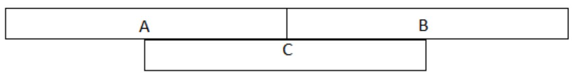
Vzorové riešenia 2. kola letnej série 2015/2016

Príklad č. 1 (opravovala Zuzka):

Zadanie: Mám tri rovnaké mince, ktorých hrúbka je $2mm$ a polomer $9mm$. Každá z nich má v strede krížik a na obvode dve štrbiny, ktoré sú umiestnené presne oproti sebe. Všetky tri položíme do radu tak, aby sa štrbinami dotýkali. Teraz vezmeme mincu najviac vľavo a položíme ju tak, aby sa krížik na jej spodnej strane presne dotýkal ľavej štrbiny na strednej minci (minca sa zároveň stále dotýka aj zeme, je nakrivo). Rovnako to spravíme aj s mincou, ktorá je najviac vpravo. Dotýkajú sa ľavá a pravá minca? Prečo je to tak?

Riešenie: Predstavme si, že by sme mince dali do pozície ako v zadaní, ale nalepili by sme ich na mincu v strede (Obr. 1). Body A a B označujú miesta, kde ležia krížiky krajných mincí na štrbinách strednej. Pretože priemer kružnice je rovný dvojnásobku jej polomeru, bude platiť aj to, že v bode C leží krížik strednej mince a štrbiny ľavej aj pravej mince. V tomto bode sa mince teda dotýkajú.



Obr. 1: Zlepené mince

Ak by zrazu lepidlo prestalo účinkovať, padli by mince do polohy, ako je napísané v zadaní. Aby sa stále dotýkali by muselo platiť, že body A, B a C tvoria trojuholník, teda by musela platiť aj trojuholníková nerovnosť. Tá však hovorí, že súčet každých dvoch strán trojuholníka musí byť väčší ako tá tretia. Avšak v našom prípade platí $|AC|+|BC| = |AB|$ (keďže $|AC|$ aj $|AC|$ sú polomermi kružnice a $|AB|$ je jej priemer). Preto trojuholníkova nerovnosť nemôže byť splnená.

Odpoveď: Ľavá a pravá minca sa nedotýkajú.

Komentár: Riešenie pomocou trojuholníkovej nerovnosti je pomerne jednoduché a jasné. Všetci, ktorí ste príklad riešili takto, ste to mali správne. Ak však používate kružnice, treba si dať pozor na to, či ich správne definujete. Viacerí z vás ste používali kružnice, po ktorej sa pohybujú tie dva zaujímavé kraje mince. Bohužiaľ, nestačí skonštatovanie, že ak sa tieto dve kružnice už stretli na povrchu strednej mince, tak sa znovu už nestretnú. Dve kružnice môžu mať totiž aj dva spoločné body. V tomto prípade je potrebné zadefinovať aj to, že súčet polomerov týchto dvoch kružníc je rovný vzdialenosti ich stredov. Z toho je jasné, že majú práve jeden spoločný bod.

Príklad č. 2 (opravoval Tomáš):

Zadanie: Umiestňujem figúrky na šachovnicu 4×4. Prvú som umiestnil na políčko $A2$. Umiestnim ešte druhú. Potom umiestnim zábranu rozmeru 1×1. Zábrana zabraňuje veži hýbať sa cez ňu ďalej. Následne súper umiestni vežu, ktorá sa hýbe ako veža v šachu, teda buď horizontálne alebo vertikálne o ľubovoľný počet políčok. Môže však preskočiť figúrku, no zábranu nie (môže sa rozhodnúť, že prejde za figúrku bez toho, aby ju vyhodila). Koľko mám možností na rozmiestnenie druhej figúrky a jednej zábrany, aby súper bez ohľadu na umiestnenie veže neohrozoval obidve figúrky? Koľko, ak má moja zábrana veľkosť 2×1? Ohrozovať figúrku znamená vedieť ju vyradiť v nasledujúcom ťahu.

Riešenie: Zo začiatku sa budeme venovať len možnosti so zábranou 1×1. Prvý fakt, ktorý si môžeme všimnúť je, že ak máme figúrky na $A2$ a na $D4$, vzniknú dve pozície, na ktoré keď sa umiestni veža, tak bude ohrozovať obe figúrky. Tieto pozície sú na $D2$ a na $A4$, pričom ak ochránime figúrky pri jednej z pozícií, na druhej ich bude ešte stále ohrozovať. Rozmiestnenie môžeme vidieť v nasledújúcej tabuľke 1.

Jediný spôsob rozmiestnenia (ak máme zábranu 1×1), aby veža neohrozovala obe figúrky, je taký, kde obe figúrky sú v jednom riadku alebo stĺpci. Pri takomto rozmiestnení platí, že zábrana musí byť medzi

	F_1		P_2
	P_1		F_1

Tabuľka 1: Rozmiestnenie figuriek

figúrkami, alebo musia byť figúrky hneď veďla seba tak, že z jednej strany sú ohraničené okrajom a z druhej zábranou.

Ak si zoberieme možnosť kedy sú všetky v riadku A, máme len 2 možnosti. Buď môžeme dať figúrky na $A1$ a $A2$ a zábranu na $A3$, alebo figúrky na $A2$ a $A4$ a zábranu medzi nich na $A3$.

Pri stĺpci 2 máme dokopy 4 možnosti. Prvá, keď máme figúrky veďľa seba na $A2$ a $B2$ a zábranu na $C2$. Zvyšné tri sú, ak dáme zábranu medzi figúrky. To je, ak dáme druhú figúrku na $C2$ a zábranu na $B2$, alebo druhú figúrku na $D2$ a zábranu buď na $B2$, alebo $C2$.

Pri zábrane 1×1 máme dokopy 6 možností.

Zábrana 2×1 má podobné pravidlá, s jedným rozdielom. Figúrky môžeme umiestniť aj do dvoch susedných stĺpcov alebo riadkov. To napríklad tak, ako môžeme vidieť v tabuľke 2.

	F_1	P_2	
	Z	Z	
	P_1	F_1	

Tabuľka 2: Rozmiestnenie figuriek v dvoch stĺpcoch

Z toho vyplýva, že keď budeme ukladať do riadkov, vzniknú nám 4 možnosti. A to ak máme zábranu na $A3$-$B3$, máme 3 možnosti kam dať druhého panáčika: $A1$, $A4$, $B4$. Štvrtou možnosťou je, keď máme zábranu na $A3$-$A4$, vtedy vieme dať druhú figúrku na $A1$.

Pri dávaní do stĺpcov je to trocha komplikovanejšie. Vieme umiestňovať do stĺpcov 1, 2 a 3. Ak dáme zábranu na pozíciu $C1$-$C2$, tak je to súmerná možnosť ku $C2$-$C3$. A to isté platí aj pri pozícii $B2$-$B3$ a $B1$-$B2$.

Preto stačí vyriešiť len jednu pozíciu z dvojice a výsledok vynásobiť dvoma. Pri $C1$-$C2$ máme 3 možnosti pre umiestnenie druhej figúrky a to sú $B2$, $D1$ a $D2$. A ten istý počet možností máme potom aj pre $C2$-$C3$.

Pri $B1$-$B2$ máme 4 možnosti umiestnenia druhej figúrky a to sú $C1$, $C2$, $D1$ a $D2$. Pri $B2$-$B3$ máme rovnaký počet.

Ostávajú už len dve možnosti a to sú keď zábrana je na $B2$-$C2$ a druhá figúrka je na $D2$ a keď zábrana je na $C2$-$D2$ a druhá figúrka je na $B2$.

Celkovo máme 20 možností.

Odpoveď: Pri zábrane s rozmerom 1×1 máme 6 možností rozmiestnenia, a pri zábrane s rozmermi 2×1 máme 20 možností.

Komentár: Veľa z vás našlo správne riešenie, ale častá chyba bola, že ste neuviedli ako ste sa k nemu dostali.

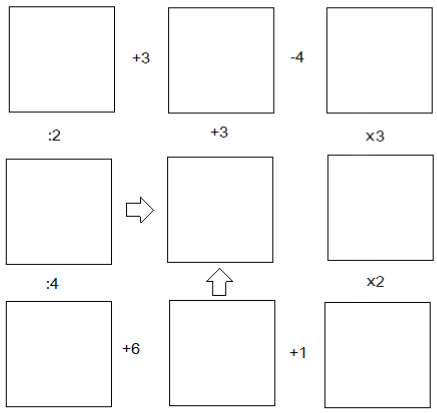
Príklad č. 3 (opravovali Lámač, Sára, Ľubo):

Zadanie: Mišo dostal papier s deviatimi štvorčekmi. Mal do nich dopísať prirodzené čísla od 1 do 9, každé práve raz. Aby vedel, ako to má urobiť, boli medzi každými dvoma stranou susediacimi štvorčekmi šípky s počtovými operáciami.

Každá šípka buď pripočítava, odpočítava, násobí, alebo delí prirodzeným číslom číslo v štvorčeku, z ktorého vedie šípka. Výsledok tejto operácie je zapísaný v štvorčeku, do ktorého šípka smeruje.

V noci mu však niekto zo zadania vymazal niektoré šípky a niektoré počtové operácie. Ostalo len to, čo môžeme vidieť na obrázku 2. Pamätá si však, že určite viedla z každého, aj do každého štvorčeka aspoň

jedna šípka. Aké bolo pôvodné zadanie? Ako treba doplniť čísla do štvorčekov, aby počtové operácie v smere šípok dávali správny výsledok?
Riešenie:



Obr. 2: Príklad č. 3

V spodných dvoch políčkach (štvorčekoch) prvého stĺpca môžu byť použité len čísla $1, 2, 4, 8$ s ohľadom na operáciu $\div 4$ medzi týmto políčkom a políčkom nad ním. Môžu tam byť iba jednociferné čísla deliteľné štyrmi, aby sme mohli operáciou $\div 4$ vytvoriť menšie jednociferné číslo. To sú práve 4 a 8 a ku nim patriace výsledky 1 a 2. Smer šípky tejto operácie nám zároveň určí, akým smerom bude ukazovať šípka medzi týmto políčkom a druhým políčkom tretieho riadka (kedže do tohto rohového políčka musí šípka viesť aj vychádzať). Ak by v tomto rohovom políčku bola 8, viedla by doň šípka $+6$. Takže v druhom políčku tretieho riadku by bola 2. Tá by ale bola použitá aj nad rohovým políčkom, čo nemôže. Preto 8 v tomto políčku nebude. Ak by v tomto políčku bola 4, v druhom políčku tretieho riadku by bolo číslo -2, čo sa nemôže stať. Preto 4 v tomto políčku nie je. Ak by v tomto políčku bola 2, nad ňou by pred operáciou $\div 4$ bola 8. Zároveň by aj v druhom políčku tretieho riadka po operácií $+6$ bola 8. Preto v tomto políčku taktiež nebude ani 2, preto v ňom musí byť 1. V prvom políčku druhého riadku je teda 4 a v druhom políčku tretieho riadku je 7.

Aby do prvého políčka druhého riadku viedla šípka, musí z políčka nad ním ísť šípka práve sem (zvyšné dve totiž vedú z tohto políčka). Potom kvôli operácií $\div 2$ smerujúcej na 4 bude v prvom políčku prvého riadku číslo 8.

V treťom políčku tretieho riadku bude kvôli operácií $+1$ buď 6 alebo 8, podľa smeru šípky. 8 sme už ale použili, teda v treťom políčku tretieho riadku bude 6. Z tohoto políčka musí viesť aspoň jedna šípka. Máme už len jednu na výber, takže v treťom políčku druhého riadku bude 3 kvôli operácií $\times 2$ vedúcej na 6.

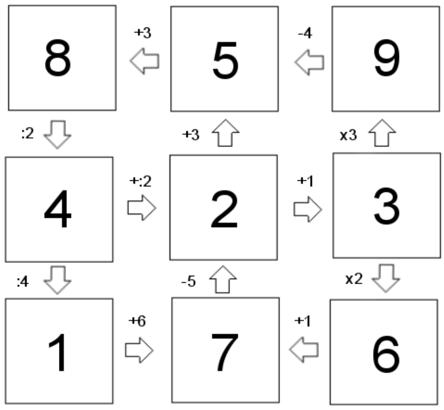
Nepoužili sme už iba čísla $2, 5, 9$. V treťom políčku prvého riadku môže byť buď 1, ak šípka vedie na 3, alebo 9, ak šípka vedie z 3. 1 sme už však použili, preto tu bude 9. Do druhého políčka prvého riadku treba doplniť 5, aby šípka -4 viedla z 9, z ktorej musí jedna šípka viesť. Zvyšnú 2 doplním do druhého políčka druhého riadka. Smerom nahor z 2 bude viesť šípka $+3$ (na 5), zo 7 bude k 2 viesť operácia -5. Zo 4 bude na 2 viesť buď operácia -2, alebo $\div 2$. Z 9 bude na 5 viesť operácia -4.

Do tretieho políčka druhého riadku musí viesť šípka z druhého políčka tohto riadku, kedže zvyšné dve z neho vedú preč. Preto na šípke medzi 3 a 2 je operácia $+1$.

Takto sme sa dostali k pôvodnému zadaniu. Pôvodné zadania teda mohli byť dve, záleží na tom, či v ňom bola operácia -2, alebo $\div 2$ medzi 4 a 2. Zároveň sme si týmto spôsobom overili, že iné doplnenie čísel a šípok medzi ne neexistuje. Obe pôvodné zadania sú znázornené na obrázku.

Bodovanie: Dostali sme 45 riešení, pričom priemerne sme za príklad dali zhruba 6 boda. Okolo dvoch tretín riešení malo nadpriemerný počet bodov.

Komentár: S príkladom ste si poradili každý po svojom. Jedným z problémov bolo, že ste nenašli všetky operácie pôvodného zadania, na čo sme sa však v úlohe pýtali. Niektorí si neuvedomili, že pôvodné zadania mohli byť dve, iný ste zasa našli aj riešenia nevyhovujúce podmienkam zadania. Niektorí ste skúšali jednotlivé možnosti dopĺňania čísiel do políčok, no nevyskúšali ste všetky možnosti.



Obr. 3: Pôvodné zadanie

Príklad č. 4 (opravovali Lámač, Aďa):

Zadanie: Strihám papiere na 3 druhy útvarov: štvorec 2×2, obdĺžnik 1×2 a štvorec 1×1. Každý z nich má určitú kladnú bodovú hodnotu (celočíslenú), a zároveň obsahovo väčší útvar nemusí byť nutne za viac bodov. Som v tom fakt dobrá - každý papier rozstrihám tak, že za vzniknuté útvary získam najväčší možný počet bodov. Za papier 3×3 som získala 19 bodov, za 4×4 o 21 bodov viac a za papier 5×5 o ďalších 17 bodov viac. Aká je bodová hodnota jednotlivých útvarov?

Riešenie: Pri strihaní ma zatiaľ nebude nezaujímať až tak veľmi koľko bodov dostanem za útvar, ale skôr výhodnosť hodnoty útvarov na počet políčok. Útvary si budem môcť zoradiť podľa efektívnosti od najvýhodnejšieho po najmenej výhodný. Zatiaľ nevylučujem možnosť, že by dva útvary mohli byť rovnako výhodné alebo s rovnakou hodnotou.

Pozrime sa na prípad, kedy by bolo najvýhodnejšie strihať na štvorce 1×1. Potom štvorec 3×3 rozstrihám na 9 útvarov. Nielenže ich hodnota $(\frac{19}{9})$ nie je celočíselná, no hodnota kúsku takto získaná rozstrihaním väčších štvorcov 4×4 a 5×5 je rozdielna. Preto určite nebude najvýhodnejšie strihať na štvorce 1×1.

Ak by bolo najvýhodnejšie strihať na útvary 2×1, potom štvorec 4×4 rozstrihám na 8 obdĺžnikov s bodovou hodnotou $40/8 = 5$. Štvorec 3×3 by som vedela rozstrihať na 4 obdĺžniky a jeden štvorček, pričom už len hodnota získaných obdĺžnikov by bola 20, čo je viac, než som vedela získať ideálnym strihaním.

Ostáva teda jedine možnosť, že je najvýhodnejšie strihať na útvary 2×2. Štvorec 4×4 rozstrihám na 4 takéto štvorce, každý s bodovou hodnotou 10. Stále však neviem, či sú výhodnejšie útvary 2×1 alebo 1×1. Ak by bol druhý najvýhodnejší útvar 1×1, potom by som v štvorci 3×3 mala 5 útvarov 1×1. Ich hodnota by podobne ako v prvom prípade bola neceločíselná $(\frac{9}{5})$. Tiež by nesedela s bodovou hodnotou získanou rozstrihaním štvorca 5×5.

V štvorci 3×3 teda budú okrem útvaru 2×2 dva útvary 2×1 a jeden 1×1, v 5×5 sú 2 obdĺžniky 2×1 naviac. Rozdiel hodnôt týchto štvorcov (bez štvorcov 2×2), 8, teda zodpovedá týmto 2 obdĺžnikom, čiže 1 obdĺžnik má hodnotu 4. Z tohoto si ľahko dopočítam hodnotu štvorčeka 1×1, čo je 1.

Odpoveď: 2×2 útvar má hodnotu 10, 2×1 hodnotu 4 a 1×1 hodnotu 1.

Bodovanie: Dostali sme 49 riešení, pričom priemerne sme za príklad dali zhruba 6.3 boda. Skoro tretina riešení bola desaťbodová.

Komentár: S príkladom sa väčšina z vás popasovala dobre. Najčastejším problémom bolo nedostatočné zdôvodnenie, prečo budú útvary v štvorcoch práve tak ako ste uvádzali, či prečo bodové hodnoty jednotlivých útvarov musia byť práve takéto. Pri skúšaní možnosti netreba zabúdať zdôvodniť, prečo ostatné netreba skúšať, alebo ich preskúšať všetky.

Príklad č. 5 (opravovala Dada):

Zadanie: Za rovnaké písmená doplňte rovnaké cifry a za rôzne písmená rôzne cifry tak, aby platila rovnosť $KRAVA + KRAVA = MLIEKO$, pričom K reprezentuje nepárnu cifru.

Riešenie: Poďme sa pozrieť na problematiku farmy, kravičiek a mlieka. Zo zadania vieme že, $KRAVA + KRAVA = MLIEKO$.

Zhrnieme si najprv nejaké fakty a pôjdeme ďalej. Keďže $A + A = O$, tak O bude zrejme párne číslo. Ďalej vidíme, že $V + V = K$ a zo zadania vieme, že K je nepárne číslo. Môžeme to teda vyriešiť iba tak, že nám zostane jednotka z predchádzajúceho výpočtu. Teda nie len že, $A+A = O$, ale aj $A > 4$, aby sme mali nejaký ten prechod cez desiatku. Pokračujeme teda ďalej. V ďalšom stĺpci máme znovu $A+A$, ale tentokrát je výsledok iný ako v prvom stĺpci. Ako sa to mohlo stať? Prechod cez desiatku? Aj tu? No dobre. Teda vieme, že aj $V > 4$ a zároveň, keďže sme preniesli jednotku, $O + 1 = E$.

Poslednou vecou, ktorú odpozorujeme len takto bude, že keďže $KRAVA$ je päťciferné číslo a $MLIEKO$ má o cifru viac, vieme, že $K > 4$ a že $M = 1$, pretože pri sčítaní dvoch jednociferných čísel dostaneme maximálne číslo 18, prípadne 19 pri prechode cez desiatku.

Zo zadania vieme, že K je nepárne, a pred chvíľkou sme sa dohodli že bude väčšie ako 4. Teda máme na K tri možnosti. Buď $K = 5$, $K = 7$, alebo $K = 9$.

Ak by $K = 5$, tak z prvého stĺpca máme $K + K = L$. Preto L môže byť buď 0, alebo 1. Lenže jednotka je už obsadená písmenom M, teda $L = 0$ a vieme, že v minulom stĺpci nebol prechod cez desiatku (teda $R < 5$).

V druhom stĺpci zľava máme $V + V = K = 5$, a zároveň $V > 4$, teda $V = 7$. Teraz sa treba pozrieť na to, aké cifry máme ešte voľné. Sú to: $2, 3, 4, 6, 8, 9$. Vieme, že O má byť párne číslo, a že $O + 1 = E$. Teda zo zostávajúcich možností to budú iba dve možnosti a to $E = 2, O = 3$ alebo $E = 8, O = 9$. V prípade prvej možnosti $A + A = E$, teda $A = 6$, a na R a I nám zostane 4 a 9. Našli sme teda riešenie $K = 5, R = 4, A = 6, V = 7, M = 1, L = 0, I = 9, E = 3$ a $O = 2$.

To, že sme našli riešenie neznamená, že máme všetky riešenia, skúšame ďalej. Ak by $E = 8$ a $O = 9$, potom $A + A = 9$ a $A > 4$, preto $A = 9$, ale to už je obsadené.

Treba prejsť aj ďalšie vetvy, ak $K = 7$ alebo $K = 9$.

Ak $K = 7$, potom $L = 4$ alebo $L = 5$ podľa toho, či máme z predchádzajúceho stĺpca prechod cez desiatku alebo nie. Ďalej z druhého stĺpca sprava vieme, že $V + V = K$, a zároveň $V > 5$ (to sme zistili už dávnejšie). Preto $V = 8$. Teraz sa ideme pozrieť znovu na dvojicu písmeniek O a E. Vieme, že $O + 1 = E$, a keďže $K = 7, V = 8$ zostávajú dvojice $O = 2$ a $E = 3$ alebo $O = 4$ a $E = 5$. $O = 6$ nevychádza, pretože potom $E = 7$, ale sedmičku sme už použili. Z rovnakého dôvodu nesedí ani $O = 8$ a $E = 9$. Ak by $O = 4$ a $E = 5$, nezostane nám žiadna možnosť na písmeno L, preto ani táto možnosť nevyhovuje. Zostáva už len $O = 2$ a $E = 3$. Potom $A = 6$ a $R + R + 1 = I$. Zostali cifry $0, 8, 9, 4, 5$. Do rovnosti s písmenom R by vyhovovala iba $R = 4$ a $I = 9$, lenže potom nemáme prechod cez desiatku a v stĺpci $K + K = L$ dostávame $L = 4$, čo nám nevyhovuje. Teda táto možnosť nám riešenie nepriniesla. Pozrieme sa na poslednú možnosť.

Ak $K = 9$, potom v stĺpci $V + V = K$ musí byť $V > 4$, a teda spolu s prechodom cez desiatku vyhovuje jedine $V = 9$, čo sa nám nepáči, keďže $K = 9$. Ani táto možnosť nám teda nedoniesla riešenie.

Odpoveď: Našli sme jedno riešenie: $K = 5, R = 4, A = 6, V = 7, M = 1, L = 0, I = 9, E = 3$ a $O = 2$

Komentár: Príklad väčšina z vás vyriešila správne. Body sme strhávali za drobné nedovysvetlenia ale aj za nedoskúšané možnosti. Ak riešite príklad skúšaním, dajte si pozor, aby ste vyskúšali všetky možnosti. Ak prestanete skúšať, keď nájdete riešenie, môže sa vám stať, že nenájdete všetky riešenia ;)

Príklad č. 6 (opravoval MaťoPaťo):

Zadanie: Päť tvojich najlepších priateľov si naplánovalo oslavu v takmer rovnaký čas v ten istý deň! Máš svojich priateľov rovnako rád a chcel by si na ich oslavách stráviť presne rovnako veľa času. Tu sú termíny ich osláv:

1. oslava: 12 : 00 - 16 : 00
2. oslava: 15 : 00 - 17 : 00
3. oslava: 13 : 00 - 17 : 00
4. oslava: 12 : 00 - 15 : 00
5. oslava: 13 : 00 - 15 : 00

Na presun medzi oslavami je tiež potrebný nejaký čas. Ten si môžeme vypočítať ako rozdiel v očíslovaní osláv krát 15 minút. Teda cesta z druhej oslavy na tretiu bude trvať 15 minút, zatiaľ čo z druhej oslavy na piatu až 45 minút. Na oslavu prídeš už o 12 : 00 (teda na 1. alebo 4.) a nemôžeš mať žiadne prestoje. Môžeš iba cestovať alebo oslavovať. Koľko najviac času môžeš stráviť na jednej oslave, aby si bol na každej rovnako dlho?

Riešenie: Predtým než začneme skúšať nejaké možnosti, pozrime sa na pár zaujímavostí, ktoré nám to uľahčia.

Prvé oslavy začínajú o 12 : 00, posledné končia o 17 : 00. Teda počas celého popoludnia máme 5 hodín, čiže 300 minút, počas ktorých môžeme iba vymetať parket alebo rýchlo bežať na ďalší.

Vďaka tomu vieme prepojiť čas, ktorý budeme na každej párty s počtom presunov. Každý presun nám trvá 15 minút, teda na oslavy nám zostane $300 - 15 \cdot P$ minút (P nazvime počet presunov, pričom presun medzi dvoma oslavami, medzi ktorými je jedna ďalšia započítame za dva atď.). Tento čas rovnomerne rozdelíme na päť párty, takže na každej párty budeme $\frac{300-15 \cdot P}{5} = 60 - 3 \cdot P$ minút.

Ďalej sa skúsme zamyslieť, v akom poradí dokážeme oslavy navštíviť. Chceme to rozbaliť čo najskôr ako sa dá, preto musíme začať buď na prvej, alebo štvrtej oslave. No a na ktorú oslavu musíme prísť ako poslednú? Predsa na nejakú, ktorá končí až o 17 : 00! Keby sme ako poslednú navštívili nejakú inú, skončila by najneskôr o 16 : 00 a my by sme mali ešte hodinu nevyužitého času. Oslavy končiace o 17 : 00 sú druhá a tretia.

Teraz teda dosť dobre vieme, ako musíme cestovať a presne vieme, koľko potom môžeme stráviť času žúrovaním. Už sme múdri, poďme skúšať!

Keby sme začali na prvej oslave, museli by sme sa nejako dostať na piatu. To chce 4 presuny. Najbližšia oslava končiaca o 17 : 00 je tretia. Ak sa na ňu chceme dostať, musíme použiť dva presuny, čo dáva spolu 6. Teda pre začiatok na prvej oslave, menej ako 6 presunov ani netreba skúšať.

6 presunov znamená $60 - 3 \cdot 6 = 42$ minút na oslavu. Ak chceme začať prvou oslavou, musíme ísť z prvej na piatu a z piatej na tretiu. Teda druhú oslavu môžeme stihnúť len tesne po prvej oslave, cestou na piatu. Teda 42 minút budeme oslavovať a 15 cestovať na druhú oslavu, kde prídeme o 12 : 57. Vtedy žiaľ druhá oslava ešte nezačala, čo kazí naše plány.

Čo ak začneme na štvrtej oslave? Musíme ísť na prvú, čo zo štvrtej zožerie aspoň 3 presuny. Chceme skončiť na druhej alebo tretej oslave, potrebujeme ešte aspoň jeden. Zároveň musíme niekedy ísť na piatu. Nesmieme na nej končiť, teda z nej musíme niekam odísť. Celé odbavenie piatej oslavy nám pridá minimálne dva presuny (to vtedy, keď na ňu pôjdeme rovno zo štvrtej).

Potom spolu dostávame znova 6 presunov a 42 minút na párty. Opäť menej ako 6 netreba skúšať. Zo štvrtej párty musíme ísť rovno na piatu, kde však znova prídeme pred jej začiatkom. Teda zjavne musíme použiť viac ako 6 presunov. Kedže aj pri začiatku na prvej aj pri začiatku na štvrtej oslave sme to nedokázali spraviť na 6 presunov, budeme musieť spraviť minimálne 7 presunov.

Pre 7 presunov a 39 minút na oslavu už dokážeme nájsť riešenie, to konkrétne toto: Začneme na prvej oslave, kde sme od 12 : 00 do 12 : 39. Odtiaľ ideme na štvrtú, kde sme 13 : 24 − 14 : 03. Odskočíme si na piatu, kde sme 14 : 18 až 14 : 57. Potom bežíme na tretiu, kde sme 15 : 27 − 16 : 06, zakončíme to na druhej oslave, kde budeme od 16 : 21 až do 17 : 00.

Ukázali sme, že na 6 ani menej presunov sa nedokážeme zúčastniť všetkých osláv. Tým, že sme našli riešenie pre 7 presunov, sme teda ukázali, že minimálny počet presunov, pre ktorý sa to dá, je 7.

Odpoveď: Na každej oslave môžeme byť najviac 39 minút.

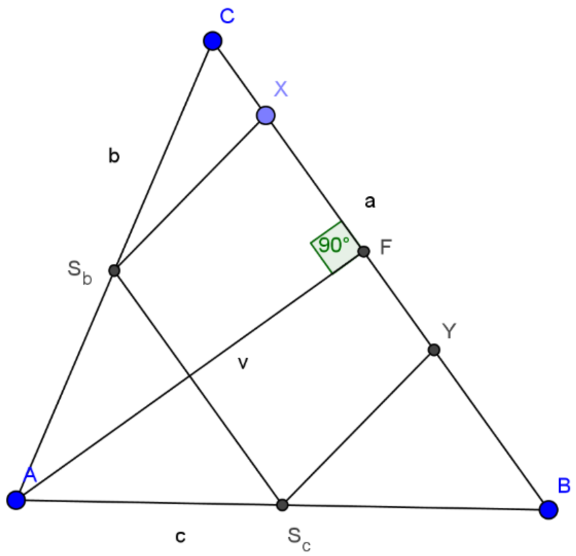
Komentár: Príklad ste riešili skoro všetci dobre, avšak pri takýchto príkladoch to zvádza len napísať výsledok a tváriť sa, že tam je aj postup. Na toto si treba dať pozor a vždy sa zamyslieť: „Nedá sa to aj lepšie?“ Odpoveď na túto otázku je potrebné ešte aj poriadne odôvodniť.

Príklad č. 7 (opravovali Lámač, Sára, Ľubo):

Zadanie: Daný je trojuholník ABC. Na priamke BC sa nachádzajú body X a Y, také že $|XY| + (|AB| + |AC|)/2 = obvod/2$. Aký je obsah štvoruholníka S_cS_bXY, ak obsah trojuholníka ABC je x. (S_c a S_b označujú stredy strán b a c).

Riešenie: Začnime tým, že si nakreslíme obrázok. Ten bude vyzerať napríklad takto:

V obrázku sme pridali štandardné označenie strán a, b, c. Taktiež sme zakreslili už aj výšku na stranu a, ktorú sme označili ako v. V riešení ju použijeme neskôr. Poďme sa teraz ale pozrieť, čo vieme o veľkosti



Obr. 4: obrázok

$|XY|$. Vieme, že:

$$\frac{|XY| + (|AB| + |AC|)}{2} = \frac{obvod}{2} = \frac{(|AB| + |BC| + |AC|)}{2}$$

Z toho dopočítame, že:

$$|XY| = \frac{|BC|}{2} = \frac{a}{2}$$

Keď S_b a S_c sú stredy strán, úsečka S_bS_c je tzv. „stredná priečka“. Teda trojuholníky $\triangle AS_bS_c$ a $\triangle ABC$ sú si podobné v pomere $1 : 2$. Pýtate sa čo to znamená po slovensky?

Stredné priečky delia trojuholník na jeho menšie verzie. Konkrétne trojuholník $\triangle AS_bS_c$ je polovičný $\triangle ABC$ (keďže všetky uhly majú rovnaké a $|AS_c|$ je polovica $|AB|$). Vďaka tomu sú všetky strany aj výšky v trojuholníku $\triangle AS_bS_c$ polovične dlhé ako im prislúchajúce v trojuholníku $\triangle ABC$.

Keďže úsečka S_bS_c je stredná priečka, tak o jej veľkosti vieme povedať, že:

$$|S_bS_c| = \frac{a}{2}$$

Taktiež platí, že stredná priečka je rovnobežná so stranou, s ktorou sa nepretína. Je nám teda jasné, že nami hľadaný útvar bude kosodĺžnik. Jeho obsah vypočítame ako obsah kosodĺžnika. Na to však potrebujeme ešte výšku tohto kosodĺžnika. To nám ale nerobí problém, kedže vieme, že stredná priečka nám výšku trojuholníka delí na polovicu. Teda výška kosodĺžnika bude $\frac{1}{2}v$. Obsah hľadaného útvaru bude:

$$S = \frac{a}{2} \cdot \frac{v}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{av}{2}$$

My ale zo zadanie vieme, že obsah $\triangle ABC$ je x, teda:

$$S_{\triangle ABC} = \frac{av}{2}$$

A tak bude obsah nášho útvaru:

$$S = \frac{1}{2}x$$

Odpoveď: Obsah štvoruholníka S_cS_bXY je $\frac{1}{2}x$

Bodovanie: Dostali sme 45 riešení, pričom priemerne sme za príklad dali zhruba 8.9 bodu. Vyše dve tretiny riešení mali nadpriemerný počet bodov.
Komentár: Príklad ste zvládli excelentne. Takmer všetci ste sa dostali k správnemu výsledku. Najčastejší problém spočíval v tom, že ste našli riešenie pre jedno konkrétne umiestnenie bodov X a Y na BC a nezovšeobecnili to pre ostatné situácie. Občas neboli dostatočne zdôvodnené kľúčové kroky vedúce k riešeniu, za čo sme strhli body.

Príklad č. 8 (opravovala Tete):

Zadanie: Zavolali sme vás, pán detektív, kvôli tomuto zložitému prípadu.

Stala sa krádež. Chceme odhaliť zlodeja pomocou spôsobu jeho pohybu.

V tomto meste sa každý hýbe takto: Začína na nejakom mieste s nejakým číslom. Najprv sa premiestni tak, že svoje číslo miesta vynásobí prirodzeným číslom k. Tak sa dostane na druhé číslo z radu čísel jeho cesty. Potom sa premiestni odčítaním prirodzeného čísla b od svojho aktuálneho čísla, dostane sa tak na tretie číslo. Vynásobením tretieho čísla, číslom k sa dostane na štvrté číslo svojej postupnosti. Na piate číslo jeho postupnosti sa dostane odčítaním čísla b od štvrtého čísla. Striedaním týchto krokov pokračuje ľubovoľne dlho.

Vyšetrovanie nás doviedlo k nasledujúcim záverom:

- Po krádeži zlodej vyskočil oknom z domu. Jeho začiatočné číslo muselo byť jednociferné, o 1 väčšie, ako nejaké prvočíslo.
- V osudnej noci sme mali hliadky skoro všade. Jediný spôsob, ako mohol zlodej nepozorovane prekĺznuť bol, že v postupnosti čísel, ktoré navštívil, sa postupne striedali párne a nepárne čísla.
- Psy sledovali jeho pachovú stopu. Zistili sme, že prvých sedem čísel postupnosti malo každé menej ako 4 cifry. Týchto 7 čísel sa dá zapísať len pomocou piatich cifier.
- Zlodej sa nám dokonca vysmieva a poslal nám takýto odkaz: „Ak by som šiel svojou postupnosťou donekonečna, tak sa pomer počtu jej čísel, ktoré nie sú deliteľné 3, a všetkých čísel postupnosti bude blížiť k $\frac{1}{2}$. Pre prvých ľubovoľne veľa čísel mojej postupnosti je počet čísel deliteľných 3 väčší, ako počet nedeliteľných.“
- Analýza odtlačkov prstov ukázala, že $k > b$.

Na akom čísle zlodej začínal? Čomu sa rovná k a b?

Riešenie: Postupne sa poďme pozrieť na informácie, ktoré odhalilo vyšetrovanie. Číslo na ktorom začína si označme a.

Podľa prvej informácie mohol zlodej začínať jedine na číslach $3, 4, 6$ alebo 8. Ďalej vieme, že sa striedali párne a nepárne čísla. Pokiaľ by bolo a párne, tak číslo, ktoré získame vynásobením tohto čísla iným prirodzeným číslom, bude tiež párne. Preto, aby sa striedali, musí byť a nepárne a k párne. Teda $a = 3$. Aby bolo tretie číslo opäť nepárne, musí byť aj číslo b nepárne.

Aby sa počet čísel deliteľných tromi a všetkých blížil k $\frac{1}{2}$, musia sa nám od nejakého čísla striedať čísla, ktoré sú a nie sú deliteľné tromi. Teda buď budeme mať číslo deliteľné 3 po každom vynásobení k, alebo po každom odčítaní b. Ak by boli čísla deliteľné tromi po odčítaní b, boli by deliteľné aj po vynásobení ľubovoľným číslom. Aby sa nám teda striedali, musí byť k násobok trojky a číslo b nesmie byť násobok trojky. Vieme, že k bude párne, teda bude deliteľné 6. b bude kvôli striedaniu párnosti nepárne.

Ak by bolo $k = 12$, b môže byť najviac 11. Potom by siedme číslo postupnosti už určite malo aspoň 4 cifry. Teda $k = 6$ a b môže byť niektoré z čísel $1, 3$ alebo 5.

Ak $b = 1$ tak prvých 7 čísel je $3, 18, 17, 102, 101, 606, 605$. Na ich zápis ale použijeme príliš veľa cifier.

Ak $b = 3$ tak budú všetky čísla postupnosti deliteľné tromi a teda to nevyhovuje.

Ak $b = 5$ tak prvých 7 čísel je $3, 18, 13, 78, 73, 438, 433$. Tieto ako vidíme sa dajú zapísať len pomocou cifier $1, 3, 4, 7$ a 8. Našli sme jediné riešenie.

Odpoveď: Zlodej začínal na čísle 3, $k = 6$ a $b = 5$.

Komentár: Všetci, ktorí ste príklad riešili ste ho vyriešili správne. 10 bodov sme nedali iba v ojedinelých prípadoch, väčšinou z dôvodu, že ste nejakú časť riešenia nedostatočne odôvodnili.

Príklad č. 9 (opravovali Zajo, Paľo):

Zadanie: Pri pozorovaní mesiaca mi napadlo, že spočítam jeho obsah. Mesiac je rovinný útvar, ktorý vznikne výsekom dvoch kružníc, ktoré majú dva spoločné body. Teda je to tá časť menšej z dvojice kružníc, ktorá nie je vo vnútri väčšej.

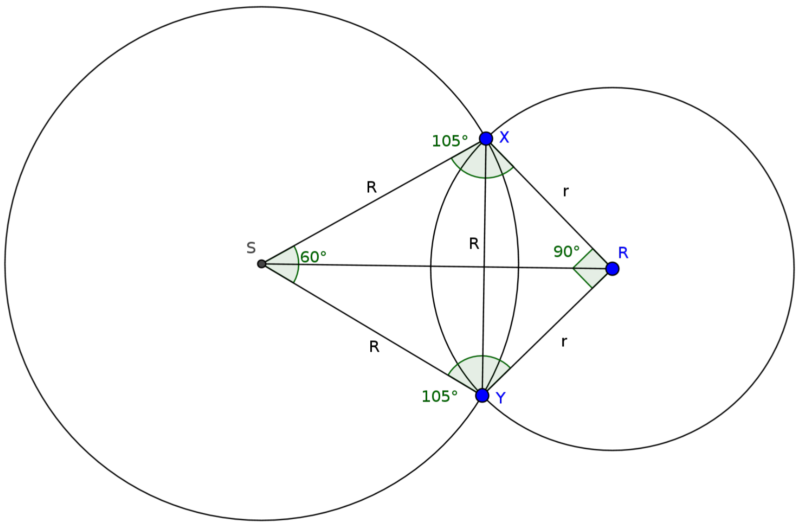
Keby som sa postavil do stredu menšej kružnice, videl by som rohy mesiaca pod uhlom 90°. Keby som sa postavil do stredu väčšej kružnice, videl by som ich pod uhlom 60°. Polomer väčšej kružnice je 20. Aký môže byť obsah mesiaca?

Riešenie: V tomto príklade je potrebné urobiť dve základné finty.

Prvou je uvedomiť si, že môžu nastať až dva prípady, ako vyzerá mesiac. Je to tak preto, lebo podmienka videnia rohov mesiaca pod uhlom 90° ešte nehovorí o tom, či sa na rohy pozeráme „zvonka“ veľkej kružnice, alebo „zvnútra“ veľkej kružnice.

Riešme preto dva prípady:

1. Stred menšej kružnice *neleží* vo väčšej kružnici.



Obr. 5: Stred menšej kružnice *neleží* vo väčšej kružnici.

Takto pretínajúce sa kružnice sú osovo symetrické podľa spojnice ich stredov. Z toho vyplýva aj rovnosť uhlov $|\sphericalangle SXY| = |\sphericalangle SYX|$. Trojuholník $\triangle SXY$ je tým pádom rovnostranný a $|XY| = R$ (polomer väčšej kružnice).

Teraz vieme vypočítať polomer menšej kružnice z pytagorovej vety pre $\triangle RXY$:

$$R^2 = 20^2 = 2r^2 \to r^2 = 200 \to r = \sqrt{200}$$

Teraz prichádza na radu druhý trik, kedy si treba správne vyjadriť obsah hľadaného útvaru. Ako najšikovnejšie po chvíli hrania sa ukazuje byť nasledovný postup:

K trom štvrtinám menšej kružnice pripočítame obsah $SXRY$ a odpočítame od toho obsah menšieho výseku XSY. Keďže uhol XSY má 60°, tak obsah výseku je šestina obsahu väčšieho kruhu.

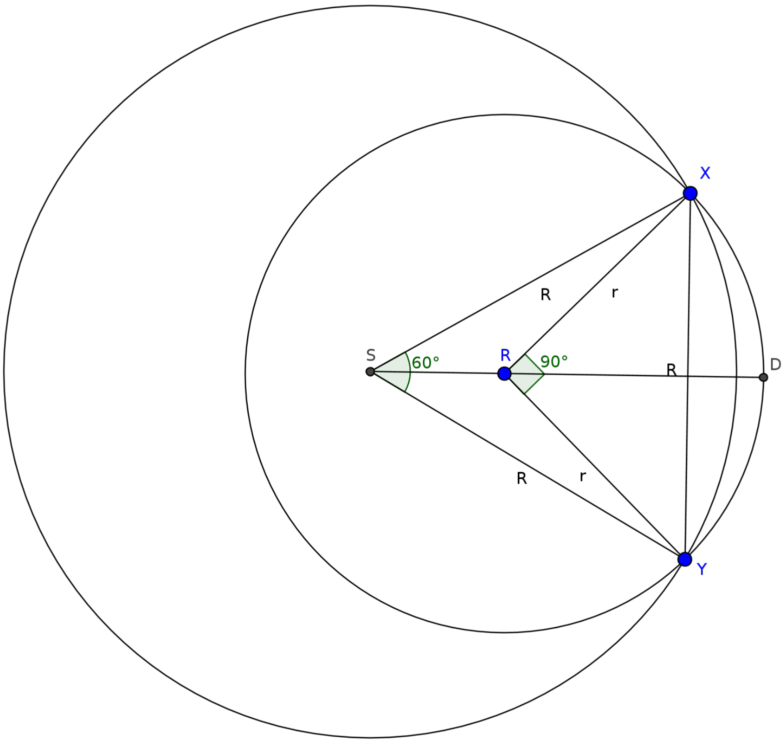
Všetky potrebné dĺžky poznáme, preto ostáva to iba spočítať:

$$S = \frac{3}{4}\pi r^2 + \triangle XYR + \triangle SXY - \frac{1}{6}\pi R^2$$

$$S = \frac{3}{4}\pi 200 + \frac{r^2}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4}R^2 - \frac{1}{6}\pi 400$$

$$S = \frac{3}{4}\pi 200 + 100 + \frac{\sqrt{3}\cdot 400}{4} - \frac{1}{6}\pi 400$$

$$S = \frac{250}{3}\pi + 100 + 100\sqrt{3}$$



Obr. 6: Stred menšej kružnice *leží* vo väčšej kružnici.

2. Stred menšej kružnice *leží* vo väčšej kružnici.
   Rovnakou úvahou vieme dostať $r = \sqrt{200}$.
   Obsah výseku zrátame tentokrát následovne: K obsahu kruhového výseku RXY pripočítame obsahy $\triangle SRX$ a $\triangle SRY$. Následne odrátame obsah výseku SXY. Pomôžeme si ešte tým, že $\triangle SRX + \triangle SRY = \triangle SXY - \triangle RXY$.
$$S = XRY + (\triangle SRX + \triangle SRY) - XSY$$
$$S = \frac{1}{4}\pi r^2 + (\frac{\sqrt{3}}{4}R^2 - \frac{r^2}{2}) - \frac{1}{6}\pi R^2$$
$$S = 50\pi + 100\sqrt{3} - 100 - \frac{1}{6}400\pi$$
$$S = \frac{-50}{3}\pi + 100\sqrt{3} - 100$$

Takto sme dostali oba možné obsahy mesiaca.
Komentár: Väčšina z Vás zabudla na diskusiu, teda tú časť riešenia, kedy si treba uvedomiť, že prípady sú naozaj dva. (Keď menší kruh je vo väčšom a keď nie) Za vyriešenie iba jedného z týchto prípadov bolo možné získať len 6 bodov. Poučenie z toho plynúce je, že keď si nakreslíme obrázok, tak sa zamyslime či je vždy platný. Okrem toho bol príklad celkom priamočiary (tj. hneď vidíme čo treba zrátať, a v riešení to jednoducho spravíme..), s čím ste si aj ľahko poradili.

Prémia (opravoval MaťoPaťo):

Zadanie: Máme 9 váz poukladaných do štvorca 3×3, Lámač im nameral objemy v litroch tak, ako v tabuľke 3. Rozhodol sa zistiť, na koľko preliatí dokáže odmerať 1 liter. Prelievať z vázy do vázy môže iba medzi susediacimi vázami. Pričom platí, že celý obsah vázy musí preliať. Pokiaľ vo váze nie je dostatok voľného miesta, naleje do nej toľko, aby bola po preliatí plná. Na začiatku je plná len váza vpravo v strede. Koľko najmenej preliatí musí Lámač spraviť, aby v niektorej z váz ostal 1 liter? Ako to spraví?
Riešenie:

8	11	13
6	19	43
13	8	3

Tabuľka 3: objemy váz

Zadanie príkladu ste si dokázali vysvetliť viacerími spôsobmi, z ktorých boli dve vysvetlenia naozaj možné. Za túto nejednoznačnosť sa ospravedlňujeme.

1. vysvetlenie: Prelievame iba do jednej susednej vázy, ktorú si vyberieme. Ak je v tejto váze dostatok miesta, prelejeme do nej celý obsah vázy. Ak nie, prelejeme do nej len toľko, koľko sa do nej zmestí a zvyšok vody ostane v pôvodnej váze. Najlepšie riešenie, ktoré ste našli pre túto interpretáciu zadania, potrebuje 5 preliatí. Najprv prelejeme vodu z počiatočnej vázy do vázy v strede s objemom $19l$. Z tejto vázy prelejeme vodu v dvoch preliatiach do váz s objemami $6l$ a $8l$, ktoré susedia stranou s vázou s objemom $19l$. Z týchto prelejeme v dvoch krokoch vodu do vázy s objemom $13l$ dole vľavo a v jednej z týchto váz nám ostane $1l$, pretože $6 + 8 = 14$, čo je o 1 viac ako 13.

2. vysvetlenie: Za jedno preliatie sa rozumie, že celý obsah vázy rozlejeme do susedných váz, pričom do každej vázy nalievame, kým nie je plná, alebo kým sa nám neminie voda. Najlepšie riešenie má tentokrát 4 preliatia. Vodu na začiatku rozlejeme do váz s objemami $3l, 8l, 19l$ a $13l$. Obsah $13l$ vázy vrátime naspäť do $43l$ vázy. Teraz si zoberieme $19l$ vázu v strede a prelejeme $13l$ z nej do $13l$ vázy vpravo hore. Zvyšných $6l$ nalejeme do vázy vľavo dole. $7l$ z $8l$ vázy dole v strede nalejeme do $13l$ vázy vľavo dole a zvyšný $1l$ nalejeme do $19l$ vázy v strede.

Odpoveď: Najlepšie riešenie, ktoré sme našli potrebuje 5 alebo 4 preliatia.

Komentár: Vzhľadom na dve možnosti vysvetlenia zadania boli riešenia na 5 preliatí aj na 4 preliatia považované za najlepšie riešenia.