výsledok nebude 3, ale $3 \cdot (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8) = 3 \cdot 8! = 120960$

Odpoveď: Celkovo nám nastali 3 kombinácie rozdelenia nálepiek vyhovujúce zadaniu.

Príklad č. 4 (opravovala Danka):

Zadanie: Z rázcestia vedú tri cesty a len jedna z nich je správna. Oslovení boli piati ľudia: Adam, Bendži, Cecília, Dada a Eva. Každý buď vždy hovorí pravdu alebo vždy klame. Každý vie, ktorá cesta je tá správna. Toto povedali: A: Cesta 1 je správna. B: Obidva tieto výroky sú pravdivé: A je klamár. Cesta 2 nie je správna. C: Presne jeden z dvojice A a D hovorí pravdu. D: Cesta 2 je správna. E: Ak by si vedel, či je C klamár alebo pravdovravný, poznali by ste správnu cestu.

Viem, že E hovorí pravdu. Viem zistiť s určitosťou, ktorá cesta je správna?

Riešenie: Zo zadania vieme, že E určite hovorí pravdu. Teda podľa tohto výroku je potrebné zistiť, či C hovorí pravdu alebo klame.

Ak by C hovoril pravdu, vyskytnú sa nám dve ďalšie možnosti. Po prvé, že pravdu hovorí A a klame D. Po druhé, že pravdu hovorí D a klame A.

Povedzme že B hovorí pravdu. Potom ani cesta 1 (výrok A) a ani cesta 2 (výrok D) nie je správna. To by však nemohlo platiť zároveň s výrokmi A alebo D. Preto B musí klamať.

Keď B klame, dostávame sa k tomu, že aspoň jeden z výrokov B je nepravdivý. V možnosti D klame a A hovorí pravdu neplatí výrok B o klamaní A a správna cesta teda je cesta 1. V možnosti A klame a D hovorí pravdu neplatí výrok B o nesprávnosti cesty 2, kedže ako D tvrdí, tá je tu správna.

Ak by C klamal, tak buď A aj D hovoria pravdu alebo obaja klamú. Ak by hovorili pravdu, vyšlo by nám, že správna cesta je aj cesta 1 aj cesta 2, no takýto prípad nemôže nastať. Preto obaja musia klamať, z čoho nám vyplýva, že správna cesta môže byť jedine cesta 3.

Teraz sa zamyslíme nad tým, čo nám vraví E. Cestu by sme spoľahlivo vedeli určiť, ak by sme vedeli, či C klame alebo hovorí pravdu. V možnosti keď C hovorí pravdu môže byť správna aj cesta 1 aj 2. Teda

správnu cestu nevieme spoľahlivo určiť. Keď C vraví pravdu je jedinou možnosťou cesta 3. Preto C vraví pravdu a správna cesta je cesta 3.
Odpoveď: Áno, viem s určitosťou zistiť, ktorá cesta je správna a je to cesta 3.
Komentár: Väčšina z vás tento príklad vedela vyriešiť veľmi šikovne, občas ste zabudli rospísať či dokázať vaše logické postupy, ako vám mám inak veriť ;) celý príklad sa dal vyriešiť aj len pomocou výroku B,a to tým, či hovorí pravdu alebo klame, pretože jeden prípad dával zmysel a druhý vzhľadom na výroky ostatných nie.

Príklad č. 5 (opravovali Tomáš, Tete):

Zadanie: Kolegovia Andrew, Betthany, Collin, Diana, Eda, Felix, Gale a Hailey sú zamestnancami istej zámorskej firmy, ktorej meno musí pre účely tohto príkladu ostať utajené. Pracujú na troch rôznych oddeleniach: personálne, administratíva a marketing. Na žiadnom z oddelení však nepracujú viac ako traja z nich. V práci sú všetci veľmi vyťažení a pod veľkým tlakom, no generálny riaditeľ spoločnosti im za odvedenú prácu umožňuje víkendové pobyty vo firemnom relaxačnom zariadení, kde sa môžu venovať širokej škále oddychových aktivít (žiadny z nich sa však, na počudovanie, nevenuje rovnakej aktivite, ako ktorýkoľvek z jeho kolegov).

O jednotlivých zamestnancoch vieme toto:

1. Diana pracuje v administratíve a nemá rada futbal ani golf.
2. Felix pracuje na personálnom, kde je jeho spolupracovníkom iba Andrew, ktorý sa vyžíva v plávaní.
3. Eda a Hailey nepracujú na rovnakom oddelení, ako Diana.
4. Niekto hráva basketbal.
5. Collin hráva hokej a nepracuje v marketingu.
6. Gale nepracuje v administratíve a nemá rád golf ani badminton.
7. Jeden z tých, čo pracujú v administratíve, má rád futbal.
8. Ten, kto má rád volejbal, pracuje na personálnom.
9. Nikto z tých, čo pracuje v administratíve, nemá rád badminton ani tenis.
10. Hailey nemá rada golf.

Kto pracuje na ktorom oddelení? Kto sa venuje ktorej oddychovej aktivite?
Riešenie: Začnime tým, že si rozdelíme pracovníkov do oddelení. Z 2. podmienky vieme, že Felix a Andrew pracujú na personálnom a nikto iný tam už nie je. O Diane vieme, že pracuje na administratíve podľa 1. vety. Vďaka týmto dvom faktom vieme povedať kde pracujú Eda a Hailey, nepracujú s Dianou (3. veta) a personálne je už obsadené, ostáva im marketing. Collin pracuje v administratíve, lebo v marketingu nemôže pracovať podľa 5. vety a personálne je plné. Podľa 6. vety Gale nepracuje v administratíve, teda musí pracovať v marketingu, keďže personálne je plné. Keďže personálne je už plné a marketing tiež (pracujú tam 3 ľudia, to je podľa zadania maximum), tak Bethany musí pracovať v administratíve. Zadelenie do oddelení je v tabuľke 1.

Personálne	Andrew	Felix	
Administratíva	Bethany	Collin	Diana
Marketing	Eda	Gale	Hailey

Tabuľka 1: oddelenia

Poďme sa pozrieť na obľúbené športy. Andrew má rád plávanie podľa 2. vety a Collin má rád hokej podľa 5. vety. Ďalší šport vieme určiť futbal, pretože podľa 7. vety niekto z administratívy má rád futbal, Collin to nie je, lebo ten hrá hokej a Diana podľa 1. vety futbal nemá rada, teda ostáva Bethany. Diana podľa viet zo zadania (9., 8. a 1.) nemá rada badminton, tenis, volejbal, futbal ani golf. Ostávajú jej teda športy plávanie, hokej a basketbal, ale prvé dva z týchto už hrá niekto iný a preto Diana hrá basketbal. Z 8. vety vieme určiť, že Felix hráva volejbal pretože jeho jediný spolupracovník už má šport priradený.

Ostávajú nám traja ľudia bez športu, a to sú Eda, Gale a Hailey, pre nich nám ostávajú tri športy golf, badminton a tenis. Podľa 6. a 10. vety Gale a Hailey nemajú radi golf, preto Eda hrá golf. Keďže Gale podľa 6. vety nemá rád badminton, tak badminton priradíme Hailey a posledné čo ostane pre Galea, je tenis. Výsledné priradenie nájdete v tabuľke 2.

Meno	Andrew	Bethany	Collin	Diana	Eda	Felix	Gale	Hailey
Oddel.	Personálne	Admin.	Admin.	Admin.	Marketing	Personálne	Marketing	Marketing
Šport	plávanie	futbal	hokej	basketbal	golf	volejbal	tenis	badminton

Tabuľka 2: Výsledná tabuľka

Odpoveď: Výsledok nájdete v tabuľke 2.
Komentár: Príklad bol veľmi ľahký, no to neznamená, že netreba postup. Práve za chýbajúci postup sme najčastejšie strhli body. A tým, ktorí patria ku väčšine, a dostali 10 bodov, gratulujeme. :)

Príklad č. 6 (opravoval ViRPo):

Zadanie: Lord povedal majordómovi: „Zorganizujeme baobabové hody. Pozvi hostí, koľko chceš. Pokiaľ budú štyria, zasaď 2 baobaby. S každým ďalším hosťom zasaď o tri baobaby viac.“

Baobab je taká zvláštna rastlina – každý baobab na poludnie každého dňa urodí ďalší baobab. Zároveň veľmi nenasýti – každý hosť zje jeden celý strom baobabu na každé jedlo, ktoré má pozostávať z baobabov. Baobaby zasadím jednorázovo ráno v deň začiatku hodov (hostia prídu už na raňajky).

Lord chce, aby mohli hody trvať neobmedzene a zároveň aby sa mu počas nich baobaby nepremnožili donekonečna a aj aby mu počas nich vydržali. Každý deň má byť jedno jedlo z baobabov. Koľko hostí má majordóm pozvať, ak to budú vždy raňajky? Koľko ak to bude vždy večera?

Riešenie: Bezohľadu na to, kedy hostia jedia, aby sa baobaby nepremnožili ani nevyhynuli, potrebujeme každý deň nechať narásť toľko baobabov, koľko sa ich v ten deň aj zje. A to pretože jedenie baobabov a množenie baobabov sa obe udejú práve raz za deň. Ak by sa ich urodilo viac, než by sa ich v ten deň zjedlo, tak sa premnožia. Ak by sa ich viac zjedlo, než by sa ich urodilo, tak po niekoľkých dňoch už nebude čo jesť. V prípade, že hostia jedia vždy na raňajky, ráno sa zje toľko baobabov, koľko sme pozvali hostí a na obed sa počet baobabov zdvojnásobí. Aby teda platilo, že koľko sa ich v ten deň urodí, toľko sa ich aj zje, počet baobabov musí ráno byť rovný dvojnásobku počtu hostí. V prípade, že hostia jedia vždy večer, na poludnie sa počet baobabov zdvojnásobí a večer sa z nich zje toľko, koľko sme pozvali hostí. Aby znova platilo, že sa ich každý deň zje toľko, koľko sa ich urodí, musí baobabov pred poludním byť presne toľko, koľko je pozvaných hostí. Na poludnie sa potom baobabov urodí toľko, koľko máme hostí a večer sa ich toľko zje. Takto vieme hodovať až donekonečna, treba ešte zistiť odpoveď na tieto podotázky: Koľko hostí treba pozvať, aby sme ráno zasadili dvakrát viac baobabov, než sme pozvali hostí? A koľko hostí treba pozvať, aby sme ráno zasadili presne toľko baobabov, koľko sme pozvali hostí? Teraz nám pomôže tabuľka 3, kde si do jedného riadku napíšeme počet hostí a do druhého riadku si napíšeme, koľko baobabov potrebujeme v takom prípade zasadiť.

Hostí	4	**5**	6	7	8	9	**10**	11
Baobabov	2	**5**	8	11	14	17	**20**	23

Tabuľka 3: Počet hostí a baobabov

Vidíme, že hostí a baobabov bude rovnako veľa, ak si hostí pozveme 5. Baobabov bude dvakrát toľko, než hostí, keď si hostí pozveme 10.
Odpoveď: Ak hody začnú raňajkami, treba pozvať 10 hostí a ak večerou, treba pozvať 5 hostí.
Komentár: Každý jeden odovzdaný príklad bol riešený dobre, iba niektorým sa podarilo čísla v tabuľke zle porátať, alebo ste použili zlú úvahu v druhej polovici riešenia. Niektorí ste zapísali pri riešení veľmi veľa strán, preto odporúčam pomôcť si pri riešení takýchto príkladov tabuľkami. :)

Príklad č. 7 (opravovali Tete, Tomáš):

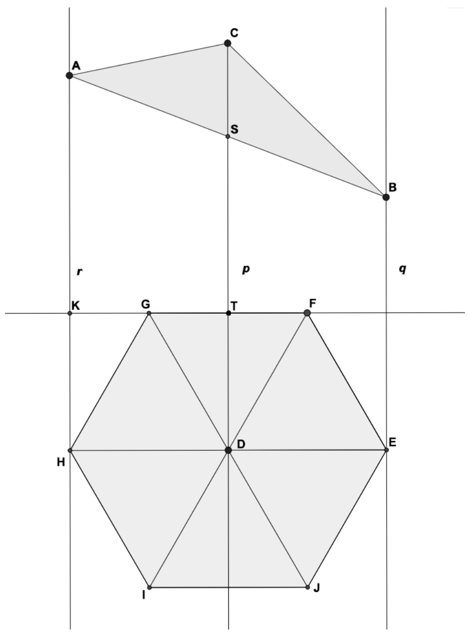
Zadanie: Máme trojuholník ABC. V bode C začína polpriamka p, ktorá rozdeľuje ABC na dva trojuholníky s rovnakými obsahmi. Bodom B prechádza priamka q rovnobežná s p. Na p zvolíme bod D. Bod na q

najbližšie k D pomenujeme E. Zostrojíme pravidelný 6-uholník $EFGHIJ$ so stredom v D. Priesečník priamok idúcich cez FG a AH označme K. Aký je pomer vzdialeností GK a FG?

Riešenie:

Prvá vec, ktorú si musíme uvedomiť, je, že priamka p delí stranu AB na dve rovnako dlhé úsečky. Je to preto, pretože vzniknuté menšie trojuholníky (ktoré majú rovnaký obsah) majú rovnakú výšku. Obsah trojuholníka vypočítame ako $S = \frac{c \cdot Vc}{2}$. Obsahy trojuholníkov aj výšky sú rovnaké, znamená to, že je rovnaká aj základňa.

Na priamke p si zvolíme bod D. Bod E (keďže má byť bodom na q najbližšie ku D) bude priesečník priamky q a kolmice na priamku p prechádzajúcou bodom D. Teraz si vieme narysovať útvar ako na obrázku 1. Bod, kde priamka p pretína stranu AB, nazvime S. Bod, kde priamka p pretína stranu GF, nazvime T. Vieme povedať, že priamka AH je rovnobežná s priamkou p, pretože platí $|AS| = |SB|$ (a body A, S a B ležia na jednej priamke) a $|HD| = |DE|$.



Obr. 1: Nákres

Všeobecná vlastnosť pravidelného šesťuholníka je, že sa skladá zo šiestich rovnostranných trojuholníkov. Taký je aj trojuholník HGD, nachádzajúci sa v obdĺžniku $HKTD$. Pre takýto útvar všeobecne platí, že bod G je v strede úsečky KT, pretože obdĺžnik sa skladá z jedného rovnostranného trojuholníka HDG a dvoch pravouhlých HKG a DGT s výškou rovnakou ako trojuholník HGD a základňou polovičnou. Preto sa $KG = GT$. Ako už vieme $GT = TF$, takže úsečka $GF = 2GT = 2KG$. Preto je pomer $GK : FG$ rovný $1 : 2$.

Odpoveď: Pomer vzdialeností GK a FG je $1 : 2$

Komentár: Príklad ste mali všetci takmer celý správne, strhli sme len málo bodov, ak ste náhodou vynechali nejaký kúsok vysvetlenia. Vyskytlo sa aj pár pokusov riešenia narysujem – odmerám, tieto postupy však neboli bodované 10mi bodmi, keďže toto bol príklad na výpočet. Vo všeobecnosti vás však chválime, ako ste to zvládli a ak toto práve čítate, nakreslite v ďalšom kole na jedno riešenie ku svojmu menu kvetinku, potešíme sa :).

Príklad č. 8 (opravoval Zajo):

Zadanie: Ktoré sú všetky celočíselné dvojice a, b, ktoré spĺňajú:

$a^2 + b + 2 = a + b^2$

Riešenie: V úlohách, kde hľadáme všetky dvojice čísel, ktoré riešia nejakú rovnicu, je užitočné si ju upraviť na tvar, s ktorým sa nám lepšie pracuje. To môže napríklad znamenať, že súčin nejakých zátvoriek je nula. Z toho vieme povedať, že aspoň jedna z nich musí byť tiež nula.

V tejto úlohe však dokonca pracujeme s celými číslami. Súčin a súčet celých čísel je stále celé číslo. Taktiež by nám mohlo pomôcť, aj keby sme vedeli, že súčin nejakých zátvoriek sa rovná celému číslu. Inými slovami, presunieme členy s neznámou na jednu stranu a ostatné na druhú a pokúsime sa ich obe upraviť.

Bude to vyzerať takto:

$$a^2 + b + 2 = a + b^2$$

$$a^2 + b + 2 - a - b^2 = 0$$

$$a^2 - b^2 + b - a = -2$$

Ďalej pomocou jednoduchého rozkladu na súčin. V druhom kroku si tiež všimneme, že keď vyjmeme -1 pred zátvorku z $b - a$ dostaneme $a - b$, čo nám dovolí upraviť ľavú stranu na súčin dvoch zátvoriek nasledovným vyňatím: $(a - b)$

$$(a + b)(a - b) + b - a = -2$$

$$(a + b)(a - b) - (a - b) = -2$$

$$(a + b - 1)(a - b) = -2$$

S istotou vieme povedať, že v oboch zátvorkách na ľavej strane máme celé čísla. Uvedomme si preto, že -2 vieme ako súčin celých čísel dostať iba dvomi spôsobmi. To preto, lebo je to prvočíslo, lebo má záporné znamienko a lebo dve väčšie čísla ako 2 v absolútnej hodnote sa vynásobia na číslo väčšie ako 2 v absolútnej hodnote.

a) $(-1) \cdot (2)$

b) $(1) \cdot (-2)$

Nezabudnime na to, že pri násobení nezáleží na poradí, preto sa zátvorky na ľavej strane môžu rovnať činiteľom na pravej aj v opačnom poradí.

Dostávame tým štyri možnosti, ktoré už iba upravíme a dopočítame:

i) $(a + b - 1) = -1$,$(a - b) = 2$
Prvá rovnica: $a + b = 0$, druhá: $a = b + 2$
Dosadenie a do prvej: $b + 2 + b = 0 \rightarrow b = -1$, a zároveň $a = b + 2 = 1$

ii) $(a - b) = -1$,$(a + b - 1) = 2$
Prvá rovnica: $a = b - 1$, druhá: $a + b = 3$
Dosadenie a do druhej: $b - 1 + b = 3 \rightarrow b = 2$, a zároveň $a = b - 1 = 1$

iii) $(a + b - 1) = 1$,$(a - b) = -2$
Prvá rovnica $a + b = 2$, druhá: $a = b - 2$
Dosadenie a do prvej: $b - 2 + b = 2 \rightarrow b = 2$, a zároveň $a = b - 2 = 0$

iv) $(a - b) = 1$,$(a + b - 1) = -2$
Prvá rovnica: $a = b + 1$, druhá: $a + b = -1$
Dosadenie a do druhej: $b + 1 + b = -1 \rightarrow b = -1$, a zároveň $a = b + 1 = 0$

Ako vidíme, všetky štyri prípady mali riešenie a upravovali sa v podstate rovnakým spôsobom. Nakoniec je užitočné nezabudnúť urobiť skúšku správnosti, ktorá nebola nutná, lebo sme vykonávali iba ekvivalentné úpravy.

Odpoveď: Rovnici vyhovujú práve štyri dvojice čísel (a, b) v takom poradí: $(1, -1), (1, 2), (0, 2), (0, -1)$

Príklad č. 9 (opravovali Dada, Paľo):

Zadanie: Máme päť rovnakých gulí. Postavíme z nich stavbu tak, že na zem položíme štyri gule do štvorca, tak aby sa dotýkali. Piatu guľu položíme hore na štyri predchádzajúce. Ako vysoká bude naša stavba, ak polomer každej gule je 5?

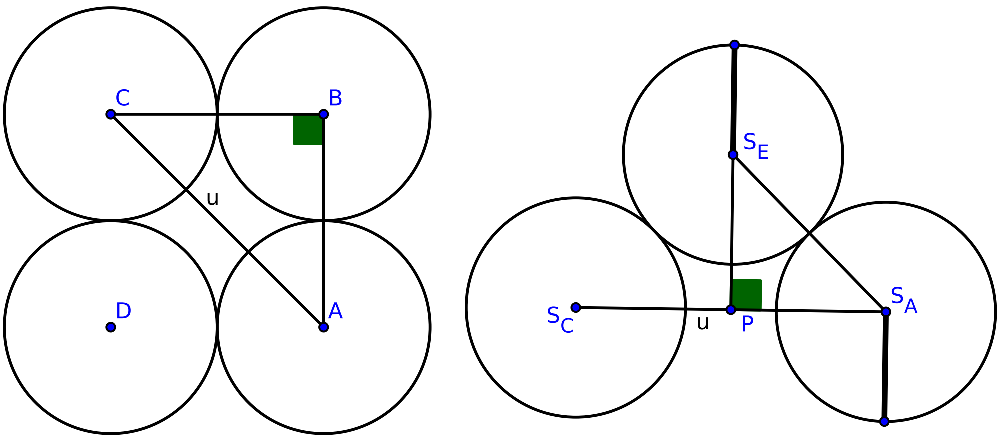
Riešenie: Nakreslíme si pohľad zhora (obrázok vľavo) aj zboku (obrázok vpravo): Pod pohľadom zboku rozumieme rez cez uhlopriečku štvorca, ktorý tvoria 4 dolné gule.

Označme jednotlivé stredy gulí vo štvorci A, B, C, D a tej vrchnej E. Je známe, že ak sa dve gule dotýkajú, vzdialenosť ich stredov je súčet ich polomerov, v našom prípade je táto vzdialenosť 10. Teraz si vypočítame dĺžku úsečky AC pomocou Pytagorovej vety v trojuholníku ABC. Vieme, že dĺžky úsečiek AB a BC sú 10. Potom dĺžka úsečky $AC = \sqrt{10^2 + 10^2} = \sqrt{200}$.

Pozrime sa teraz na druhý obrázok. Bod P je stred úsečky $S_A S_C$ a stred vyššie položenej gule je priamo nad ním. Znovu využijeme Pytagorovu vetu, tentokrát v trojuholníku $S_A P S_E$, a to na vypočítanie dĺžky PS_E.

$$\text{Teda } PS_E = \sqrt{10^2 - \left(\frac{\sqrt{200}}{2}\right)^2} = \sqrt{50}.$$

Na to, aby sme zistili celkovú výšku stavby, je ešte treba pripočítať časť stavby „pod“ a „nad“ naším trojuholníkom. V oboch prípadoch ide o polomer jednej gule, a teda o dĺžku 5. Celkovo to je priemer gule 10, a preto celková výška stavby je $10 + \sqrt{50}$.



Obr. 2: pohľady na stavbu

Odpoveď: Výška stavby je $10 + \sqrt{50}$.
Komentár: Viacerí z vás mali veľmi pekné a výstižné riešenie, čomu aj zodpovedá počet riešení s plným počtom bodov. Vyskytlo sa ale aj pár prípadov, kde ste riešili úlohu meraním/experimentovaním. Geometrické príklady, ktoré pre vás pripravujeme, sú vždy také, ktoré sa dajú pekne dopočítať. Meranie preto nevysvetľuje, prečo je daná dĺžka taká aká je, a často môže byť veľmi nepresné. Preto odporúčame príklady najskôr zrátať a ak by ste si chceli svoj výsledok porovnať experimentálne, kľudne, ale body dostávate za výpočet.

Prémia (opravoval MaťoPaťo):

Zadanie: Majster skladá prekážkovú dráhu pre svojich učňov. Chce, aby si mohli vybrať dve cesty, ktoré budú mať obidve rovnakú obtiažnosť.

Má k dispozícii 6 obyčajných prekážok – po jednej takej, ktorá obtiažnosť zvýši o 1, 2, 3, 4 a 5, jednu, ktorá obtiažnosť zníži o 1. Potom má 4 neobyčajné prekážky – tri také, ktoré zdvojnásobia prídavok alebo úbytok obtiažnosti obyčajnej prekážky, ktorá je najbližšie pred ňou. Jednú má takú, ktorá ho nezdvojnásobí, ale vydelí dvoma. Pred každou neobyčajnou prekážkou musí v trase nasledovať aspoň jedna obyčajná.

Koľko najviac rôznych obtiažností dvojíc trás vie dosiahnuť?

Riešenie: K dispozícií máme 10 prekážok a potrebujeme z nich spraviť dve prekážkové dráhy rovnakej obtiažnosti (keďže sú prekážkové, tak obtiažnosť 0 nezarátame). Každú prekážku, ktorú máme, môžeme použiť iba v jednej z týchto dvoch dráh. V zadaní sa nič o tom, koľko prekážok máme použiť, nehovorí, takže budeme tvoriť aj také obtiažnosti, pri ktorých nepoužijeme všetky prekážky. Tu sú všetky obtiažnosti, ktoré ste našli:

- $\mathbf{1} = +1 = +2 - 1$
- $\mathbf{2} = +2 = +3 - 1$
- $\mathbf{3} = +3 = +4 - 1$
- $\mathbf{4} = +4 = +5 - 1$
- $\mathbf{5} = +5 = +2 + 3$
- $\mathbf{6} = +1 + 5 = +2 + 4$
- $\mathbf{7} = +2 + 5 = +3 + 4$
- $\mathbf{8} = +3 + 5 = +4 \cdot 2$
- $\mathbf{9} = +1 + 4 \cdot 2 = +5 + 2 \cdot 2$
- $\mathbf{10} = +5 \cdot 2 = +2 + 4 \cdot 2$
- $\mathbf{11} = +3 + 4 \cdot 2 = +1 + 5 \cdot 2$
- $\mathbf{12} = +3 - 1 + 5 \cdot 2 = +2 \cdot 2 + 4 \cdot 2$
- $\mathbf{13} = +3 + 5 \cdot 2 = +1 + 2 \cdot 2 + 4 \cdot 2$

Odpoveď: Majster mohol dosiahnuť 13 rôznych obtiažností.
Komentár: Veľa z vás našlo obtiažností 13 a teda najlepšie riešenie. Avšak mrzelo ma, že ste si často zle vysvetľovali zadanie.