Vzorové riešenia 1. kola zimnej série 2015/2016

Príklad č. 1 (opravovali Jumaj, Juro):

Zadanie: V kráľovstve za 58 horami sa konal štvordňový turnaj v prehadzovaní palaciniek ponad draka. Turnaja sa zúčastnili traja rytieri Pankrác, Servác a Jozefác. Každý deň sa odohralo jedno kolo turnaja. V každom kole získal rytier za 1. miesto 2 panvice, za 2. miesto 1 panvicu a za 3. miesto nič. Na konci mali Pankrác aj Jozefác 5 panvíc a Servác iba 2. Na poradí dní nezáleží. Vieme s istotou povedať, koľkokrát bol Pankrác lepší než Jozefác? Koľkokrát to bolo?

Riešenie: Pankrác aj Jozefác získali za 4 dni po 5 panvíc. 5 panvíc mohol získat buď tak, že raz bol prvý a trikrát druhý, alebo tak, že bol dvakrát prvý, raz druhý a raz tretí.

Servác získal 2 panvice a tie mohol získať tiež dvoma spôsobmi. Trikrát bol posledný a raz prvý. Alebo dvakrát druhý a raz posledný.

Teraz som si vypísal akými rôznymi kombináciami miest sa mohli umiestňovať Pankrác s Jozefácom:

1.) Pankrác a Jozefác by mohli byť obaja dvakrát prví, raz druhí a raz tretí. Vtedy by už ostali volné iba dve tretie a dve druhé miesta, takže Servác bude dvakrát tretí a dvakrát druhý. Keď si spočítame koľko panvíc naši rytieri získali tak vidíme, že nám ich počet sedí. Pankrác získal dvakrát 2 panvice, raz 1 a raz 0 a tak isto aj Jozefác. Servác získal vo dva dni po 1 panvici a vo dva dni po 0 panvíc. V tabuľke 1 mám zaznačené koľko panvíc rytieri získavali v jednotlivé dni.

	Deň 1.	Deň 2.	Deň 3.	Deň 4.
Pankrác	2	2	1	0
Servác	0	1	0	1
Jozefác	1	0	2	2

Tabuľka 1: Prvý prípad

2.) Ďaľšia možnosť ako sa mohli Pankrác, Servác a Jozefác umiestňovať je že Pankrác by bol trikrát druhý a raz prvý a Jozefác dvakrát prvý, raz druhý a raz tretí, čiže Pankrác by získal trikrát 1 panvicu a raz 2, Jozefác dvakrát 2, raz 1 a raz ani jednu. V tomto prípade by Servác skončil trikrát na treťom mieste a získal tak 0 panvíc a raz sa umiestnil prvý a získal 2 panvice.

	Deň 1.	Deň 2.	Deň 3.	Deň 4.
Pankrác	2	1	1	1
Servác	0	2	0	0
Jozefác	1	0	2	2

Tabuľka 2: Druhý prípad

3.) Tretia možnosť je že by si Pankrácove a Jozefácove kombinácie vymenili. Teda Jozeác by získal trikrát 1 panvicu a raz 2 a Pankrác dvakrát 2, raz 1 a raz ani jednu.

	Deň 1.	Deň 2.	Deň 3.	Deň 4.
Pankrác	1	0	2	2
Servác	0	2	0	0
Jozefác	2	1	1	1

Tabuľka 3: Tretí prípad

Možnosť, kedy by boli Pankrác aj Jozefác raz prví a trikrát druhí je nesprávna. Lebo tomto prípade by sme mali 6 druhých miest za 4 dni. Takže túto štvrtú možnosť môžeme vyradiť. Žiadna ďalšia kombinácia možností pre Pankráca a Serváca už nie je.

Otázka znela koľkokrát bol Pankrác lepší ako Pankrác. Ako vo všetkých troch prípadoch vidíme, Pankrác bol vždy dvakrát lepší.

Odpoveď: Áno, s istotou viem povedať koľkokrát bol Pankrác lepší ako Jozefác. Pankrác bol presne dvakrát zo štyroch dní lepší ako Jozefác.
Komentár: Veľa z vás nevypísalo všetky možnosti ale iba jednu, prípadne ste neodôvodnili prečo už ďalšie prípady neexistujú. Ak si niečím chceme byť istí, tak to musíme dokázať pre všetky možnosti. Niektorí zas nedostatočne vysvetlili svoje postupy a napísali iba tabuľky, za čo sme vám tiež museli strhnúť body. Verím že sa už týchto chýb v ďalších kolách nedopustíte a držím vám palce :)

Príklad č. 2 (opravoval Zajo):

Zadanie: V dedinke býva 10 drakov, jeden z nich je mláďa. Dospelé draky sú zodpovedné a vždy hovoria pravdu, kým dračie mláďa je ešte nezodpovedné a vždy klame. Spomedzi drakov si chceme nájsť 8 zodpovedných kamarátov. Mláďa vyzerá ako ostatné draky, preto na jeho odlíšenie musíme použiť iný spôsob. Vždy si vyberieme ľubovoľnú dvojicu drakov a jedného z nich sa spýtame, či je ten druhý dračie mláďa. Koľko opýtaní potrebujeme na to, aby sme si určite vedeli vybrať 8 zodpovedných drakov?
Riešenie: Na začiatok si predstavme, aké odpovede dostávame keď sa pýtame drakov. Ak sa spýtame jedného z dvojice drak-drak povie nie, lebo obaja hovoria pravdu. Ak sa ale spýtame v dvojici mláďa-drak mláďaťa, povie nám áno lebo klame a keď sa spýtame dospelého draka na mláďa povie áno, lebo hovorí pravdu. (Dvoch mláďat sa navzájom pýtať nikdy nebudeme, lebo je iba jedno). Draci z jednej dvojice budú preto odpovedať rovnako. Na zistenie či je v dvojici mláďa teda stačí položiť otázku jednému z dvojice. Ak by sme sa pýtali piatich dvojíc v desiatich drakoch, dostali by sme 4 krát odpoveď nie a raz odpoveď áno.

Síce ak dostaneme odpoveď áno, nevieme ktorý z dvojice je mláďa, vieme však s istotou povedať, že všetci ostatní draci okrem našej dvojice budú dospelí. Takže ak si rozdelíme našich 10 drakov do dvojíc, a v každej dvojici sa raz spýtame otázku, určite dostaneme práve 4 krát odpoveď nie a práve raz odpoveď áno.

Teraz už vieme, koľko akých odpovedí dostaneme, preto nie je nutné položiť poslednú (piatu) otázku. Ak pri prvých 4 dvojiciach zaznie odpoveď áno, vieme že posledná odpovie nie. Ak prvé 4 dvojice odpovedali všetky nie, posledná dvojica odpovie áno. (Mláďa sa nachádza v nej.)

Takto sa dá na štyri otázky vždy vybrať osem dospelých drakov. Vyberieme všetky dvojice okrem tej, v ktorej zaznelo áno alebo vyberieme štyri dvojice ktorých sme sa pýtali, ak všetky odpovedali nie.

Nesmieme ale zabudnúť na posledný krok, a to presvedčiť sa, že na menej otázok sa nám nemusí vždy podariť vybrať si osem kamarátov. Takáto situácia nastane napríklad keď dostaneme od prvých troch dvojíc odpoveď nie. V takomto prípade sme už našli šesť zodpovedných drakov, ale potom existujú aspoň štyria draci (viac ich bude, ak by sme sa prvé tri otázky nepýtali rôznych dvojíc), ktorých sme sa nič nepýtali a nevieme z nich s istotou vybrať dvoch dospelých drakov do našej osmice.
Odpoveď: Potrebujeme najviac štyri opýtania na to, aby sme vybrali osem dospelých drakov.
Komentár: Je super si uvedomiť, že ak pri prvom pýtaní dostaneme odpoveď áno, už sa nemusíme pýtať ďalej, stačí nám vybrať ostatných osem drakov. (Takže nám stačilo 1 opýtanie) Podobne nám stačia dve alebo tri ak sú druhá alebo tretia odpoveď áno.

Väčšina z Vás príklad hravo zvládla až na niektoré maličkosti, ktoré ste nie vždy poriadne vysvetlili.

Príklad č. 3 (opravovali Tomáš, MaťoPaťo, Tete, Ľubo):

Zadanie: Janka sa rozhodla vypočítať 2015 úloh. Reálnym plánom nazvime také rozloženie úloh do istého počtu dní, podľa ktorého každý deň okrem posledného vypočíta rovnako veľa úloh. V posledný deň ich môže vypočítať aj menej. Napríklad, reálny plán na 101 dní by mohol vyzerať tak, že v prvých 100 dňoch vypočíta každý deň 20 úloh a zvyšných 15 úloh vypočíta na stoprvý deň.

Janka si určila nejaký reálny plán pre svojich 2015 úloh, no potom zistila, že toľko dní nemá. Skrátila teda svoj plán o 2 dni tak, že počet úloh na deň (okrem posledného, pre ktorý to nemusí platiť) stúpol o 21. Určte všetky možnosti pôvodného reálneho plánu.
Riešenie: Na začiatok si zhrňme, čo vieme: Vieme, že pôvodný reálny plán vyzerá tak, že za nejaký počet dní n máme vypočítať p príkladov a posledný deň máme vypočítať nejaký počet príkladov k menší ako p, pričom celkový počet vypočítaných príkladov je 2015. Avšak, tento pôvodný reálny plán nestíhame realizovať a musíme ho skrátiť o 2 dni, pričom počet úloh, ktoré vypočítame za deň sa zvýši o 21, pričom posledný deň znovu spočítame nejaký počet úloh l, tento krát menší ako $(p + 21)$. Keď si to zapíšeme ako rovnice, bude to vyzerať takto:

$$n \cdot p + k = 2015; k < p$$

$$(n-2) \cdot (p+21) + l = 2015; l < (p+21)$$

Takéto rovnice je však veľmi ťažké vyriešiť. Skúsme s tým teda spraviť niečo rozumnejšie a pozrime sa, ako by to vyzeralo pre 7-dňový plán. Vydelme si 2015 číslom 6 a dostaneme: $2015 : 6 = 335$ $zv.5$, teda 6 dní riešime denne 335 úloh a 7. deň ich ešte vyriešime 5 (preto sme delili číslom o jeden menším ako je plán, aby sme zvyšok vedeli vyriešiť posledný deň). Ako by mal vyzerať náš nový plán? Vieme, že budeme riešiť 4 dni po 356 úloh a posledný deň vyriešime zvyšok, ktorý nám chýba k 2015 úlohám spolu. Zapisovať si to budeme štýlom:

pôvodný reálny plán
nový plán

Teda zápis pre 7-dňový plán bude vyzerať takto:

$$6 \cdot 335 + 5 = 2015$$

$$4 \cdot 356 + 591 = 2015$$

Z toho vidíme, že pôvodný reálny plán určite nemal 7 dní, keďže v novom pláne by sme museli v posledný deň vypočítať 591 úloh, čo je viac ako 356. Vieme totiž, že posledný deň môžeme vypočítať najviac toľko úloh, ako v predošlom. 7-dňový plán nám teda nevyšiel.

Skúsme si dať teraz nejaký reálny plán. 7 dní bolo vcelku málo, tak si spravme dlhší 11-dňový reálny plán. Postupujeme rovnako ako pri siedmych dňoch. 2015 vydelíme číslom 10. Dostávame, že: $2015 : 10 = 201$ $zv.5$. Ako to bude vyzerať v našom zápise?

$$10 \cdot 201 + 5 = 2015$$

$$8 \cdot 222 + 239 = 2015$$

Opäť vidíme, že nám to z rovnakého dôvodu ako pri 7-dňovom pláne nevyšlo, ale na druhej strane tento krát nám to nevyšlo už len o kúsok. Skúsme si teda hneď spraviť zápis pre 12-dňový reálny plán:

$$11 \cdot 183 + 2 = 2015$$

$$9 \cdot 204 + 179 = 2015$$

Už na prvý pohlad vidíme, že takto mohol vyzerať 12-dňový pôvodný reálny plán. Teraz sa ale musíme zamyslieť, či je to jedniný spôsob, ako by 12-dňový reálny plán mohol vyzerať? Ak by sme zvýšili počet úloh vyriešený za deň, je jasné, že by sme vypočítali viac ako 2015 úloh už prvých 11 dní. Ako to však bude vyzerať, keď sa počet úloh za deň o niečo zníži? Vyskúšajme:

$$11 \cdot 182 + 13 = 2015$$

$$9 \cdot 203 + 188 = 2015$$

Vidíme, že aj takto by mohol vyzerať pôvodný reálny plán na 12 dní. Skúsme počet úloh za deň ešte znížiť, Dostávame:

$$11 \cdot 181 + 24 = 2015$$

$$9 \cdot 202 + 197 = 2015$$

Takže dokonca aj takto by mohol vyzerať pôvodný reálny plán na 12 dní. Niektorí z vás úž možno vidia, že keď znížime počet úloh za deň ešte o jednu, tak sa už budeme biť so zadaním. Ak by sme to spravili, vyzeralo by to nasledovne:

$$11 \cdot 180 + 35 = 2015$$

$$9 \cdot 201 + 206 = 2015$$

Znovu sa nám stalo, že v novom pláne by sme museli vypočítať v posledný deň viac úloh ako v predošlom a to máme zakázané, takže takto by už pôvodný reálny plán na 12 dní vyzerať nemohol. Teda pre 12-dňové pôvodné reálne plány sme dostali 3 riešenia

Pre 13-dňové, 14-dňové a 15-dňové pôvodné reálne plány by sme rovnakým spôsobom dostali ďalšie riešenia (môžete si vyskúšať sami). Pozrime sa ďalej, čo sa nám stane pri 16-dňovom reálnom pláne:

$$15 \cdot 134 + 5 = 2015$$

$$13 \cdot 155 + 0 = 2015$$

Na prvý pohľad nám to sedí, avšak všimnime si, že na 14. deň nám v novom pláne vychádza, že by sme nevypočítali ani jednu úlohu a teda by sme si skrátili pôvodný reálny plán hneď o 3 dni, miesto 2. Preto pri 16-dňovom pláne hneď znižujeme počet úloh denne o 1. Tak nám to vyjde:

$$15 \cdot 133 + 20 = 2015$$

$$13 \cdot 154 + 13 = 2015$$

Takýto 16-dňový plán nám už spĺňa všetky podmienky zo zadania. Ďalšie 16-dňové plány by sme dostali postupným znižovaním počtu úloh za deň o 1 rovnako ako pri 12-dňovom pôvodnom reálnom pláne. Pre 17-dňové a 18-dňové pôvodné reálne plány opäť zopakujeme už zabehnutý postup a vrhneme sa hneď na 19-dňový reálny plán:

$$18 \cdot 111 + 17 = 2015$$

$$16 \cdot 132 + (-97) = 2015$$

Tuto už dostávame opačný problém a síce, že v posledný deň nového plánu by sme museli ešte narýchlo nejaké už vyriešené úlohy mazať, keďže sme za prvých 16 dní vyriešili viac úloh, ako ich reálne bolo. Je teda očividné, že 19-dňové pôvodné reálne plány žiadne neexistujú.

A keďže sme na začiatku zistili, že 11-dňové pôvodné reálne plány neexistujú vieme povedať, že neexistujú ani pôvodné reálne plány na menej ako 11 dní. Preto, lebo už 11 dní bolo primálo, aby nám stačilo po odobratí 2 dní zvýšiť počet kníh za deň o 21.

Rovnako vieme povedať, že nebudú existovať ani pôvodné reálne plány na 19 a viac dní, lebo by sme museli mazať stále viac dní. A tak nám vyšlo, že reálne pôvodné plány vieme spraviť len na 12-18 dní, pre ktoré sme našli všetkých 39 možností, ako mohli vyzerať.

Odpoveď: Úloha má 39 riešení najdete ich v tabuľke 4:

Počet dní	Počet stránok za deň
12	181, 182, 183
13	163, 164 $\cdots$ 167
14	147, 148 $\cdots$ 154
15	135, 136 $\cdots$ 143
16	126, 127 $\cdots$ 133
17	119, 120, 121, 122
18	112, 113

Tabuľka 4: správne odpovede

Komentár: Veľa z vás sa uspokojilo, keď ste našli prvé riešenie, ale otázka sa pýtala na všetky riešenia. Preto sme vám nemohli dať plný počet bodov. :)

Príklad č. 4 (opravoval Peťo):

Zadanie: Lámač balí Aničku. Na konci leta. Tak si vraví algebrogram:

$$TO + TO + LETO + ALE = BOLO$$

Anička by ho rada vyriešila, tak jej Lámač prezradil, že L je prvočíslo. Zistite, aké číslice predstavujú jednotlivé písmená. Rôzne písmená predstavujú rôzne číslice 0 až 9, pričom číslo nezačína na číslicu 0.
Riešenie: Ako prvé sa pozrieme na súčet na mieste jednotiek:

$$O + O + O + E = O + 10 \cdot prenos_d,$$

kde $prenos_d$ je počet desiatok, ktoré sa pri sčítavaní budú prenášať zo súčtu jednotiek do súčtu desiatok. Na prvý pohľad nám toho veľa nehovorí, dokonca sa nám môže zdať, že to ide splniť pre ľubovoľné O. Nie je to však tak, keďže O a E sú obe cifry a navyše rôzne, tak O nemôže byť 0. Ak by bolo, tak na splnenie súčtu na mieste jednotiek by E muselo byť násobkom desiatich, čo sú však aspoň dvojciferné čísla a nula. Teda E by nespĺňalo podmienky, že je jednociferné, alebo že je rozdielne od O. Pre všetky ostatné možnosti O vieme nájsť také E, aby bol splnený súčet na mieste jednotiek, ako je ukázané v tabuľke 5, kde je zároveň aj vypočítaný $prenos_d$ do súčtu desiatok.

O	1	2	3	4	5	6	7	8	9
E	8	6	4	2	0	8	6	4	2
$prenos_d$	1	1	1	1	1	2	2	2	2

Tabuľka 5: Možnosti pre O a E na základe súčtu jednotiek.

Teraz sa pozrime na súčet desiatok:

$$T + T + T + L + prenos_d = L + 10 \cdot prenos_s$$

kde $prenos_d$ je počet desiatok, ktoré sa pri sčítavaní preniesli zo súčtu jednotiek a $prenos_s$ je počet stoviek, ktoré sa pri sčítavaní budú prenášať zo súčtu desiatok do súčtu stoviek. Vidíme, že $T + T + T + prenos_d$ musí byť nasobkom desiatky. Keďže $prenos_d$ je nenulový, tak ani $T + T + T + prenos_d$ nemôže byť nula. A pretože $prenos_d$ je najviac 2, tak to nebude ani 30 a viac. Teda $T + T + T + prenos_d = 10$ alebo $T + T + T + prenos_d = 20$. Ľahko sa presvedčíme, že keď $prenos_d = 1$, tak T môže byť jedine 3 a $prenos_s$ je potom 1, a keď $prenos_d = 2$, tak $T = 6$ a $prenos_s = 2$.

Keďže rôzne písmená predstavujú rôzne cifry, tak vieme povedať, že $O \neq 3$, pretože aj T by muselo byť 3. Taktiež $O \neq 6$, lebo T by tiež muselo byť 6 a $O \neq 7$, pretože E aj T by museli byť 6. Zostávajúce možnosti pre O a E spolu s príslušným prenosom do rádu desiatok, T a prenosom do rádu stoviek sú zobrazené v tabuľke 6.

O	1	2	4	5	8	9
E	8	6	2	0	4	2
$prenos_d$	1	1	1	1	2	2
T	3	3	3	3	6	6
$prenos_s$	1	1	1	1	2	2

Tabuľka 6: Možnosti pre O, E a T.

Na pozíciach tisícok má písmeno len jedno slovo z pomedzi sčítancov, ktoré je rozdielne od písmena na mieste tisícok súčtu. To znamená, že zo súčtu stoviek musel nastať prenos, inak by nemohlo platiť $L \neq B$. Súčet na mieste stoviek vyzerá nasledovne:

$$E + A + prenos_s = O + 10 \cdot prenos_t$$

Cena	Počet cukríkov	Cena dokopy	Výdavok
1	1	1	9
2	2	4	6
3	3	9	1
4	4	16	4
5	5	25	5
6	6	36	4
7	7	49	1
8	8	64	6
9	9	81	9
10	10	100	0

Tabuľka 7: Počty a ceny cukríkov

kde $prenos_s$ je počet stoviek, ktoré sa pri sčítavaní preniesli zo súčtu desiatok. $prenos_t$ je počet tisícok, ktoré sa pri sčítavaní budú prenášať zo súčtu stoviek do súčtu tisícok. Keď sa nad tým poriadnejšie zamyslíme, prídeme na to, že ak má byť $prenos_t$ nenulový a A nebolo dvojciferné, tak musí platiť, že $E + prenos_s > O$. Podľa tabuľky 6 tomu vyhovujú iba možnosti $O = 1$ a $O = 2$. Pre obe tieto možnosti je $prenos_t$ rovný 1, čo znamená $B = L + 1$. Na základe týchto poznatkov už vieme ľahko dopočítať aké cifry majú byť písmená A, L a B pre obe možnosti.

Odpoveď: Algebrogram má dve možné riešenia: $31 + 31 + 5831 + 258 = 6151$ a $32 + 32 + 7632 + 576 = 8272$.

Komentár: Veľa z vás tento príklad riešilo skúšaním možností. To je jeden z možných spôsobov, avšak pri ňom treba nie len vyskúšať, ale aj **napísať** do riešenia všetky možnosti, ktoré ste nevylúčili logickými úvahami. Tiež treba napísať prečo niektorá možnosť nemôže byť, nie len povedať že nemôže byť. Inak si myslím, že ste príklad zvládli veľmi dobre.

Príklad č. 5 (opravovali Dada, Dada B.):

Zadanie: Na správnych trhoch majú samozrejme aj veľa sladkých dobrôt. V jednom stánku predávali niekoľko druhov gumených cukríkov. Každý z nich stál iný počet korún. Dievčatá sa rozhodli, že si cukríky kúpia, okrem Aničky, ktorá na cukríky nemala chuť. Každá si kúpila iný druh cukríkov. Zaujímavé bolo, že množstvo cukríkov, ktoré si každé z dievčat kúpilo, bolo rovnaké, ako cena jedného cukríka, ktorý si kúpilo (napríklad, ak si Katka kúpila cukríky, kde jeden stál 17 korún, potom si ich spolu kúpila 17).

Na platenie použila každá iba desaťkorunáčky a každej vydali 1 až 9 korún. Koľko najviac Aničkiných kamarátok si mohlo kúpiť cukríky, ak každej vydali iný počet korún? Koľko najviac cukríkov si spolu mohli kúpiť, ak dokopy zaplatili menej ako 97 korún?

Riešenie: Najprv sa pozrime na počet Aničkiných kamarátok. Ako ste si iste všimli, platí, že ak násobíme dve prirodzené čísla, tak ich poslednú cifru výsledku (výdavok z 10 korunáčky) ovplyvňujú iba posledné cifry oboch činiteľov. To znamená, že ak násobíme $7 \cdot 7$, posledná cifra výsledku bude rovnaká, ako keby sme násobili napríklad $17 \cdot 17$. Prirodzené čísla môžu končiť jednou z desiatich cifier, ktorých posledné cifry po vynásobení ako aj výdavky môžete vidieť v tabuľke 7.

Z tabuľky sa dá taktiež vyčítať, že existuje 6 rôznych výdavkov z desaťkorunačky, no jeden z nich je 0, čo nám zadanie nepovoľuje. Anička teda mohla mať maximálne 5 kamarátok, ak každá dostala iný výdavok.

Poďme teda k druhej otázke. Vieme už, že Anička má 5 kamarátok (pretože každej vydali iný počet korún) a navyše vieme, že dokopy za cukríky nezaplatili viac ako 97 korún. Ako si veľa z vás všimlo, žiadna z Aničkiných kamarátok si nemohla kúpiť 10 cukríkov, pretože by platilia $10 \cdot 10 = 100$ korún, čo je viac, ako máme zo zadania povolené.

Keď sa opäť pozrieme na tabuľku zvyškov, môžeme curkríky podeliť do kategórií podľa výdavku z 10 korunáčky. Dostaneme 5 kategórií: 1 a 81, 4 a 64, 9 a 49, 16 a 36, a posledná kategória obsahuje iba 25.

Z každej z týchto kategórií si teda chceme zobrať jedno číslo. Keďže v poslednej kategórií je iba číslo 25, určite ho budeme potrebovať.

Zostáva nám teda k rozdeleniu $97 - 25 = 72$ korún. Z toho si môžeme všimnúť, že číslo 81 (teda 9 cukríkov po 9 korún) sa nám do rozpočtu nevojde. Preto z prvej kategórie zoberieme číslo 1 (teda 1 cukrík po 1 korune). Teraz nám zostáva $97 - 25 - 1 = 71$ korún. Ak by sme z druhej kategórie chceli zobrať číslo 64, zostalo by nám iba $71 - 64 = 7$ korún a to nám nevystačí ani na jedno z čísel 16 a 36. Vezmeme si teda namiesto 64 radšej číslo 4 (teda 2 cukríky po 2 koruny) a ideme nakupovať ďalej. V rozpočte máme ešte $97 - 25 - 1 - 4 = 67$ korún.

Chýbajú nám ešte výdavky 1 a 4, teda jedno z čísel 9 a 49, a druhé z čísel 16 a 36. Vezmime teda číslo 49. Zostane nám $97 - 25 - 1 - 4 - 49 = 18$ korún. Za tie si vieme z poslednej kategórie kúpiť 4 cukríky za 4 koruny. Máme teda $1 + 2 + 4 + 5 + 7 = 19$ cukríkov, za $1 + 4 + 16 + 25 + 49 = 95$ korún.

Skúsme, či by nebolo výhodnejšie zobrať namiesto 49 radšej číslo 9 (teda 3 cukríky po 3 koruny). Ak by sme tak spravili, zostalo by nám $97 - 25 - 1 - 4 - 9 = 58$korún. Za tie si môžeme kúpiť buď 6 cukríkov (za dokopy 36 korún), alebo 4 cukríky (za dokopy 16 korún). My chceme mať cukríkov čo najviac, preto si vyberieme 6 cukríkov za 36 korún. Takýmto spôsobom sme minuli $1 + 4 + 9 + 25 + 36 = 75$ korún, ale kúpili sme si iba $1 + 2 + 3 + 5 + 6 = 15$ cukríkov, preto bola naša prvá možnosť výhodnejšia.

Odpoveď: Anička mohla mať najviac 5 kamarátok a mohli si kúpiť najviac 19 cukríkov.

Bodovanie: Viacerí z vás pochopili príklad trošku inak, ako bol myslený. Konkrétne sa vyskytli riešenia, ktoré predpokladali, že fakt, že každej z Aničkiných kamarátok vydali iný počet korún sa vzťahuje iba k prvej otázke. Usúdili sme, že zo zadania to nemuselo byť úplne jasné, a preto sme uznávali ako správne aj riešenia, ktoré sa zaoberali touto úlohou. Ďalej sa vyskytol problém s poradím otázok. Obmedzenie 97 korún sa vyskytlo až v druhej otázke (teda aj druhej časti príkladu), preto ak ste túto informáciu použili aj v prvej časti (typicky tak, že ste neskúšali vyššie možnosti ako $9 \cdot 9$), strhávali sme 1 bod. Ďalšie straty bodov boli iba za nedovysvetľované skúšania a podobne.

Príklad č. 6 (opravovali Tete, Mišo):

Zadanie: Pankrác a Servác sa pretekali. Bežali každý stálou rýchlosťou s prvočíselnou hodnotou v metroch za sekundu. Servác je rýchlejší, preto dal Pankrácovi náskok. Dĺžka náskoku v metroch je druhá mocnina prirodzeného čísla. Obaja štartovali naraz. Ako rýchlo bežali, ak Servác dobehol Pankráca po troch sekundách? Žiaden z nich nie je majster sveta a ich rýchlosti v m/s sú jednociferné.

Druhá mocnina je číslo, ktoré dostanete, keď vynásobíte dve rovnaké čísla. Napríklad, 25 *je druhá mocnina čísla* 5.

Riešenie: Ako prvé si vypíšeme jednociferné prvočísla: 2, 3, 5, 7. To preto, lebo vieme, že obaja bežali jednocifernou prvočíselnou rýchlosťou.

Vieme, že Servác dobehol Pankráca po troch sekundách. To znamená, že každú sekundu bol rýchlejší o tretinu náskoku, keďže ich rýchlosti aj rozdiely ich rýchlostí sú prirodzené čísla. Z toho vyplýva, že náskok je deliteľný tromi, zároveň však je, podľa zadania, druhá mocnina nejakého prirodzeného čísla. Najväčší možný náskok vieme vypočíť ako čas krát najväčší možný rozdiel rýchlostí.

$$3s \cdot (7m/s - 2m/s) = 3s \cdot 5m/s = 15m$$

Druhé mocniny prirodzených čísel, ktoré nie sú väčšie ako 15 sú $1^2 = 1$, $2^2 = 4$ a $3^2 = 9$. Z nich je tromi deliteľné iba číslo 9.

Náskok je 9 metrov, teda rozdiel rýchlostí je $\frac{9m}{3s} = 3m/s$.

Možné rozdiely rýchlostí:

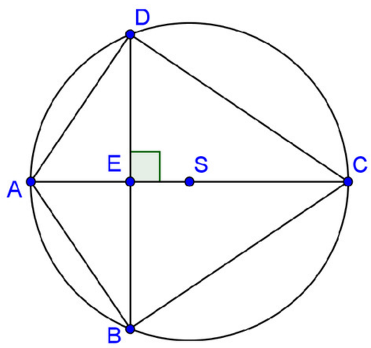
- $3 - 2 = 1m/s$
- $5 - 2 = 3m/s$
- $5 - 3 = 2m/s$
- $7 - 2 = 5m/s$
- $7 - 3 = 4m/s$
- $7 - 5 = 2m/s$

Z našich možností vyhovuje jedine druhá.

Odpoveď: Servác bežal rýchlosťou $5m/s$ a Pankrác $2m/s$.
Komentár: Veľa z vás sa rozhodlo po vypísaní prvočísel rovno vyskúšať možnosti. Správny postup, ale len ak ste vyskúšali naozaj všetky možnosti. Celkom často sa opakovalo, že niekto napísal, že číslo 1 je prvočíslo, čo nie je pravda, ale body sme za to nestŕhali :).

Príklad č. 7 (opravovali MaťoPaťo, Paľo):

Zadanie: Body A, B, C, D ležia na kružnici s polomerom 3, kde platí, že úsečka AC je kolmá na BD. Označme E priesečník AC a BD. O pomeroch obsahov trojuholníkov platí, že $S_{\triangle AEB} : S_{\triangle BEC} = 1 : 2$ a $S_{\triangle BEC} : S_{\triangle CED} = 1 : 1$. Vypočítajte vzdialenosť bodu E od stredu kružnice.
Riešenie: Pre pravouhlé trojuholníky platí takýto vzorec pre výpočet obsahu: $S = \frac{v \cdot z}{2} = \frac{a \cdot b}{2}$ (a, b sú odvesny príslušného pravouhlého trojuholníka (kratšie strany)). Pravouhlé trojuholníky DEC a BCE majú rovnaký obsah a spoločnú výšku EC. Z rovnice na výpočet obsahu teda vyplýva, že dĺžky základní a a b musia byť rovnaké, aby trojuholníky naozaj mali rovnaký obsah. Teda bod E je stred úsečky BD. To znamená, že úsečka AC leží na osi úsečky BD.



Obr. 1: Náčrt príklad č. 7

Ako je známe, na osi tetív leží stred kružnice (tetiva je úsečka, ktorej koncové body ležia na kružnici). To znamená, že úsečka AC je tetiva, ktorá prechádza stredom kružnice, ktorý si označíme S. Teda priemer zadanej kružnice a jej dĺžka sú rovnaké – 6 centimetrov.

Trojuholníky ABE a EBC majú pomer obsahov 1/2 a opäť spoločnú výšku, ktorou je úsečka EB. To znamená, že aj pomer dĺžok základní je 1/2 a v tomto pomere delí bod E úsečku AC. Z toho vyplýva, že $|AE| = 2cm$ a $|EB| = 4cm$. Tiež vieme, že polomer kružnice (úsečka SA) má dĺžku 3 cm. Nakoniec stačí urobiť jednoduchý výpočet a to $|SE| = |SA| - |AE| = 2cm$.
Odpoveď: Vzdialenosť bodu E od stredu kružnice je 1 centimeter.
Komentár: Väčšina z vás riešila príklad správne, ale treba si dať pozor, aby ste všetky vaše úvahy odôvodňovali. Mnoho z vás totižto neuviedlo dôvod, prečo musí bod E ležať v strede úsečky BD.

Príklad č. 8 (opravoval Tomáš):

Zadanie: Miško a Janka si idú zahrať kolky. No nie sú to klasické kolky. Je ich 11 a sú rozostavané do radu. Hráči sa po ťahu striedajú. V jednom ťahu môžu zhodiť 1 alebo 2 kolky, ak stoja priamo vedľa seba. Teda ak je medzi dvoma stojacimi kolkami aspoň jedna zhodená kolka, tieto dve kolky už nemôžeme zhodiť v jednom ťahu. Ten kto zhodí poslednú kolku, prehrá. Ako má Miško hrať, aby vyhral, ak začína? Čo keby bolo koliek iba 7?
Riešenie: Milí riešitelia, vítame Vás pri sledovaní prestížneho zápasu kolkového turnaja medzi Miškom a Jankou. Aby mal v hre každý z Vás jasno, spravíme najprv nasledovné:

Zavedieme si označenie: Vyhrávajúcou pozíciou koliek chápeme takú, pri ktorej vie Miško istotou vyhrať, keď začína. Naopak prehrávajúcou nazveme takú, pri ktorej určite prehrá, nech robí čo robí.

Napríklad taká 1 kolka je prehrávajúca pozícia.

To môže na prvý pohľad vyzerať ako veľmi zbytočný poznatok, Miškovi sa ale páčil. Od kreslenia koliek ho ale už bolela ruka, tak si zaviedol ďalšie označenie. Označením (1,2,3) budeme chápať 3 skupinky koliek, pričom v prvej skupinke je iba jedna kolka, v druhej sú už dve a v tretej sú tri. Môžeme rovnako dobre odoberať kolky sprava aj z ľava. Teda si môžeme všimnúť, že (3,2,1) je z nášho herného hľadiska to isté.

Miško sa ďalej zamyslel takto:

Keď je (1) prehrávajúca, situácia o jeden krok dozadu bola vyhrávajúca. Ako tak asi mohla vyzerať? Bolo to tak, že buď Janka ubrala jednu kolku, a bola to jedna z týchto: (2),(1,1) alebo Janka uberala dve kolky, a situácia bola takáto: (3),(1,2).

Poďme teraz nájsť ďalšiu prehrávajúcu. To bude taká, po ktorej zostane v hre určite vyhrávajúca situácia. Vieme, že doteraz sme mali v hre max. 3 kolky, pozrime sa teda na situáciu (4). Z nej sa vieme dostať do (2),(3),(1,2) alebo (1,1). To sú všetko vyhrávajúce situácie. Preto je (4) prehrávajúca. Rovnako ako minule vytvoríme zoznam vyhrávajúcich.

Miškovi sa tento trik zapáčil. Uvedomil si totiž, že pokiaľ zistíme niečo o situácií, ktorá je „tesne po“ tou s 11 kolkami, vieme presne povedať, ako treba hrať. Ak by sme napríklad zistili, že situácia (8,1) je prehrávajúca a vieme sa k nej dostať z (11), teda vieme, že (11) je vyhrávajúca. A nielen to. Vieme, že na to, aby sme vyhrali, by sme museli ísť do (8,1) a odtiaľ ide hocijaký ťah do vyhrávajúcej. (Teda ak by (8,1) bolo prehrávajúce).

Povzbudený touto myšlienkou, Miško daľej hľadal prehrávajúce kombinácie (teda také, z ktorých každý možný ťah vedie do už nájdených vyhrávajúcich). Takto našiel kombináciu (1,1,1). Rovnako ako minule, doplnil tabuľku. Ďalšími prehrávajúcimi sú (2,2), (3,3) a (4,1,1).

Všimneme si, že potom (3,4) aj (4,4) sú vyhrávajúce. Ak by sme ukázali, že aj (5,2) je vyhrávajúca, potom by (5,4) bolo prehrávajúce, a teda (11) vyhrávajúce. Ak by bolo (5,2) vyhrávajúce, tak napríklad (1,2,3) by mohlo byť prehrávajúce. A naozaj. Každá z kombinácií, do ktorých sa vieme z (1,2,3) dostať, už je v našej tabuľke ako vyhrávajúca, konkrétne (2,2,1),(3,1,1),(3,2),(1,2,1) aj (3,1).

Dokázali sme teda, že z (11) vieme ísť na (5,4), ktorá je prehrávajúca, a teda takýmto ťahom Miško vyhrá. A čo ak ich bude mať Miško 7? No pozrime sa na našu tabuľku: Hľadáme číslo (7). Je uvedené ako vyhrávajúce, lebo po rozdelení na (3,3) má druhý hráč prehrávajúcu situáciu, viď. Tabuľka 8.

Prehrávajúce	Vďaka nim vyhrávajúce
(1)	(2),(1,1),(3),(1,2)
(4)	(5),(4,1),(6),(4,2)
(1,1,1)	(2,1,1),(1,2,1),(3,1,1),(3,1),(4,1)
(2,2)	(2,2,1),(2,2),(5),(4,2),(2,2,2),(6)
(3,3)	(3,3,1),(4,3),(7),(3,3,2),(5,3),(8)
(3,2,1)	(5,2),(4,3)

Tabuľka 8: ťahy

Odpoveď: Pre 7 aj 11 koliek existuje výherná stratégia, ktorú nájdete popísanú vyššie.
Komentár: Väčšinou ste našli výhernú stratégiu, ale zároveň veľa z vás malo chybu v postupe. Preto radím do budúcna, radšej si poriadne skontrolujte svoj postup. :)

Príklad č. 9 (opravovali Zuzka, Lámač):

Zadanie: Máme trojuholník ABC, v ktorom je uhol ACB pravý a uhol BAC má 60°. Trojuholníkom prechádza priamka rovnobežná so stranou AC. Pretína strany AB a BC postupne v bodoch O a P. Kružnice vpísané trojuholníkom ABC a OBP majú obsahy v pomere 9 : 4. Lichobežník $AOPC$ má obsah $6cm^2$. Zistite dĺžky strán trojuholníka ABC.

Riešenie: Pre začiatok si dokážeme, že trojuholníky ABC a OBP sú podobné. Úsečky AC a OP sú rovnobežkami, preto uhly ACB a OPB majú rovnakú veľkosť. Uhol $CBA = PBO$ je v oboch trojuholníkoch rovnaký. Podľa vety uu o podobnosti trojuholníkov sú trojuholníky ABC a OBP podobné.

Pomer obsahov vpísaných kružníc dvoch podobných trojuholníkov je rovnaký ako pomer obsahov daných trojuholníkov. Preto platí:

$$S : S = 9 : 4$$

$$S = \frac{4}{9}S$$

Obsah trojuholníka ABC sa skladá z obsahov trojuholníka OBP a lichobežníka $AOPC$. Preto je obsah lichobežníka rovný $\frac{5}{9}S$. Zo zadaného obsahu lichobežníka vyrátam obsah trojuholníka ABC:

$$S = \frac{54}{5}cm$$

Všimnime si trojuholník ABC – je to polovica rovnostranného trojuholníka so stranou dlhou $|AB|$. Z toho vyplýva $|AB| = 2 \cdot |AC|$. Pre trojuholník ABC platí pytagorova veta:

$$|AC| + |BC| = 4 \cdot |AB|$$

$$|BC| = \sqrt{3} \cdot |AC|$$

Kedže trojuholník ABC je pravouhlý, jeho obsah možno vypočítať ako polovica súčinu jeho odvesien. Po dosadení za $|BC|$ dostávam rovnicu:

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot |AC| = \frac{54}{5}cm$$

Z tejto rovnice si vyjadrím $|AC|$, pomocou ktorého následne vyjadrím dĺžky ostatných strán trojuholníka ABC:

$$|BC| = \sqrt{\frac{324}{5 \cdot \sqrt{3}}}cm$$

$$|AC| = \sqrt{\frac{108}{5 \cdot \sqrt{3}}}cm$$

$$|AB| = \sqrt{\frac{432}{5 \cdot \sqrt{3}}}cm$$

Odpoveď: Dĺžky strán trojuholníka ABC sú:

$$|AC| = \sqrt{\frac{108}{5 \cdot \sqrt{3}}}cm,\ |AB| = \sqrt{\frac{432}{5 \cdot \sqrt{3}}}cm\ a\ |BC| = \sqrt{\frac{324}{5 \cdot \sqrt{3}}}cm$$

Komentár: Najskôr trocha štatistiky. Dostali sme riešenia od 27 riešiteľov, pričom až dvanásti ste dosiahli 10 bodov. Celkovo sme Vám za tento príklad rozdali 228 bodov. Priemer bodov na riešiteľa je 8.44.

Príklad ste zvládli, ako vidno v štatiskike, veľmi dobre. Pozor si však treba dávať pri dosádzaní – nedosádzaj už zaokrúhlené výrazy! Zapamätaj si tiež, že pod odmocninu sa nezvyknú dávať desatinné čísla – radšej ich vyjadri v zlomkovom tvare. Chyby ste taktiež robili pri (ne)dokazovaní podobnosti trojuholníkov. Tento príklad poukazuje na to, že nie vždy treba využívať goniometrické znalosti – niekedy stačí zapojiť len trocha predstavivosti.

Bodovanie: Za ukázanie podobnosti trojuholníkov 1 bod, za určenie koeficientu podobnosti 1 bod, za určenie obsahu trojuholníka ABC (alebo vyjadrenie iného obsahu potrebného na určenie dĺžok strán) 3 body a za určenie dĺžok jednotlivých strán 5 bodov.

Prémia (opravoval MaťoPaťo):

Zadanie: Dada hrala hru 2048. Hra prebiehala podľa štandardných pravidiel (ak túto hru nepoznáte, najlepšie bude nájsť ju na internete, napríklad na `2048game.com`). Vždy, keď zlúčite dve políčka, ku skóre sa vám pripočíta hodnota vami vytvoreného štvorčeka. Dada bola smoliarka a vždy jej pribudli iba dvojky.

Dosiahla číslo 2048 a následne potom zaplnila celú plochu. Hra sa skončila a Dadino skóre bolo 50844. Aký najmenší súčet mohli mať kachličky na výslednej úplne zaplnenej ploche?
(Pokyn: Pri tomto príklade stačí nakresliť, ako by teoreticky mohla vyzerať plocha pri dosiahnutí vášho najmenšieho súčtu.)
⋆⋆⋆ Tento príklad je bodovaný inak ako ostatné. Viac informácií nájdeš v pravidlách. ⋆⋆⋆

Riešenie: Ako prvé si vysvetlíme ako funguje skóre v hre 2048. Zo zadania vieme, že vždy keď spojíme dve rovnaké čísla, k nášmu skóre sa pripočíta výsledné číslo. Teda ak spojíme 4 a 4 ku skóre sa nám pripočíta 8.

Chceli by sme ale vedieť, o koľko sa nám zvýši skóre od začiatku, keď dosiahneme toto číslo 8. Na vyrobenie čísla 8 potrebujeme dve políčka s číslo 4. Na vyrobenia čísla 4 potrebujeme dve políčka s číslom 2. Tie nám pribúdajú s každým pohybom a body za ne nedostávame. Celkové skóre za číslo 8 teda bude $4 + 4 + 8 = 16$. Takým istým spôsobom sa dostaneme ku skóre za ďalšie čísla. Napríklad celkové skóre za číslo 16 bude $16 + 16 + 16 = 48$. Najvyššie číslo, za ktoré je celkové skóre menšie ako 50488 je 4096 s jeho skóre 45056. Najlepšie riešenie (tabuľka 9), ktoré ste našli obsahovalo toto číslo 4096 a súčet čísel na hracej ploche bol 4930.

4	2	128	32
2	512	2	8
4096	2	4	2
2	4	2	128

Tabuľka 9: Hracia plocha pri hre 2048

Odpoveď: Najlepšie riešenie, ktoré ste našli malo súčet čísel na hracej ploche 4930.
Komentár: Príklad nebol ťažký, ale mnohí ste sa mýlili pri počítaní skóre za čísla na vašej hracej ploche. Pokiaľ ste neukázali, ako vyzerá plocha, ale iba napísali aké čísla tam budú ste dostali polovicu vašich bodov, ktoré by ste mali normálne dostať. Najlepšie riešenia dostali 8 bodov.