

Zadania 2. kola letnej série 2015/2016

Termín: 18.04.2016

Naša adresa: Riešky, Mgr. Viera Babišová, Gymnázium Grösslingová, Grösslingová 18, 811 09 Bratislava 1

Elektronické riešenia: <http://riesky.sk/>

Dnes ráno som sa zobudila výnimočne skoro. Nebolo to však tým, že by som sa ponáhľala do školy. Začínali sa totiž jarné prázdniny. Rodičia sa rozhodli ma poslať za babkou Arabelou na vidiek, aby som nebola celý týždeň zavretá doma. Poznám sa a tak som si kufor zabalila pre istotu dva dni dopredu, aby som si určite nič nezabudla. Pripravila som si dva sendviče na cestu a jeden z nich som hneď aj zjedla. Zbalila som si zvyšok svojho proviantu a pred odchodom ešte zakričala: „Zbohom!“ Nechcelo sa mi zdĺhavo sa lúčiť a počúvať tie poučenia, že sa nemám dávať do reči s cudzími ľuďmi, že si mám na seba dávať pozor... Tiež som nechcela mamu rušiť, pretože si už teraz plánovala rušný spoločenský život na tento týždeň.



Príklad č. 6: Päť tvojich najlepších priateľov si naplánovalo oslavu v takmer rovnaký čas v ten istý deň! Máš svojich priateľov rovnako rád a chcel by si na ich oslavách stráviť presne rovnako veľa času. Tu sú termíny ich osláv:

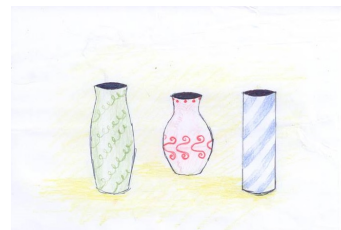
1. oslava: 12 : 00 - 16 : 00
2. oslava: 15 : 00 - 17 : 00
3. oslava: 13 : 00 - 17 : 00
4. oslava: 12 : 00 - 15 : 00
5. oslava: 13 : 00 - 15 : 00

Na presun medzi oslavami je tiež potrebný nejaký čas. Ten si môžeme vypočítať ako rozdiel v očíslovaní osláv krát 15 minút. Teda cesta z druhej oslavy na tretiu bude trvať 15 minút, zatiaľ čo z druhej oslavy na piatu až 45 minút. Na oslavu prídeš už o 12 : 00 (teda na 1. alebo 4.) a nemôžeš mať žiadne prestoje. Môžeš iba cestovať alebo oslavovať. Koľko najviac času môžeš stráviť na jednej oslave, aby si bol na každej rovnako dlho?

„Nezabudni si kufor!“ zakričala na mňa mama späť. Naozaj, kufor som si skoro zabudla. Zobrala som si teda aj ten, skontrolovala, či mám naozaj všetko a vybrala som sa smerom ku stanici. Našťastie bývame blízko a tak som nemusela cestovať mestskou hromadnou dopravou. Pri vstupe do priestorov stanice ma takmer okamžite zasiahla aromatická kombinácia najrôznejších pachov a vôní od rozliatej kofoly až po agresívne čistiace prostriedky. Keďže som zatiaľ nemala kúpený lístok, zamierila som k okienku pre cestujúcich. Platila som mincami, veď času predsa dost...

Príklad č. 1: Mám tri rovnaké mince, ktorých hrúbka je 2mm a polomer 9mm . Každá z nich má v strede krížik a na obvode dve štrbiny, ktoré sú umiestnené presne oproti sebe. Všetky tri položíme do radu tak, aby sa štrbinami dotýkali. Teraz vezmeme mincu najviac vľavo a položíme ju tak, aby sa krížik na jej spodnej strane presne dotýkal ľavej štrbiny na strednej minci (minca sa zároveň stále dotýka aj zeme, je nakrivo). Rovnako to spravíme aj s mincou, ktorá je najviac vpravo. Dotýkajú sa ľavá a pravá minca? Prečo je to tak?

Strčila som si cestovný lístok do vrečka a išla sa pozrieť k tabuli príchodov a odchodov. Cestou som si ešte stihla kúpiť balíček žuvačiek a kým som naozaj došla do hlavnej haly, už som nafukovala obrovské ružové bubliny. Zopár starších dám na mňa zhrozene pozeralo, no veľmi som sa tým netrápila. Koniec koncov, ja mám prázdniny a idem za babkou Arabelou. Tam hlúpe



spoločenské pravidlá neplatia. Žuvačkové bubliny mám okrem iného naozaj rada. Hľadala som na tabuli svoj vlak. Stále mi ostávalo aspoň 15 minút. Dnes išlo všetko až podozrivo hladko. Potom som uvidela Lámača. „Ahoj!“ rozbehla som sa za ním: „Čo ty tu robíš? Kam cestuješ?“ „Ahoj. Necestujem, len som si prišiel obzrieť stanicu kvôli projektu do školy,“ odvetil. Zvedavo som sa ho opýtala, čo je to za projekt. „Máme vymyslieť nejaký spôsob zveľadenia verejného priestranstva. Tak mi napadalo, že by sa sem hodili nejaké pekné vázy.“

Prémia: Máme 9 váz poukladaných do štvorca 3×3 , Lámač im nameral objemy v litroch tak, ako v tabuľke 1. Rozhodol sa zistiť, na koľko preliatí dokáže odmerať 1 liter. Prelievať z vázy do vázy môže iba medzi susediacimi vázami. Pričom platí, že celý obsah vázy musí preliať. Pokiaľ vo váze nie je dostatok voľného miesta, naleje do nej toľko, aby bola po preliatí plná. Na začiatku je plná len váza vpravo v strede. Koľko najmenej preliatí musí Lámač spraviť, aby v niektorej z váz ostal 1 liter? Ako to spraví?

8	11	13
6	19	43
13	8	3

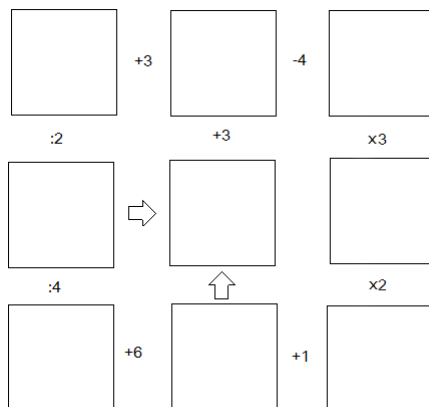
Tabuľka 1: objemy váz

„Tie vázy sa sem naozaj hodia,“ skonštatovala som napokon. Začali sme diskutovať o našich plánoch na prázdniny. Dozvedela som sa, že sa spolu s Jumačom chodí korčuľovať. Zarozprávali sme sa a ja som si ani nevšimla, že môj vlak už pristavil na koľaj číslo 2. Ani som sa nerozlúčila a vystrelila som smerom k nástupištiu. Snažila som sa nájsť čo najrýchlejšiu cestu, no predvídať, kde sa vynorí ďalšia prekážka, bolo takmer nemožné.

Príklad č. 3: Mišo dostal papier s deviatimi štvorčkami. Mal do nich dopísať prirodzené čísla od 1 do 9, každé práve raz. Aby vedel, ako to má urobiť, boli medzi každými dvoma stranou susediacimi štvorčkami šípky s počtovými operáciami.

Každá šípka buď pripočítava, odpočítava, násobí, alebo delí prirodzeným číslom číslo v štvorčeku, z ktorého vedie šípka. Výsledok tejto operácie je zapísaný v štvorčeku, do ktorého šípka smeruje.

V noci mu však niekto zo zadania vymazal niektoré šípky a niektoré početové operácie. Ostalo len to, čo môžeme vidieť na obrázku 1. Pamätá si však, že určite viedla z každého, aj do každého štvorčeka aspoň jedna šípka. Aké bolo pôvodné zadanie? Ako treba doplniť čísla do štvorčekov, aby početové operácie v smere šípok dávali správny výsledok?



Obr. 1: Príklad č. 3

Preplietala som sa medzi ľuďmi a vyklúčovala až na nástupište. Mala som naozaj šťastie, že som v tej rýchlosti trafila to správne. V poslednej sekunde som naskočila do dverí vlaku, ktoré sa už začínali zatvárať. Z toho behu sa mi zatočila hlava a pred očami som videla hviezdičky a trojuholníčky.

Príklad č. 7: Daný je trojuholník ABC . Na priamke BC sa nachádzajú body X a Y , také že $|XY| + (|AB| + |AC|)/2 = \text{obvod}/2$. Aký je obsah štvoruholníka $S_c S_b XY$, ak obsah trojuholníka ABC je x . (S_c a S_b označujú stredy strán b a c).

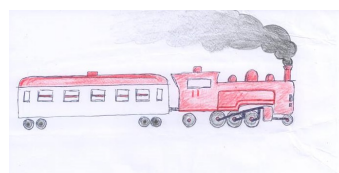
Zosunula som sa na najbližšie sedadlo a chytala dych. Skontrolovala som si, či mám ešte stále vo vrecku lístok. Bol tam. Vlak sa začal pomaly rozbiehať a ja som čakala na sprievodcu. Stanica sa vzdďaľovala, mesto nahradili výhľady na polia. V tomto ročnom období bola väčšina holá, no na niektorých už začínali rašiť prvé riadky plodín. Na lúke sa na prvej tráve páslo stádo čierno-bielych ťľakatých kráv.

Príklad č. 5: Za rovnaké písmená doplňte rovnaké cifry a za rôzne písmená rôzne cifry tak, aby platila rovnosť $KRAVA + KRAVA = MLIEKO$, pričom K reprezentuje nepárnu cifru.

Neviem ako dlho som sa takto pozerala von z okna. Pohľad na kravy vo mne časom vyvolal chuť na čokoládu. Žiadnu som ale nemala, tak som si išla radšej čítať knihu. Akýsi nesympatický muž prešiel okolo mňa, ruky mal vo vrecku. Cestou zhodil moju tašku a ani sa nezastavil. Situácia sa však stala ešte pochmurnejšou. Začalo pršať. Uspávajúci zvuk dopadajúcich kvapiek bol iba občas prerušený jedným z hráčov šachu na vedľajších sedadlách.

Príklad č. 2: Umiestňujem figúrky na šachovnicu 4×4 . Prvú som umiestnil na políčko $A2$. Umiestním ešte druhú. Potom umiestním zábranu rozmeru 1×1 . Zábrana zabráňuje veži hýbať sa cez ňu ďalej. Následne súper umiestni vežu, ktorá sa hýbe ako veža v šachu, teda buď horizontálne alebo vertikálne o ľubovoľný počet políček. Môže však preskočiť figúrku, no zábranu nie (môže sa rozhodnúť, že prejde za figúrku bez toho, aby ju vyhodila). Koľko mám možností na rozmiestnenie druhej figúrky a jednej zábrany, aby súper bez ohľadu na umiestnenie veže neohrozoval obidve figúrky? Koľko, ak má moja zábrana veľkosť 2×1 ? Ohrozovať figúrku znamená viesť ju vyradiť v nasledujúcom ťahu.

„Pôsobí to veľmi sklúčujúco, takýto tmavý deň,“ pomyslela som si. Aby toho nebolo málo, vlak začal spomaľovať. Mala som pocit, že ideme krokom. To ma hnevalo. Celý týždeň som sa k babke tešila a týmto tempom k nej vlak dorazí až večer. Na ďalšej stanici vlak stál neobvykle dlho a na tú ďalšiu ani nedošiel. Zostal stáť uprostred poľa a ja som sa striedavo dívala na výhľad z okna a hodinky. „Zaujímalo by ma, prečo stojí,“ hovorila som si a začínala som byť nervózna. Keď som nervózna, vždy cítim potrebu trhať papieriky.



Príklad č. 4: Strihám papiere na 3 druhy útvarov: štvorec 2×2 , obdĺžnik 1×2 a štvorec 1×1 . Každý z nich má určitú kladnú bodovú hodnotu (celočíselnú), a zároveň obsahovo väčší útvar nemusí byť nutne za viac bodov. Som v tom fakt dobrá - každý papier rozstrihám tak, že za vzniknuté tvary získam najväčší možný počet bodov. Za papier 3×3 som získala 19 bodov, za 4×4 o 21 bodov viac a za papier 5×5 o ďalších 17 bodov viac. Aká je bodová hodnota jednotlivých útvarov?

To som ešte netušila, že situácia začne byť naozaj vážna. Práve, keď som sa rozhodla trochu si vystrieť nohy a poprechádzať sa, okolo mňa prebehol vysoký muž a odsotil ma rovno na stolík. Vydýchla som z pľúc asi všetok vzduch a zosunula sa na sedadlo. Asi mi nebolo súdené venovať sa športovým aktivitám. Vytiahla som si svoju zemľu a zagratalovala som si k vlastnému rozhodnutiu predsa len si vziať niečo na jedenie. Potom okolo mňa kráčali dvaja vážne vyzerajúci muži. Nastražila som uši a počúvala, čo hovoria.

Príklad č. 8: Zavolali sme vás, pán detektív, kvôli tomuto zložitému prípadu.

Stala sa krádež. Chceme odhaliť zlodēja pomocou spôsobu jeho pohybu.

V tomto meste sa každý hýbe takto: Začína na nejakom mieste s nejakým číslom. Najprv sa premiestni tak, že svoje číslo miesta vynásobí prirodzeným číslom k . Tak sa dostane na druhé číslo z radu čísel jeho cesty. Potom sa premiestni odčítaním prirodzeného čísla b od svojho aktuálneho čísla, dostane sa tak na tretie číslo. Vynásobením tretieho čísla, číslom k sa dostane na štvrté číslo svojej postupnosti. Na piate číslo jeho postupnosti sa dostane odčítaním čísla b od štvrtého čísla. Striedaním týchto krokov pokračuje ľubovoľne dlho.

Vyšetrovanie nás doviedlo k nasledujúcim záverom:

- Po krádeži zloděj vyskočil oknom z domu. Jeho začiatkové číslo muselo byť jednociferné, o 1 väčšie, ako nejaké prvočíslo.
- V osudnej noci sme mali hliadky skoro všade. Jediný spôsob, ako mohol zloděj nepozorovane prekĺznuť bol, že v postupnosti čísel, ktoré navštívil, sa postupne striedali párne a nepárne čísla.
- Psy sledovali jeho pachovú stopu. Zistili sme, že prvých sedem čísel postupnosti malo každé menej ako 4 cifry. Týchto 7 čísel sa dá zapísať len pomocou piatich cifier.
- Zloděj sa nám dokonca vysmieva a poslal nám takýto odkaz: „Ak by som šiel svojou postupnosťou donekonečna, tak sa pomer počtu jej čísel, ktoré nie sú deliteľné 3, a všetkých čísel postupnosti bude blížiť k $\frac{1}{2}$. Pre prvých ľubovoľne veľa čísel mojej postupnosti je počet čísel deliteľných 3 väčší, ako počet nedeliteľných.“
- Analýza odtlačkov prstov ukázala, že $k > b$.

Na akom čísle zloděj začínal? Čomu sa rovná k a b ?

Krádež! Tak toto už bolo naozaj veľa aj na mňa a dúfala som, že vlak sa čoskoro pohne. Prosby boli vyslyšané, pretože vlak sa so škripaním naozaj začal hýbať a blížil sa k babkinej stanici. Akurát sa začalo stmievať. Vzala som si kufor a keď vlak zastal, vystúpila som. Lenže stanica nikde, všade iba pole. Vlak sa opäť pohol. A tak som zostala stáť uprostred koľají, okolo mňa polia a nado mnou mesiac.

Príklad č. 9: Pri pozorovaní mesiaca mi napadlo, že spočítam jeho obsah. Mesiac je rovinný útvar, ktorý vznikne výsekom dvoch kružníc, ktoré majú dva spoločné body. Teda je to tá časť menšej z dvojice kružníc, ktorá nie je vo vnútri väčšej.

Keby som sa postavil do stredu menšej kružnice, videl by som rohy mesiaca pod uhlom 90° . Keby som sa postavil do stredu väčšej kružnice, videl by som ich pod uhlom 60° . Polomer väčšej kružnice je 20. Aký môže byť obsah mesiaca?