Vzorové riešenia 3. kola letnej série 2015/2016

Príklad č. 1 (opravoval Jumaj):

Zadanie: V ruksaku sú červené, zelené a modré guľôčky. Najmenej 4 guľôčky treba z ruksaku vytiahnuť, aby medzi nimi bola určite jedna červená. Najmenej 5, aby medzi nimi bola určite jedna zelená, a najmenej 6, aby medzi nimi bola určite jedna modrá. Koľko najmenej guľôčok treba vytiahnuť, aby sme si boli istí, že všetky guľôčky ostávajúce v ruksaku majú rovnakú farbu?

Riešenie: Najprv filozofický úvod: Čo to znamená, že sme si istí, že vytiahneme aspoň jednu modrú guličku? To značí, že nech sa stane čokoľvek, nejaká modrá sa nám v ruke ocitne. Teda aj v tom najhoršom možnom prípade.

A aký je najhorší možný prípad? Že budeme postupne vyberať všetky guľôčky, len nie tie, ktoré chceme (modré). Aj v tomto prípade dokážeme ale vytiahnuť modrú – po tom, čo vytiahneme všetky, ktoré modré nie sú.

Povedzme teda, že máme 2 modré, 50 červených a 7 zelených guličiek. Aby sme si boli istí, že vytiahneme aspoň jednu zelenú, musíme potom vytiahnuť 53 guličiek (lebo môžeme najprv vytiahnuť 52 nezelených guličiek).

Teraz k reálnej situácii: Aby sme určite vybrali aspoň jednu červenú, musíme vytiahnuť 4 guličky. To znamená, že modrých a zelených je spolu 3.

Podobne modrých a červených je potom spolu 4. Zelených a červených je spolu 5. Z toho vyplýva, že modrých je o 1 menej, ako zelených. Modré a zelené sú spolu tri, teda modrá je len jedna a zelené sú dve. Červené sú potom tri. Vo vrecku je spolu 6 guličiek.

Keď sa snažíme vytiahnuť guličky tak, aby nám zostala len jedna farba, tiež musíme uvážiť najhorší možný prípad. To je ten, že keď budú vo vrecku už len dve guličky, budú rôznej farby. Teda musíme vytiahnuť všetky guličky až na jednu. To je 5 guličiek.

Príklad č. 2 (opravovala Dada):

Zadanie: Veľká kocka bola zložená z menších, rovnako veľkých kociek troch farieb. Z nich $\frac{13}{72}$ bolo červených a $\frac{25}{48}$ modrých. Zelených bolo menej ako 1000. Koľko bolo celkovo menších kociek, a koľko z nich bolo modrých a koľko zelených?

Riešenie: Poďme sa teda hrať s kockami. Najprv zistíme, koľko zo všetkých kociek je zelených. Ako? No predsa takto:

Keď červených je $\frac{13}{72}$ a modrých $\frac{25}{48}$, dokopy ich je $\frac{13}{72} + \frac{25}{48} = \frac{2\cdot 13+3\cdot 25}{144} = \frac{101}{144}$. V jednej veľkej kocke by sme potrebovali mať $\frac{144}{144}$, teda nám chýba ešte $\frac{43}{144}$.

Teraz by sme sa vedeli hrať takú hru. Ja Vám poviem koľko je kociek vo veľkej kocke, a Vy mne koľko je zelených. Skúsme to. Hmmm... Čo ak ich je 288?

Zelených je 86! Lebo 288 vydelím 144 a vynásobím 43. Ale počkať, ako by ich mohlo byť 288?

Aby sme to vyskúšali, musíme si takú kocku skúsiť poskladať. Ak nemáte 288 kociek, skúste menšie čísla. Čo tak napríklad 10. Viete dobre poskladať kocku z 10 menších? Ja nie, a to neznamená, že som nešikovná, ale že to nejde.

Ak má nejaká kocka na jednej strane nejaký počet kociek (a teda na všetkých stranách ho má rovnaký, lebo to je kocka), potom počet kociek na jednom poschodí dostaneme tak, že toto číslo vynásobíme samé sebou. Ak mala teda kocka napríklad 3 kocky na výšku, počet kociek na jednom poschodí bude $3 \cdot 3 = 9$. A takých poschodí tam je toľko, koľko je tá výška, že? Preto ich celkový počet získame tak, že nejaké číslo vynásobíme medzi sebou trikrát (pre kocku o výške 3 máme teda $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$ kociek).

Ak skúsime nejaké väčšie číslo, napríklad 13, dostaneme $13 \cdot 13 \cdot 13 = 2197$. Pri väčších číslach ale musíme mať na pamäti, že našich zelených kociek má byť menej ako 1000. Napíšme si, aké môžu byť dĺžky strán.

Z tabuľky 1 môžeme vidieť, že nášmu kritériu zodpovedá iba jeden riadok. V iných prípadoch vyšlo „škaredé“ číslo, teda počet kociek by nebolo celé číslo. A my nechceme necelé kocky.

Teda dostávame že kociek bolo dokopy 1728, a zelených bolo 516. A modrých? Predsa $1728 \cdot \frac{25}{48} = 900$.

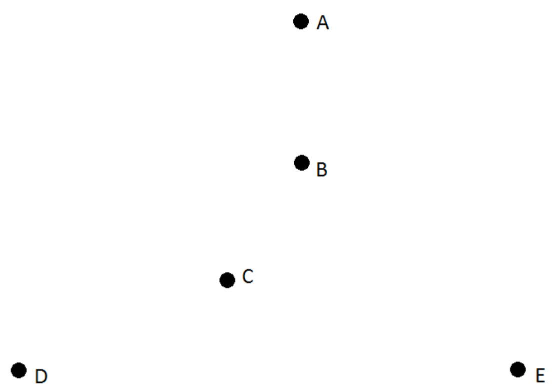
Výška kocky	Počet kociek vo veľkej kocke	Počet zelených
1	1	nie je pekné číslo
2	8	nie je pekné číslo
3	27	nie je pekné číslo
4	64	nie je pekné číslo
5	125	nie je pekné číslo
6	216	nie je pekné číslo
7	343	nie je pekné číslo
8	512	nie je pekné číslo
9	729	nie je pekné číslo
10	1000	nie je pekné číslo
11	1331	nie je pekné číslo
12	1728	516
13	2197	nie je pekné číslo
14	2744	nie je pekné číslo
15	3375	1007,8125 je viac ako 1000

Tabuľka 1: kocky s rôznou dĺžkou strany

Príklad č. 3 (opravoval Tomáš):

Zadanie: Na obrázku je 5 bodov, z ktorých žiadne 3 neležia na jednej priamke. Koľko rôznych päťuholníkov vieme dostať ich pospájaním? (pozn. päťuholníky nesmú pretínať samé seba, môžu však byť aj vypuklé)

Riešenie: Označme si najprv jednotlivé body písmenami, tak ako na obrázku 1.



Obr. 1: Označenie bodov

Začneme tým, že si zvolíme prvý bod, od ktorého sa budeme odvíjať, v tomto prípade si zvolíme napríklad bod A. Teraz chceme postupne popripájať body ku bodu A, čím vytvoríme päťuholník. Najprv máme na výber zo 4 bodov, potom z 3, 2 a na konci nám ostáva už len jeden bod. Počet možností sa teda rovná $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 4! = 24$.

Lenže teraz máme započítané možnozsti $ABCDE$ a $AEDCB$, ako dve rôzne, aj keď sú to dve rovnaké len v opačnom smere. Ku každému päťuholníku možno nájsť taký istý len v opačnom smere. Preto treba počet možností vydeliť dvoma $\frac{24}{2} = 12$, aby sme dostali počet možností, kde nebudú dva rovnaké päťuholníky.

Teraz už len ostáva všimnúť si, že sa nám pretínajú úsečky AC a BD. Preto ešte treba odčítať všetky možnosti kde dôjde k pretnutiu dvoch strán. Sú to možnosti $ACBDE$, $ACEBD$, $ACDBE$ a $ACEDB$. Po odčítaní týchto možností dostávame $12 - 4 = 8$

Odpoveď: Môžeme vytvoriť 8 rôznych päťuholníkov.

Príklad č. 4 (opravovali Zuzka, Ľubo):

Zadanie: Koľko je takých rôznych trojíc dvojciferných čísel A, B, C, pri ktorých platí, že B je deliteľné číslom A a platí rovnosť $B^2 = A \cdot C$? Aký je súčet všetkých možných C-éčok?

Riešenie: Na začiatok využijeme poznatok, že A delí B. To znamená, že B si vieme prepísať do tvaru: $m \cdot A$, kde $m \in \mathbb{N}$. Vďaka tomu môžeme $B^2 = A \cdot C$ prepísať do takejto podoby:

$$m^2 \cdot A^2 = A \cdot C \implies m^2 \cdot A = C$$

Keďže A je nejaké dvojciferné číslo, vieme, že najmenšia hodnota, ktorú môže nadobúdať je 10. Pozrime sa, aké môžeme voliť m, aby aj C bolo dvojciferné číslo. Tu vidíme, že ak by sme mali $m = 4$, tak číslo C už bude trojciferné (160). To znamená, že budeme rozoberať len prípady $m = 1, m = 2, m = 3$.

Ako prvé sa pozrime na prípad $m = 1$. Vieme, že $B = m \cdot A \implies B = A$. Taktiež vieme, že $C = m^2 \cdot A \implies C = A$. Teda máme trojicu rovnakých čísel, pričom A môže byť číslo od 10 do 99. To znamená, že pre tento prípad máme 90 možností, ktorých súčet čísel C je 4905 (na výpočet využijeme súčet aritmetickej postupnosti). Aritmetická postupnosť je postupnosť čísel, v ktorej sa susedné čísla postupnosti líšia vždy o rovnaký rozdiel. Napríklad čísla od 10 do 99 vytvárajú aritmetickú postupnosť, keďže rozdiel medzi 10 a 11 je taký istý, ako medzi 11 a 12, či ľubovoľnými susednými číslami. Súčet S čísel aritmetickej postupnosti môžeme vypočítať ako $S = \frac{(a_1+a_n)\cdot n}{2}$, kde a_1 je prvým číslom postupnosti a a_n je n-tým číslom postupnosti, pričom postupnosť obsahuje n čísel.

Poďme na prípad, kedy $m = 2$. Tu už náme $C = 4 \cdot A$. Pozrime sa na najväčšie dvojciferné číslo, ktoré je deliteľné číslom 4. Hneď vidíme, že je to číslo 96. Ak by sa $C = 96$, tak $A = 24$. To znamená, že pre tento prípad nám budú vyhovovať také trojice, ktorých číslo A je nejaké číslo od 10 (najnižšia hodnota, ktorú môže dosahovať) do 24 (najväčšia hodnota, ktorú môže dosahovať, aby C bolo dvojciferné). Teda tu máme 15 rôznych trojíc, ktorých súčet hodnôt $C = 40 + 44 + 48 + \cdots + 92 + 96 = 1020$ (ľahko spočítame cez súčet aritmetickej postupnosti).

Ostáva nám ešte prípad $m = 3$, kde sa opäť pozrieme, aký je vzťah medzi číslami A a C. Vidíme, že $C = 9 \cdot A$, teda hľadáme najvyššie dvojciferné číslo deliteľné 9, čo je 99. Pre $C = 99$ máme $A = 11$, z čoho vieme povedať, že pre tento prípad máme dve možnosti ($A = 10, A = 11$) a súčet čísel C je teda 189.

Odpoveď: Máme teda 107 rôznych trojíc dvojciferných čísel spĺňajúcich zadanie so súčtom všetkých možných čísel $C = 4905$ (v prípade $m = 1$ už nadobúdame všetky možné hodnoty C, v ďalších prípadoch sa nám len opakujú).

Príklad č. 5 (opravovali Zajo, Sára):

Zadanie: Dada stojí pred schodiskom vysokým 13 schodov. Skáče vždy buď jeden, alebo dva schody naraz. Koľkými spôsobmi sa môže vyskákať presne na vrch schodiska? (Dva spôsoby sú rôzne, ak existuje schod, na ktorý sme v jednom zo spôsobov skočili a v druhom nie.)

Riešenie: Pri prvom pokuse rozpísať si možnosti zistíme, že je to celkom dosť, takže úplne priamočiarym vypísaním to pôjde pomerne ťažko.

Skúsme si preto spočítať možnosti pre menšie počty schodov. Nezabúdajme pri tom na to, že potrebujeme vyskákať presne na vrch schodiska. (Teda keď nám už ostáva len jeden schod, nemôžeme skočiť o 2)

1 **schod** $\sim$ 1 **spôsob** vieme vyskákať zjavne iba jedným spôsobom.

2 **schody** $\sim$ 2 **spôsoby** Tu už máme na výber medzi dvojskokom a dvoma skokmi po jednom schode.

3 **schody** $\sim$ 3 **spôsoby** Buď skáčeme len po jednom schode, alebo dvojskok a jednoskok v nejakom poradí.

4 **schody** $\sim$ 5 **spôsobov** Tu si už treba rozmyslieť, že sú to len možnosti $(1 + 1 + 1 + 1)$, $(1 + 1 + 2)$, $(1 + 2 + 1)$, $(2 + 1 + 1)$ a $(2 + 2)$.

V tomto momente, prípadne po dorátaní hodnoty pre 5 schodov je už vidno nejaký vzťah, ostáva ho už len dokázať.

S nasledujúcim dôkazom by sme mohli začať rovno, ale pri riešení takýchto úloh je užitočným prvým krokom si vypísať niekoľko menších prípadov, práve aby sme nadobudli nejakú predstavu o tom, ako budú vyzerať hľadané hodnoty. (napr. teraz sme si mohli všimnúť, že každá hodnota je súčtom dvoch predošlých, toto pozorovanie však nie je nutným predhodcom samotného dôkazu)

Vždy keď chceme vyskákať po schodisku, ktoré je vysoké n schodov, začneme buď skokom o jeden, alebo o dva schody.

Ak skočíme o jeden schod, tak zvyšok cesty je identický s tým, ako by sme chceli vyskákať po schodisku vysokom $n-1$ schodov. Inými slovami, počet spôsobov, ktorými bude možné vyskákať schodisko vysoké n schodov, keď začíname skokom o jedna, je rovnaký, ako počet možností ako vyskákať schodisko vysoké $n-1$ schodov.

Podobne, ak začneme skokom o dva schody, bude nám ostávať $n-2$ schodov, a tie môžeme vyskákať toľko možnosťami, akoby sme mali schodisko vysoké $n-2$ shodov.

Dôležité je uvedomiť si, že tieto úvahy môžeme robiť vďaka tomu, že ak sme niekde v strede nášho skákania/schodiska, tak zvyšok cesty nezávisí na tom, ako sme skákali dovtedy. Zavisí iba na tom, koľko ostáva schodov.

Preto je počet možností ako vyskákať n schodov rovný súčtu počtu možností ako vyskákať $n-1$ schodov a počtu možností pre $n-2$ schodov (ak n je aspoň 3). Zahrnieme takto totiž všetky možnosti (musíme začať skokom o jedna, alebo o dva) a zároveň sa všetky líšia. (Buď v prvom skoku, alebo v ostatných)

Označme počet možností, ako vyskákať schodisko vysoké x schodov P_x. Predošlá úvaha by sa dala charakterizovať nasledujúcou rovnicou:

$$P_x = P_{x-1} + P_{x-2}, \quad x \geq 3$$

Takto nám už len stačí vyrátať hľadané P_{13}. $P_5 = P_4 + P_3 = 5 + 3 = 8$ a ďalej $P_6 = 13, P_7 = 21$, $P_8 = 34, P_9 = 55, P_{10} = 89, P_{11} = 144, P_{12} = 233$.
Odpoveď: $P_{13} = 377$.

Príklad č. 6 (opravovala Zuzka):

Zadanie: Juan prišiel na trh s papagájmi. Mal jedného červeného, jedného modrého a ani jedného zeleného papagája. Na trhu zistil, že sa dá obchodovať takto:

- Za 2 modrých môže dostať 2 zelených.
- Za 1 červeného vie dostať 4 modrých.
- Za 2 zelených vie dostať 5 červených.
- Za 7 červených vie dostať 4 modrých.

Aby ho doma manželka Esmeralda pochválila, potrebuje povymieňať papagájov tak, aby ich počty boli po sebe idúce čísla v ľubovoľnom poradí. (Napr. 5 jednej farby, 6 druhej, 7 tretej). Ako to môže urobiť?
Riešenie: Pozrime sa na to, ako jednotlivé obchody zmenia celkový počet papagájov. Prvým premieňame 2 za 2, takže ich počet zostane rovnaký. Druhým aj tretím sa počet zvýši o 3. Posledným obchodom sa celkový počet zníži o 3.

Na začiatku sú papagáje dva. Nejakým obchodom sa tento počet buď nezmení, zvýši o 3, alebo zníži o 3. Podstatné je, že keď ho budeme deliť číslom 3, zvyšok bude stále 2.

Aby Juana pochválila manželka, počty jednotlivých farieb papagájov musia byť tri po sebe idúce čísla. Tieto čísla teda budú počet papagájov nejakej farby (povedzme modrej), ten počet zvýšený o 1 a znížený o 1. Keď to spočítame, tak nám počet papagájov dokopy vyjde ako trikrát počet papagájov modrej farby. Celkový počet papagájov bude preto vždy deliteľný číslom 3.

Ukázali sme si, že celkový počet Juanových papagájov bude vždy dávať zvyšok 2 po delení číslom 3, no na to, aby ho manželka pochválila, by musel byť celkový počet papagájov deliteľný číslom 3 bezo zvyšku. Juan teda za žiadnych okolností nebude pochválený manželkou.
Odpoveď: Počty Juanových papagájov nemôžu byť tri po sebe idúce čísla.

Príklad č. 7 (opravoval Peťo):

Zadanie: Máme vrece, do ktorého niekto hádže celé čísla (môžu byť aj záporné.) My mu v určitom momente povieme stop a on ich prestane hádzať. Teraz sa do vreca pozrieme. Ak vo vreci nájdeme také dve čísla, že ich súčet alebo ich rozdiel bude deliteľný 100, tak nás nechá na pokoji. Ak vo vreci také dve čísla nebudú, zatkne nás módna polícia a odsúdi na doživotie. Pri akom najmenšom počte čísel môžeme bezpečne povedať stop, aby sme si boli istí, že nás nezatvoria? (Teda pri každom menšom sa môže stať, že také dve čísla nenájdeme.)

Riešenie: Otázka v zadaní nám napovedá, že sa nemáme pozerať na to, aké konkrétne čísla sú vo vreci, ale na nejakú ich vlastnosť. Ale na akú? Odpoveď na to dostaneme, keď sa trochu zamyslíme nad podmienkou, ktorú musia splniť čísla vo vreci aby nás nezatvorili: súčet alebo rozdiel nejakých dvoch čísel má byť deliteľný 100.

Určite si všetci pamätáme, že na to, aby číslo bolo deliteľné 100, musia byť jeho posledné dve cifry nuly. To vlastne znamená, že nás nezatvoria len v dvoch prípadoch: Ak vo vreci nájdeme dve čísla, ktoré majú rovnaké posledné dvojčíslie, alebo ak ich posledné dvojčíslia majú súčet 100 (pričom jednociferné čísla uvažujeme s nulou pred nimi). Uvedomme si, že nezáleží na tom, koľko z čísel je záporných, pretože ak

- sú obe čísla kladné a majú
  - rovnaké posledné dvojčíslie, tak ich stačí odčítať,
  - posledné dvojčíslia, ktorých súčet je 100, tak ich stačí sčítať,
- je jedno číslo kladné a druhé záporné a majú
  - rovnaké posledné dvojčíslie, tak ich stačí sčítať,
  - posledné dvojčíslia, ktorých súčet je 100, tak ich stačí odčítať,
- sú obe čísla záporné a majú
  - rovnaké posledné dvojčíslie, tak ich stačí odčítať,
  - posledné dvojčíslia, ktorých súčet je 100, tak ich stačí sčítať.

aby sme dostali číslo deliteľné 100. To je pre nás dobrá správa, lebo sa nám tým pádom stačí na čísla, ktoré sú hádzané do vreca pozerať len cez ich posledné dvojčíslia. A hoci čísel, ktoré nám mohli hodiť do vreca je nekonečno, posledných dvojčíslí je len sto: 00, 01, . . . , 99.

Z toho by sme mohli mať nutkanie prehlásiť, že ak bude vo vreci 101 čísel, tak tam určite budú dve také, ktoré ho budú mať rovnaké a teda ich súčtom alebo rozdielom (podľa toho, či je prve jedno z nich záporné alebo nie) vieme dostať číslo deliteľné 100.

To ale nie je správna odpoveď, pretože my predsa nemusíme čakať, kým tam budú dve čísla s rovnakým posledným dvojčíslím. Ešte je tu možnosť, že čísla majú síce rôzne posledné dvojčíslia, ale súčet ich dvojčíslí je sto. Takýchto dvojíc sa z dvojčíslí 00 až 99 dá vytvoriť 49.

Keďže ale dvojčíslia 00 a 50 nie sú v žiadnej z dvojíc, tak táto možnosť nám hovorí, že ak by vo vreci bolo 51 čísel, tak je ešte šanca že nás zavrú (rozmyslime si, ako by to mohlo nastať). Ak ale vo vreci bude 52 čísel, už sa tam bude nejaké posledné dvojčíslie opakovať, alebo nejaké dve posledné dvojčíslia budú mať súčet sto a teda budeme vedieť vybrať z vreca také dve čísla, ktorých súčet alebo rozdiel je deliteľný 100.

Odpoveď: Vo vreci musí byť aspoň 52 čísel, aby sme mohli bezpečne povedať stop.

Príklad č. 8 (opravovali Lámač, Aďa):

Zadanie: V lichobežníku sú základne $|AB| = 8cm$ a $|CD| = 3cm$. Body E a F sú stredy strán AD a BC. Úsečka AC pretína úsečku EF v bode S. Polpriamka DS pretína úsečku AB v bode X. Aký je obsah lichobežníka $ABCD$, ak obsah štvoruholníka $AXCD$ je $15cm^2$?

Riešenie: Označme si priamku prechádzajúcu bodmi A, B ako p a priamku prechdzajúcu bodmi C, D ako r. Kedže body E, F ležia v strede úsečiek AD a BC, pričom AB je rovnobežná s CD, úsečka EF musí byť rovnobežná s úsečkami AB a CD. Bod E je rovnako vzdialený od úsečky AB ako od CD. Taktiež aj bod F je rovnako vzdialený od úsečky AB ako od CD. Preto aj úsečka EF musí byť rovnako vzdialená od oboch úsečiek. Body ležiace na priamke prechádzajúcej bodmi E, F sú potom stredmi úsečiek danými bodmi priamok r a p. Ak si teda vyberiem nejaký bod priamky r a spojím ho s ľubovoľným bodom priamky p, stred tejto úsečky bude ležať na priamke prechádzajúcej bodmi E, F. Bod S je stredom úsečky AC. Taktiež je S stredom úsečky DX. Potom je S prienik uhlopriečok v štvoruholníku $AXCD$.

Uhol ASX je vrcholovým uhlom k uhlu DSC, preto $|\angle ASX| = |\angle DSC|$. Kedže S je stredom AC aj DX, platí $|AS| = |SC|$ a $|DS| = |SX|$. Podľa vety *sus* sú trojuholníky ASX a CSD zhodné. Preto $|DC| = |AX|$. Kedže sú úsečky DC a AX rovnobežné a $|DC| = |AX|$, je štvoruholník $AXCD$ rovnobežník.

Obsah rovnobežníka $AXCD$ môžeme vypočítať ako $S_{AXCD} = |AX| \cdot v$, kde v je výška v rovnobežníku $AXCD$ na AX, čiže zároveň výška lichobežníka $ABCD$. Preto:

$$v = \frac{S_{AXCD}}{|AX|} \tag{1}$$

Obsah lichobežníka $ABCD$ môžeme vypočítať ako súčet obsahov S_{AXCD} a obsahu trojuholníka XBC, ktorý je rovný:

$$S_{\triangle XBC} = \frac{|BX| \cdot v}{2} \tag{2}$$

Po dosadení z (1) do (2) a využití $|BX| = |AB| - |AX|$ (pričom $|DC| = |AX|$) pre obsah trojuholníka XBC dostávame:

$$S_{\triangle XBC} = \frac{1}{2} \cdot (|AB| - |DC|) \cdot \frac{S_{AXCD}}{|DC|} \tag{3}$$

Obsah S lichobežníka $ABCD$ po dosadení za $S_{\triangle XBC}$ z (3) je:

$$S = S_{AXCD} + S_{\triangle XBC}$$
$$S = S_{AXCD} + \frac{1}{2} \cdot (|AB| - |DC|) \cdot \frac{S_{AXCD}}{|DC|}$$
$$S = S_{AXCD} \cdot (1 + \frac{|AB| - |DC|}{2 \cdot |DC|})$$

Po dosadení hodnôt zo zadania dostávame:

$$S = \frac{55}{2} \text{cm}^2$$

Odpoveď: Obsah lichobežníka $ABCD$ je $\frac{55}{2}\text{cm}^2$.
Bodovanie: Dostali sme 37 riešení, pričom priemerne sme za príklad dali 9.2 boda. Tri štvrtiny riešení boli desaťbodové.
Komentár: Príklad bol ľahký, dostali sme veľký počet správnych riešení. Body ste stratili za nezdôvodnenie, prečo je štvoruholník $AXCD$ rovnobežník.

Príklad č. 9 (opravovali Zajo, Aďa):

Zadanie: Máme mriežku 5×5, do ktorej sme vpisovali celé čísla od 1 do 5 vrátane tak, aby sa čísla v riadku, stĺpci a na ani jednej uhlopriečke neopakovali. Súčet 4 čísel tesne pod hlavnou uhlopriečkou (tou, ktorá ide z ľavého horného rohu do pravého dolného) budeme volať skóre. Aké najväčšie skóre sme pri vpisovaní čísel mohli dosiahnuť?
Riešenie: Hneď zo začiatku vieme povedať, že skóre bude **najviac 20** (ak by obsahovalo práve štyri 5-ky).

?				
5	?			
	5	?		
		5	?	
			5	?

Tabuľka 2: Skóre 20

Potom by ale vznikol problém, pretože na uhlopriečke, pod ktorou sú, by sa nemohla vyskytnúť 5-ka. Každé jej políčko je totiž už v riadku alebo stĺpci s nejakou 5-kou (viď. tabuľka 2). Na tejto uhlopriečke podľa zadania ale musí byť každé číslo práve raz.

				?
5			?	
	5	?		
	?	5		
?			4	**5**

Tabuľka 3: Skóre 19 (4 na kraji)

Maximálne skóre preto nebude 20, z čoho vyplýva, že to bude **najviac 19**. To vieme vyskladať ako tri päťky a jedna štvorka.

Ak je štvorka v najspodnejšom políčku (viď. tabuľka 3), tak máme opäť problém. Na uhlopriečke z ľavého horného rohu musí byť jedna 5-ka. Tá môže byť len v pravom dolnom rohu. (Ostatné políčka uhlopriečky sú v riadku, alebo stĺpci, kde už nejaká 5 je) Lenže teraz nastane problém s druhou uhlopriečkou, keďže na žiadnom jej políčku nemá kde byť 5-ka.

Ak by naša jediná štvorka v skóre bola v najľavejšom políčku, situácia je rovnaká, iba symetrická, opäť by bol problém vyplniť uhlopriečky.

?		**5**		
5	?			
	5	?		
		4	?	**5**
			5	?

Tabuľka 4: Skóre 19 (4 v strede)

Druhým spôsobom je, ak je štvorka v jednom z dvoch stredných políčok v skóre (ich prípady sú opäť symetrické, viď tabuľka 4).

Klasicky sa pozrime na to, čo vieme povedať o 5-kách v tabuľke. V riadku a stĺpci, kde je 4-ka, je jednoznačne dané, kde budú 5-ky (ostatné políčka sú obsadené, alebo blokované inou 5-kou). Ak ich doplníme, tak sa zase dostávame do problému s umiestnením 5-ky na diagonálu (ani na jednu ju nemáme kam dať).

Skóre nemôže byť ani 19, **ako to vyzerá s 18-tkou?** 18 vieme dostať buď ako tri 5-ky a 3-ku, alebo dve 5-ky a dve 4-ky.

V prípade $3 \cdot 5 + 3$ budeme postupovať rovnako ako pri skóre 19, iba 4-ku nahradíme 3-kou. Úplne rovnakým postupom vypĺňania 5-iek zistíme, že ich nemáme kam dať a teda týmto spôsobom to nepôjde.

Pre $2 \cdot 5 + 2 \cdot 4$ rozlíšime 4 prípady (resp. 6 prípadov, ale 4 z nich sú po dvoch symetrické):

				4
4			?	
	4	?		
	?	5		
?			5	

Tabuľka 5: Skóre 18 (4 vedľa seba na kraji)

1. **4-ky sú pri sebe na kraji** (viď. tabuľka 5) Ak sa pozrieme na vyznačenú uhlopriečku, štvorka môže byť jedine vpravo hore. Potom ale nemáme kam dať 5-ku na tejto uhlopriečke.
2. **4-ky majú medzi sebou jednu 5-ku** Tento prípad sa dá vyriešiť podobne, ako keď sú 4-ky pri sebe. Na tej istej uhlopriečke bude 4-ka môcť byť jedine vpravo hore a potom na nej už nezostane miesto pre 5-ku.
3. **4-ky sú vedľa seba v strede** (viď. tabuľka 6) Na uhlopriečke nad skóre môže byť 5-ka len v strede. Následne vieme jednoznačne doplniť 5-ky v druhom stĺpci a v piatom stĺpci (ostatné políčka sú blokované- na riadku, na stĺpci alebo na diagonále).

?	**5**			
5	?			
	4	**5**		
		4	?	**5**
			5	?

Tabuľka 6: Skóre 18 (4 v strede)

4-ky na vyznačenej uhlopriečke môžu byť len v rohoch.

- Ak bude 4-ka vľavo hore, v piatom riadku už nevieme doplniť 4-ku.
- Ak bude 4-ka vpravo dole, v prvomom stĺpci opäť nemáme kam dať 4-ku.

?	**4**			
4				
	5	**4**		
		5		**4**
			4	?

Tabuľka 7: Skóre 18 (4 na krajoch)

4. **4-ky sú na oboch krajoch** (viď. tabuľka 7) Postupovať môžeme úplne rovnako, ako v predchádzajúcom prípade, iba v našich úvahách vymeníme 4-ky a 5-ky.
   Inými slovami, doplníme 4 do uhlopriečky nad skóre, a do druhého a piateho stĺpca. 5 na uhlopriečke môže byť len v rohoch. Rovnako ako minule, v oboch prípadoch nebudeme vedieť pridať 5-ku do piateho riadku, alebo stĺpca.

Tým sme vyčerpali všetky možnosti pre 18 a preto platí, že **skóre je najviac 17**.

Ak by sme rovnakým spôsobom chceli dokazovať, že to nebude ani 17, poriadne by sme sa natrápili, keďže je to už celkom dosť možností.

Po chvíli šikovného skúšania a uvažovania, môžeme ale nájsť jedno z možných vyplnení, kedy je skóre naozaj 17. Napríklad ako v tabuľke 8.

4	1	3	2	5
3	5	1	4	2
5	4	2	3	1
2	3	5	1	4
1	2	4	5	3

Tabuľka 8: Jedno z riešení pre skóre 17

Uvedené vyplnenie je len jedno z mnohých, ktoré sa dali nájsť ako dôkaz, že 17 naozaj vieme dosiahnuť.
Odpoveď: Maximálne skóre je 17.

Prémia (opravoval MaťoPaťo):

Zadanie: Skladáme dieliky domina. Máme všetky dieliky, na ktorých sú len čísla od 0 po 5 (vrátane), okrem tých s dvojicami rovnakých čísel (tj. okrem $[1, 1], [2, 2], ...$). Skladáme ich ako tradičné domino tak, že tvoríme hadíka, ktorý sa nikde nerozvetvuje, ani nevytvára okruh (nedotýka sa sám seba hranami dielikov, ale rohmi môže). Za každý spoj vo forme $[x, y][y, z]$ dostávame $x \cdot z$ bodov. Koľko najviac bodov môžeme získať, ak nemusíme použiť všetky dieliky, ale každý máme len raz?

Pozn. V štandardnej dominovej sade pre každú dvojicu čísel existuje len jeden dielik, ktorý ich obsahuje (celá sada má 28 dielikov). (tj. $[1, 2]$ a $[2, 1]$ je ten istý dielik a teda aj v tejto úlohe ho máme len raz)

Riešenie: Máme tu opäť prémiu a teda sa poďme spoločne pozrieť na to, ako ste najlepšie vyriešili túto úlohu. Najlepšie riešenie využíva, tak ako nám to zadanie dovoluje, len 13 dielikov a vyzerá ako takýto had:

$$[5,0][0,4][4,1][1,2][2,0][0,3][3,1][1,5][5,3][3,4][4,5][5,2][2,4]$$

Súčet bodov, ktoré dostaneme za takéhoto hadíka je 115.
Odpoveď: Zatiaľ nájdené najlepšie riešenie je za 115 bodov.
Komentár: Najlepších riešení prémie bolo 8 a boli ohodnotené 8 bodmi.