

Zadania 3. kola letnej série 2015/2016

Termín: 16.05.2016

Naša adresa: Riešky, Mgr. Viera Babišová, Gymnázium Grösslingová, Grösslingová 18, 811 09 Bratislava 1

Elektronické riešenia: <http://riesky.sk/>

Nezostávalo mi nič iné, len pevne chytiť svoj kufor a vydať sa pešo popri koľajisku. Nebola to žiadna sláva, bola mi zima a bola som hladná. Posadila som sa aj s kufrom na medzu a zjedla som svoju poslednú zemičku. Samozrejme, bola som ohľaduplná k prírode a servítka, v ktorej bola zemička zabalená, som len tak nevyhodila do koľajiska, ale som ju zase zabalila späť do ruksaku. Človek nikdy nevie, na čo sa mu taká servítka ešte môže zísť. Občas sa u mňa takéto veci proste nahromadia, kým sa dostanem k farebným kontajnerom. Aj teraz som v ruksaku mala farebné guľôčky, ktoré si u mňa asi pred týždňom zabudla kamarátka.

Príklad č. 1: V ruksaku sú červené, zelené a modré guľôčky. Najmenej 4 guľôčky treba z ruksaku vytiahnuť, aby medzi nimi bola určite jedna červená. Najmenej 5, aby medzi nimi bola určite jedna zelená, a najmenej 6, aby medzi nimi bola určite jedna modrá. Koľko najmenej guľôčok treba vytiahnuť, aby sme si boli istí, že všetky guľôčky ostávajúce v ruksaku majú rovnakú farbu?

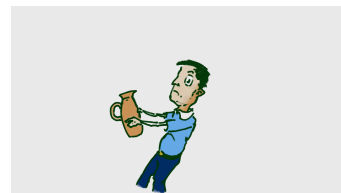
Keď ju najbližšie stretnem, tak jej ich dám a zatiaľ budú v bezpečí v mojom ruksaku. Teraz som sa však potrebovala zaoberať svojou vlastnou bezpečnosťou - stratená v poliach už guľôčky pôvodnej majiteľke nevrátim. Premýšľala som, prečo mám vždy takú hroznú smolu. Dokonca som aj zabudla číslo na babku Arabelu. Pamätala som si iba niečo neurčité.

Príklad č. 4: Koľko je takých rôznych trojíc dvojciferných čísel A, B, C , pri ktorých platí, že B je deliteľné číslom A a platí rovnosť $B^2 = A \cdot C$? Aký je súčet všetkých možných C -éčok?

Miesto toho som sa poriadne poobzerala okolo seba a uvidela som o niekoľko stovák metrov ďalej dom. Rozhodla som sa predsa len skúsiť moje pochybné šťastie a zaklopať na dvere, možno mi obyvatelia toho domčeka aspoň poradia, kade mám ísť ďalej. Rázne som sa vydala naprieč poľom a netrvalo dlho, kým som sa šmykla na mrznúcej mláke a nosom napred objala studenú zem. Prišlo mi na um, že takto nejako to vyzeralo, keď raz Dada celý deň skákala po schodoch.

Príklad č. 5: Dada stojí pred schodiskom vysokým 13 schodov. Skáče vždy buď jeden, alebo dva schody naraz. Koľkými spôsobmi sa môže vyskákať presne na vrch schodiska? (Dva spôsoby sú rôzne, ak existuje schod, na ktorý sme v jednom zo spôsobov skočili a v druhom nie.)

Nakoniec sa mi podarilo dokĺzať sa až k dverám domčeka. Poriadne som sa nadýchla a zaklopala. Otvoril mi akýsi postarší pán. „Pomôžem ti nejako?“ opýtal sa ma. „Vlastne áno,“ prikývla som. „Cestovala som vlakom za babkou, ale stratila som sa v poli. Neviete, kadiaľ vedie cesta do Doliniek?“ „Chúďa malé, ako si sa dostala z vlaku na pole?“ divil sa pán. Skôr než som stihla odpovedať ma zavolať dnu a ani neviem ako, pila som čaj, ktorý mi urobila manželka toho pána. Všimla som si, že než som prišla, pozerala v televízii romantický seriál odohrávajúci sa v horúcom, exotickom prostredí.



Príklad č. 6: Juan prišiel na trh s papagájmi. Mal jedného červeného, jedného modrého a ani jedného zeleného papagája. Na trhu zistil, že sa dá obchodovať takto:

- Za 2 modrých môže dostať 2 zelených.
- Za 1 červeného vie dostať 4 modrých.

- Za 2 zelených vie dostať 5 červených.
- Za 7 červených vie dostať 4 modrých.

Aby ho doma manželka Esmeralda pochválila, potrebuje povymieňať papagájov tak, aby ich počty boli po sebe idúce čísla v ľubovoľnom poradí. (Např. 5 jednej farby, 6 druhej, 7 tretej). Ako to môže urobiť?

Pán mi zatiaľ nakreslil mapu okolia a označil cesty, po ktorých by som mala ísť. Tvrdil, že by to do Doliniek nemalo trvať viac než pol hodinu. Potešila som sa a poriadne sa pozrela na jeho nákres. Najrýchlejšia cesta by viedla po priamke, no tá cesta viedla cez lesík. V tme sa mi ním rozhodne nechcelo ísť. „To už si to radšej obídem, či už z jednej, alebo druhej strany.“ Koniec koncov, viedla cezeň celá sieť chodníčkov rozdeľujúca lesík na 25 častí - jednu nebezpečnejšiu než druhú.

Príklad č. 9: Máme mriežku 5×5 , do ktorej sme vpisovali celé čísla od 1 do 5 vrátane tak, aby sa čísla v riadku, stĺpci a na ani jednej uhlopriečke neopakovali. Súčet 4 čísel tesne pod hlavnou uhlopriečkou (tou, ktorá ide z ľavého horného rohu do pravého dolného) budeme volať skóre. Aké najväčšie skóre sme pri vpisovaní čísel mohli dosiahnuť?

Nakoniec som sa poďakovala za čaj a odišla som, než bude naozaj neskoro. Babka Arabela sa už určite bojí. Starší pár mi poradil, aby som počítala križovatky. Na desiatej som mala odbočiť doprava. Samozrejme som ale zabudla, ktoré križovatky treba počítat a o chvíľu som sa v tom úplne stratila. Nakoniec som sa však dostala na osvetlenú cestu. Už som bola naozaj unavená, iba som ťahala kufor a sledovala svoj tieň vrhaný pouličným osvetlením. Počula som za sebou auto a čoskoro pribudol aj ďalší tieň z jeho diaľkových svetiel. Nevedela som, či mám stopovať, alebo nie. Kto vie čo za ľudí v túto hodinu chodia vedľajšími cestami. V tejto krízovej situácii som si radšej šla hodiť kockou.

Príklad č. 2: Veľká kocka bola zložená z menších, rovnako veľkých kociek troch farieb. Z nich $\frac{13}{72}$ bolo červených a $\frac{25}{48}$ modrých. Zelených bolo menej ako 1000. Koľko bolo celkovo menších kociek, a koľko z nich bolo modrých a koľko zelených?

Kocka povedala jasne: stopovať. Otočila som sa a vzorne dala autu lajk. Svetlomety ma oslepili, a tak som si najskôr ani nevšimla, že auto zastavilo. Zdvihla som kufor a s „ďakujem Vám veľmi pekne“ nastúpila. Až teraz som si poriadne prezrela vodiča. „Tomáško,“ vykrikla som od radosti, „čo ty tu robíš?“ „Ja tu bývam, ale čo ty robíš ty?“ odpovedal mi na otázku otázkou. „Idem za babkou do Doliniek,“ odpovedala som popravde. Tomáško sa zasmial. „Tak to si trochu ďaleko, nemyslíš? Máš šťastie, že som akurát šiel okolo.“ Spýtal sa ma na popisné číslo babkinho domu, napriek môjmu zdvorilému odmietnutiu trval na tom, že ma vezme až k nej, aby som sa nestratila. Cestou sme sa ešte chvíľu zhovárali a ja som si zatiaľ pozorne prezerala jeho auto – iba zo zvedavosti, samozrejme. Všimla som si, že na prednom skle má celkom zaujímavé šmuhy.

Príklad č. 3: Na obrázku je 5 bodov, z ktorých žiadne 3 neležia na jednej priamke. Koľko rôznych päťuholníkov vieme dostať ich pospájaním? (pozn. päťuholníky nesmú pretínať samé seba, môžu však byť aj vypuklé)

Je zaujímavé, že na malých dedinách nemajú ulice názvy, iba každý dom má svoje popisné číslo a celá dedina je akoby jedna veľká – alebo malá – ulica. Samozrejme som mu to číslo nemohla len tak povedať. Keďže Tomáško má rád hádanky a aj tak sme boli ešte ďaleko, vymyslela som pre neho hlavolam.

Príklad č. 8: V lichobežníku sú základne $|AB| = 8\text{cm}$ a $|CD| = 3\text{cm}$. Body E a F sú stredy strán AD a BC . Úsečka AC pretína úsečku EF v bode S . Polpriamka DS pretína úsečku AB v bode X . Aký je obsah lichobežníka $ABCD$, ak obsah štvoruholníka $AXCD$ je 15cm^2 ?

Tomáško si chvíľu prstom kreslil vo vzduchu a ja som mala obavy, že havarujeme. Ešteže nepočíta na prstoch, lebo to už by mu neostávalo nič, len šoférovať kolenami. Našťastie môj hlavolam rýchlo vyriešil a s potešením mi oznámil výsledok. Ja som sa potešila, keď opäť držal volant oboma rukami. Tomáško ma zaviezol až pred babkin dom, kde som vystúpila a premrznutá som cupitala nocou k jej dverám. Dnes som už po druhýkrát zazvonila na zvonček. Otvorila mi babka Arabela. Bolo na nej vidno, že sa jej uľavilo. „Už som sa o teba bála!“ zvolala a chytro ma pozvala dnu. Dalo mi veľa práce presvedčiť ju, že si naozaj dám iba jednu buchtu a potom som ju uprosila, aby mi porozprávala jeden zo svojich príbehov. Súhlasila pod podmienkou, že si s ňou zahrám jednu partiu domina.

Prémia: Skladáme dieliky domina. Máme všetky dieliky, na ktorých sú len čísla od 0 po 5 (vrátane), okrem tých s dvojicami rovnakých čísel (tj. okrem $[1, 1]$, $[2, 2]$, ...). Skladáme ich ako tradičné domino tak, že tvoríme hadíka, ktorý sa nikde nerozvetvuje, ani nevytvára okruh (nedotýka sa sám seba hranami dielikov, ale rohmi môže). Za každý spoj vo forme $[x, y][y, z]$ dostávame $x \cdot z$ bodov. Koľko najviac bodov môžeme získať, ak nemusíme použiť všetky dieliky, ale každý máme len raz?

Pozn. V štandardnej dominovej sade pre každú dvojicu čísel existuje len jeden dielik, ktorý ich obsahuje (celá sada má 28 dielikov). (tj. $[1, 2]$ a $[2, 1]$ je ten istý dielik a teda aj v tejto úlohe ho máme len raz)

Po chvíli som si uvedomila, že tu ktosi chýba. A tým niekým bol strýko Bohuš. Tak som sa tešila na babku, až som na neho takmer zabudla. Bol to babkin najmladší syn, ktorý aj v 50-tke ešte stále býval u mamy a všetok svoj voľný čas venoval svojmu koníčku, vynaliezaniu. Aby som mu ale nekrivdila, je v tom naozaj dobrý. Neexistuje asi žiaden prístroj, ktorý by nevedel opraviť alebo technický problém, ktorý by nevedel vyriešiť. Minule mi ukázal akýsi prístroj pre zvieratá, ktorý dokázal čítať ich myšlienky. Vyzeralo to ako šesťuholník, ktorý sa danému testovaciemu subjektu položil na hlavu a ten po tom ohlasoval myšlienky subjektu, teda aspoň hlavné myšlienkové pochody. Snímal iba niektoré signály, ale keďže to bol inteligentný prístroj, vždy si to dokázal spojiť. Napríklad keď ho na hlave mala krava, vynález vyhlásil, že je hladná. Možno by to fungovalo aj na ľudí, niekedy by sa to aj celkom zišlo, no na romantickej večeri by som asi nikomu nenasadila na hlavu takýto módný doplnok á la vrece.

Príklad č. 7: Máme vrece, do ktorého niekto hádže celé čísla (môžu byť aj záporné.) My mu v určitom momente povieme stop a on ich prestane hádzať. Teraz sa do vreca pozrieme. Ak vo vreci nájdeme také dve čísla, že ich súčet alebo ich rozdiel bude deliteľný 100, tak nás nechá na pokoji. Ak vo vreci také dve čísla nebudú, zatkne nás módna polícia a odsúdi na doživotie. Pri akom najmenšom počte čísel môžeme bezpečne povedať stop, aby sme si boli istí, že nás nezatvoria? (Teda pri každom menšom sa môže stať, že také dve čísla nenájdeme.)

Bola som zvedavá, na čom pracuje teraz. „Kde je strýko Bohuš?“ spýtala som sa babky a tá so záhadným úsmevom odkázala na stodolu. Vzala som si baterku a svietila si pod nohy, aby som na dvore nešliapla niekam, kam by som stúpila iba veľmi nerada. „Hej!“ zakričal na mňa strýko Bohuš. Privolal ma k sebe, aby mi ukázal svoje najnovšie veľdielo. Úplne mi ušiel veľký šedý tieň črtajúci sa proti oblohe. Nechcela som veriť vlastným očiam. Stála tam taká menšia vzducholoď, vzducholoďka, iba s malou kabínkou pre cestujúcich, ktorá až príliš nápadne pripomínala kabínku z lyžiarskych vlekov. „Chceš zviezť?“ Na okamih som si predstavila, ako cestujem ponad nočnú krajinu spolu so svojim pološialeným strýkom. Akokoľvek dobrodružná táto ponuka bola, po krátkom váhaní som odmietla. Na dnešok som cestovania mala až-až.

