Zadania 1. kola zimnej série 2015/2016
Termín: 05.10.2015

Naša adresa: Riešky, Mgr. Viera Babišová, Gymnázium Grösslingová, Grösslingová 18, 811 09 Bratislava 1
Elektronické riešenia: http://riesky.sk/

Janka a Miško sa spolu so svojimi rodičmi nedávno presťahovali do nového domu. Hoci bol úplne nový a neznámy pre deti, rozhodne nebol žiadna novinka pre svoje okolie. Stál tu už viac než sto rokov a bol plný poloprázdnych izieb so starým nábytkom, čo tu zostal po predchádzajúcich majiteľoch. Rodičia odišli na nákupy, a tak zostali Janka a Miško doma sami. Miško chcel využiť nestráženú chvíľu a poriadne preliezť všetky zákutia domu od pivnice až po strop. Janka však mala iné plány. Chcela v novej škole ohúriť spolužiakov svojou znalosťou matematiky a dnes ešte plánovala spočítať zopár príkladov.

Príklad č. 3: Janka sa rozhodla vypočítať 2015 úloh. Reálnym plánom nazvime také rozloženie úloh do istého počtu dní, podľa ktorého každý deň okrem posledného vypočíta rovnako veľa úloh. V posledný deň ich môže vypočítať aj menej. Napríklad, reálny plán na 101 dní by mohol vyzerať tak, že v prvých 100 dňoch vypočíta každý deň 20 úloh a zvyšných 15 úloh vypočíta na stoprvý deň.

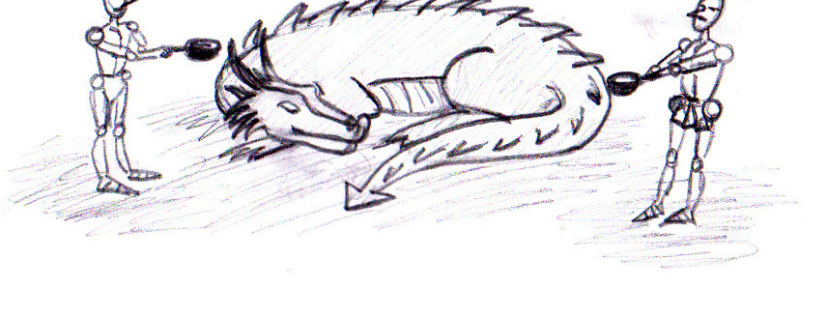
Janka si určila nejaký reálny plán pre svojich 2015 úloh, no potom zistila, že toľko dní nemá. Skrátila teda svoj plán o 2 dni tak, že počet úloh na deň (okrem posledného, pre ktorý to nemusí platiť) stúpol o 21. Určte všetky možnosti pôvodného reálneho plánu.

Mišo sa rozhodol Janke trochu pomôcť a počítal spolu s ňou. Janka tak bola o chvíľu hotová a mala čas zahrať sa s Miškom schovávačku. Janka sa chcela schovať v skrini, no tá bola zamknutá. Miško ju našiel stáť priamo pred skriňou a všimol si, že okolo rúčky je na skrini niečo načmárané.

Príklad č. 7: Body A, B, C, D ležia na kružnici s polomerom 3, kde platí, že úsečka AC je kolmá na BD. Označme E priesečník AC a BD. O pomeroch obsahov trojuholníkov platí, že $S_{\triangle AEB} : S_{\triangle BEC} = 1 : 2$ a $S_{\triangle BEC} : S_{\triangle CED} = 1 : 1$. Vypočítajte vzdialenosť bodu E od stredu kružnice.

Keď Mišo zatlačil rúčku o príslušnú vzdialenosť, skriňa sa pred ním sama otvorila. Pokrčil plecami a skočil dnu. Nie, neocitol sa v Narnii, no stalo sa čosi veľmi podobného. Skriňa bola portálom do stredoveku. A ako zistil, že sa ocitol v stredoveku? No predsa podľa rytierov, ktorí sa k nemu blížili a rachotili pritom brnením a panvicami. Miško bol zvedavý, na čo je im toľko panvíc, a tak mu rytieri vyrozprávali, čo sa im stalo.

Príklad č. 1: V kráľovstve za 58 horami sa konal štvordňový turnaj v prehadzovaní palaciniek ponad draka. Turnaja sa zúčastnili traja rytieri Pankrác, Servác a Jozefác. Každý deň sa odohralo jedno kolo turnaja. V každom kole získal rytier za 1. miesto 2 panvice, za 2. miesto 1 panvicu a za 3. miesto nič. Na konci mali Pankrác aj Jozefác 5 panvíc a Servác iba 2. Na poradí dní nezáleží. Vieme s istotou povedať, koľkokrát bol Pankrác lepší než Jozefác? Koľkokrát to bolo?



„Kam idete teraz?“ spýtal sa Miško. Rytieri mu vysvetlili, že počas turnaja dostali draci hroznú chuť na palacinky, a tak ich poprosili, či by im rytieri nejaké neurobili. „Chceš sa k nám pridať?“ ponúkol Miškovi Pankrác a Miško vďačne súhlasil. Vždy chcel vidieť ozajstného draka. Jeho prianie sa mu splnilo, keď dorazili do dračej dedinky. Na palacinky ale potrebovali kopu surovín. Úlohu zháňania potravín museli rytieri zveriť zodpovedným drakom, lebo nerozvážny drak by všetko rovno zjedol a žiadne palacinky by neboli.

Príklad č. 2: V dedinke býva 10 drakov, jeden z nich je mláďa. Dospelé draky sú zodpovedné a vždy hovoria pravdu, kým dračie mláďa je ešte nezodpovedné a vždy klame. Spomedzi drakov si chceme nájsť 8 zodpovedných kamarátov. Mláďa vyzerá ako ostatné draky, preto na jeho odlíšenie musíme použiť iný spôsob. Vždy si vyberieme ľubovoľnú dvojicu drakov a jedného z nich sa spýtame, či je ten druhý dračie mláďa. Koľko opýtaní potrebujeme na to, aby sme si určite vedeli vybrať 8 zodpovedných drakov?

Keď už mali všetky potrebné suroviny, začali robiť palacinky. Zistili ale, že ani rytieri, ani Miško nevedia robiť palacinky. Našťastie sa vedľa nich objavila Janka. „Už som si myslela, že ťa nenájdem.“ Usmiala sa a pripravila cesto. Potom však zistila, že draci majú iba trojuholníkové panvice. „Čo už, aspoň sa budú dať zavinúť z troch strán.“ Povedala si a pustila sa do varenia.

Príklad č. 9: Máme trojuholník ABC, v ktorom je uhol ACB pravý a uhol BAC má $60°$. Trojuholníkom prechádza priamka rovnobežná so stranou AC. Pretína strany AB a BC postupne v bodoch O a P. Kružnice vpísané trojuholníkom ABC a OBP majú obsahy v pomere $9 : 4$. Lichobežník $AOPC$ má obsah $6cm^2$. Zistite dĺžky strán trojuholníka ABC.

Drakom palacinky veľmi chutili a všetci boli spokojní. Okrem Pankráca a Serváca, ktorí sa hádali, či sú lepšie palacinky s tvarohom alebo lekvárom. Rozhodli sa, že spor rozhodnú súbojom. Nie však súbojom na život a na smrť, ale bežeckým pretekom.

Príklad č. 6: Pankrác a Servác sa pretekali. Bežali každý stálou rýchlosťou s prvočíselnou hodnotou v metroch za sekundu. Servác je rýchlejší, preto dal Pankrácovi náskok. Dĺžka náskoku v metroch je druhá mocnina prirodzeného čísla. Obaja štartovali naraz. Ako rýchlo bežali, ak Servác dobehol Pankráca po troch sekundách? Žiaden z nich nie je majster sveta a ich rýchlosti v m/s sú jednociferné.
Druhá mocnina je číslo, ktoré dostanete, keď vynásobíte dve rovnaké čísla. Napríklad, 25 *je druhá mocnina čísla* 5.

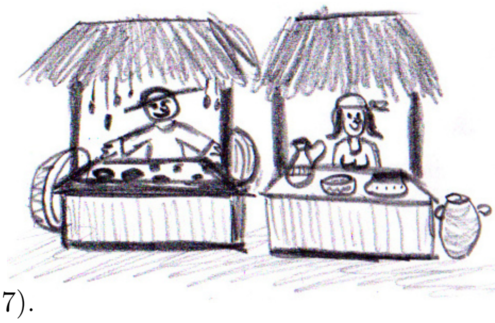
Janka a Miško sa od drakov dopočuli, že v neďalekom meste sa konajú trhy. Nechali rytierov, nech sa medzi sebou hašteria, a vydali sa na príjemnú prechádzku rovinou. Prúd ľudí okolo nich sa postupne zväčšoval, až pri mestskej bráne vyvrcholil do chaotickej spleti prichádzajúcich a odchádzajúcich ľudí. Deti sa pretlačili dovnútra za mestské hradby a všimli si dve známe tváre.

Príklad č. 4: Lámač balí Aničku. Na konci leta. Tak si vraví algebrogram:

$$TO + TO + LETO + ALE = BOLO$$

Anička by ho rada vyriešila, tak jej Lámač prezradil, že L je prvočíslo. Zistite, aké číslice predstavujú jednotlivé písmená. Rôzne písmená predstavujú rôzne číslice 0 až 9, pričom číslo nezačína na číslicu 0.

Keď Anička vyriešila algebrogram, všetci štyria spolu išli na trhy. Kúpili si niečo pod zub a prezerali si rôzne remeselné výrobky od výmyslu sveta. „Anička!“ ozvalo sa za ich chrbtami. Anička sa začervenala a ospravedlnila sa: „Volajú ma kamarátky, musím ísť.“ Rozlúčila sa s nimi a zamávala skupinke dievčat stojacich obďaleč.



Príklad č. 5: Na správnych trhoch majú samozrejme aj veľa sladkých dobrôt. V jednom stánku predávali niekoľko druhov gumených cukríkov. Každý z nich stál iný počet korún. Dievčatá sa rozhodli, že si cukríky kúpia, okrem Aničky, ktorá na cukríky nemala chuť. Každá si kúpila iný druh cukríkov. Zaujímavé bolo, že množstvo cukríkov, ktoré si každé z dievčat kúpilo, bolo rovnaké, ako cena jedného cukríka, ktorý si kúpilo (napríklad, ak si Katka kúpila cukríky, kde jeden stál 17 korún, potom si ich spolu kúpila 17).

Na platenie použila každá iba desaťkorunáčky a každej vydali 1 až 9 korún. Koľko najviac Aničkiných kamarátok si mohlo kúpiť cukríky, ak každej vydali iný počet korún? Koľko najviac cukríkov si spolu mohli kúpiť, ak dokopy zaplatili menej ako 97 korún?

Zatiaľ čo sa Anička rozprávala so svojimi kamarátkami, Lámač sa rozprával s Jankou a Miškom. Tí dvaja mu opísali, akým záhadným spôsobom sa sem dostali a Lámač chápavo prikyvoval. „Ja sem chodím pravidelne cez moju skriňu, môžem sa tu nerušene hrať hry na mobile. Chcem prekonať Dadin rekord."

Prémia: Dada hrala hru 2048. Hra prebiehala podľa štandardných pravidiel (ak túto hru nepoznáte, najlepšie bude nájsť ju na internete, napríklad na `2048game.com`). Vždy, keď zlúčite dve políčka, ku skóre sa vám pripočíta hodnota vami vytvoreného štvorčeka. Dada bola smoliarka a vždy jej pribudli iba dvojky. Dosiahla číslo 2048 a následne potom zaplnila celú plochu. Hra sa skončila a Dadino skóre bolo 50844. Aký najmenší súčet mohli mať kachličky na výslednej úplne zaplnenej ploche?
(Pokyn: Pri tomto príklade stačí nakresliť, ako by teoreticky mohla vyzerať plocha pri dosiahnutí vášho najmenšieho súčtu.)
⋆⋆⋆ Tento príklad je bodovaný inak ako ostatné. Viac informácií nájdeš v pravidlách. ⋆⋆⋆

Miško sa chvíľu pozeral, ako Lámač lámal všetky rekordy, potom ho to však omrzelo a išiel sa hrať s Jankou. Predsa len, chcel sa s ňou hrať na schovávačku, keď sa ocitli v stredovekom interiéri skrine. „Chceš sa hrať na schovávačku?" ponúkol jej Miško. „Nie, našla som niečo oveľa zaujímavejšie." Miško sa so záujmom pozrel na rozostavený rad koliek a nechal si vysvetliť pravidlá.

Príklad č. 8: Miško a Janka si idú zahrať kolky. No nie sú to klasické kolky. Je ich 11 a sú rozostavané do radu. Hráči sa po ťahu striedajú. V jednom ťahu môžu zhodiť 1 alebo 2 kolky, ak stoja priamo vedľa seba. Teda ak je medzi dvoma stojacimi kolkami aspoň jedna zhodená kolka, tieto dve kolky už nemôžeme zhodiť v jednom ťahu. Ten kto zhodí poslednú kolku, prehrá. Ako má Miško hrať, aby vyhral, ak začína? Čo keby bolo koliek iba 7?

Miško sa tešil z víťazstva, no Janka bola trochu smutná. Tešila sa na nejakú hru, v ktorej by vedela Miška poraziť.