

Zadania 1. kola letnej série 2015/2016

Termín: 07.03.2016

Naša adresa: Riešky, Mgr. Viera Babišová, Gymnázium Grösslingová, Grösslingová 18, 811 09 Bratislava 1

Elektronické riešenia: <http://riesky.sk/>

Tak ako každé ráno sa aj dnes Hanka vybrala do školy. Dnešné ráno však bolo výnimočné. Jej brat Matúš si totiž prednedávnom spravil vodičský preukaz. Rodičia mu po dlhom presvedčaní dovolili zobrať si auto a odviezť sa do školy. Mali však jednu podmienku: že musí zobrať aj Hanku. Keďže nechodia do rovnakej školy, dohodli sa, že Hanku vysadí na stanici v blízkosti jej školy. Hanka sa obliekla a celá natešená utekala dolu schodmi. Zrazu si ale spomenula na kamarátku Dada, po ktorú sa musia zastaviť tiež. Matúš nevie s určitosťou povedať, na ktorom poschodí Dada býva. Hanka mu dala nápovedu. Pomôžete mu?

Príklad č. 1: Keď sa Dada neučí, chodí behať a cvičiť na schodisko v paneláku. Zvezie sa na prízemie výťahom a beží hore. Popritom na každom poschodí spraví 10 klikov a na každom treťom schode spraví drep (na jedno poschodie treba prekonať dve schodiská, pričom každé má 9 schodov). Na každom treťom poschodí má ale kamarátku, ktorá jej ponúkne muffin (ktorý zje). Každým klikom spáli 8 kalórií, každým drepom 5 kalórií a každý muffin má 205 kalórií. Na ktorom poschodí Dada býva, ak cestou hore spáli presne 360 kalórií? Dada je na seba tvrdá a vždy s cvikmi skončí na svojom poschodí.

Hanka nastúpila do auta, kde ju už čakal jej brat. „Kde si toľko bola?“ spýtal sa jej. Hanka sa len pousmiala, lebo vedela, že jej brat žiadnu odpoveď neočakáva. Vyrazili na cestu a ona sa pozerala, ako sa pred ňou mihali budovy zahalené do červenej farby ranného svitu. Matúš si od šťastia z jeho prvej jazdy ani neuvedomil, že ju vysadil na inej zastávke než mal. Zmätená Hanka hľadala autobus, ktorým by sa dostala do školy.

Príklad č. 3: Infotabuľa autobusových liniek je hotový hieroglyf. Napriek veľkej snahe bola Hanka značne zmätená. Stálo tam zhruba toto: Prvočíslo vždy zvíťazí nad neprvočísлом, pokiaľ neprvočíslo nie je jeho násobkom. Inak vždy vyhrá väčšie číslo. Ide o klasického pavúka t.j. 8 čísiel, rozdelených do dvoch skupín. V skupine postupuje víťaz duelu (víťazný autobusový spoj) v prvom kole do semifinále (kde hrá so súperom zo svojej skupiny – ďalším spojom). Víťazné spoje potom súťažia vo finále. Raz zápasili spoje, ktorých čísla boli prirodzené čísla od 1 po 8. Na veľké prekvapenie sa 8 ocitlo vo finále. S kým v ňom bude hrať a ako to dopadne? Koľko je rôznych možností na členov skupiny, v ktorej 8 nebola?

Hanka bola celá rozradostená, že o chvíľu pôjde jej autobus. Rozmýšľala, ako by si mohla skrátiť čakanie. Všimla si zvláštne dlaždice, z ktorých sa skladala cesta. Zaujala ju jedna uvoľnená dlaždica.

Príklad č. 5: Majme veľkú dlaždicu kockového tvaru so stranou 3cm . Ponoríme ju do červenej farby. Necháme uschnúť, položíme na vodorovnú podložku a rozrežeme na tri rovnako veľké časti (dvoma rezmi rovnobežnými s podložkou, t.j. vodorovnými). Vzniknú nám teda tri hranoly s rozmermi $3 \times 1 \times 3$ (dĺžka \times výška \times šírka). Dolný a horný vymeníme, zlepíme a dlaždicu opäť ponoríme, tentokrát do zelenej farby. Rozrežeme rovnako, ale zvislými rezmi, vymeníme krajné dva hranoly, opäť zlepíme, a ponoríme do žltej farby. Teraz rozrežeme dlaždicu na 27 menších (Šiestimi rezmi, postupne po dvoch rovnobežnými so stenami). Dlaždice vložíme do školskej tašky. Pri výmenách hranolov po rezaní ich nijakým spôsobom neotáčame. Otázky:

a) Koľkokrát musíme vytiahnuť z tašky náhodnú dlaždicu, aby sme si boli istý, že sme vytiahli dlaždicu, čo má na sebe aspoň jednu stenu zo všetkých troch farieb?

b) Koľkokrát musíme vytiahnuť z tašky náhodnú dlaždicu, aby sme si boli istý, že jedna z farieb sa už nenachádza na žiadnej dlaždici v taške? (Teda že sme vytiahli všetky dlaždice čo mali na sebe niektorú z farieb?)

c) Koľkokrát musíme vytiahnuť z tašky náhodnú dlaždicu, keď všetky čo vytiahneme potom znovu nahádzeme do inej tašky, a musí platiť nasledovné:

Ak z druhej tašky potiahnem osem (alebo všetky, ak je ich tam menej) dlaždíc, tak určite medzi nimi budú tri také, že budú mať spolu spoločnú farbu aspoň na jednej stene? (t.j. existuje farba, ktorá sa nachádza na aspoň troch z tých ôsmich dlaždíc?)

Konečne prišiel Hankin autobus. Už sa tešila na náhly závan tepla z otvárajúcich sa dverí. Nastúpila. Pozerajúc sa von oknom, začala počítat zastávky. Podobne, ako malé deti rátajú ovečky, keď nevedia zaspáť. Pomaly jej klesli očné viečka a upadla do plytkého spánku. Keď sa zobudila, bola už ďaleko za svojou školou. Netušila, kde je. Vystúpila a pokúsila sa nájsť cestu späť. Pozrela sa na cestovné poriadky, ale tie zastávky nepoznala. Už aj začala zúfať, keď vtom začula deti hrajúce sa v neďalekej škôlke. Avšak takúto hru ešte nevidela. Hneď si ju nechala vysvetliť.



Príklad č. 9: Na štvorcovej sieti 10×10 je niekoľko dvojíc kameňov (to, ktoré kamene sú navzájom dvojica je určené dopredu a nemení sa). S kameňom môžeme hýbať o políčko doprava, doľava, hore, dole vždy o 1 políčko, ale musím zároveň pohnúť druhým kameňom dvojice opačným smerom. Dva kamene rovnakej dvojice nesmú byť na rovnakom mieste, dva kamene rôznych dvojíc áno. Za každú dvojicu dostávam body rovné súčinu x-ových súradníc kameňov plus súčinu ich y-ových súradníc. Na mriežke mám dve dvojice kameňov, jednu na súradniciach $[4, 5]$ a $[7, 3]$ a druhú na $[0, 1]$ a $[5, 4]$. Ďalší kameň máme na $[3, 2]$. K nemu môžeme umiestniť druhý kameň z dvojice na ľubovoľné miesto.

Po umiestnení posledného kameňa presuniem všetky kamene do polohy tak, že v tejto polohe vytvárajú priamky prechádzajúce každou dvojicou kameňov pravouhlý trojuholník s obsahom 8. Aký je maximálny bodový zisk v tomto prípade a koľkými spôsobmi sa tento zisk dá dosiahnuť?

Žiaľ, ani deti nevedeli, ako sa dostať na zastávku, ktorú potrebovala Hanka. Poradili jej ale, že v tom vysokom mrakodrape na konci ulice to určite budú vedieť. Hanka sa tam teda vybrala. Pri vstupe do budovy stretla vrátnika. Spýtala sa ho na cestu do svojej školy, no nevedel jej pomôcť. Ak však pôjde za správcou, ten jej určite pomôže. Povedal jej, že správca sa neustále premiestňuje vo výťahu, a teda ho musí pohľadať.

Príklad č. 6: V mrakodrape so 49 poschodiami sú v piatich rôznych výťahoch (každý v inej šachte) uväznení piati ľudia. Teraz sú výťahy na 17., 26., 20., 29. a 31. poschodí - v tomto poradí. Aby sa dvere otvorili, výťahy musia byť zostupne za sebou na 25. až 21. poschodí, presne v tomto poradí (teda ten čo je teraz na 17. bude na 25. poschodí.) Výťahy majú iba dva druhy príkazov, ktoré sa vždy vzťahujú na dva výťahy. *Prvý príkaz:* jeden výťah 8 poschodí hore, druhý výťah 13 poschodí dole. *Druhý príkaz:* jeden výťah 13 poschodí hore a druhý 8 dole. Uväznení ľudia sa rozhodnú vziať situáciu do vlastných rúk a dostať sa von. Koľko najmenej príkazov potrebujú na to, aby sa im to podarilo?

Konečne ho našla! Len čo chytil dych, opýtala sa ho na cestu. „Ale samozrejme, že ti ukážem cestu!“ povedal. Hanka pozorne počúvala a podľa inštrukcií sa vybrala na cestu. Išla spleťmi uličkami až dorazila k vinohradom. Začala premýšľať, aké ťažké to musí byť farmárom. Spomenula si na príbeh a hádanku, ktoré jej hovoril starký.

Príklad č. 4: Raz som išiel predávať kravu. Namiesto peňazí som ju však vymenil za špeciálnu zeminu. Vraj keď pridám zeminu k rastlinám, zázračne porastú. Vo svojej záhrade pestujem vždy len jednu brokolicu a jeden baobab. Baobab je jednoduchý, má vždy dve poschodia konárov. Zo zeme vyraší niekoľko konárov na prvé poschodie a z každého konára prvého poschodia vyraší presne toľko ďalších konárov na druhé poschodie. Naopak brokolica môže mať veľmi veľa poschodí. Z každého konára na každom poschodí (okrem posledného) vyrastú ďalšie dva konáre na vyššie poschodie. Keď zo zeme vyraší viac ako jeden konár, nenazývame to jednou brokolicou, ale viacerými.

Vždy, keď zasadím novú brokolicu a baobab, do svojej záhradky zakopem nejaký počet celých kusov špeciálnej zeminy. Mojim rastlinám skutočne prospieva, preto tam vždy dám aspoň jednu. Moja brokolica potom vyrastie tak, že bude mať presne toľko poschodí, koľko kusov som použil. Mój baobab bude mať zase na prvom poschodí presne toľko konárov.

Zaujímalo by ma, koľko špeciálnej zeminy mám použiť, aby bol rozdiel konárov brokolice a baobau párný a koľko, aby bol nepárny. Koľko to je? A koľko mám použiť, aby ich bolo rovnako veľa?

Hanka sa dostala na rázcestie. „Spomínal mi rázcestie? Nešla som náhodou celú cestu zle? Nemala by som sa vrátiť?“ pýtala sa seba samej. V tom zazrela starých dedkov ako sa hrajú hru so zápalkami. Hanku to zaujalo a začala sa prizerať. Dedkovia si to všimli a spýtali sa jej, či by sa nechcela pridať na jednu hru. „To ešte stíham,“ zhodnotila.

Príklad č. 7: S dedkom hráš hru so zápalkami. Vyberieš celé číslo medzi 1 a 50 vrátane. Potom začnete hru so spoločnou kôpkou s presne toľko zápalkami, koľko si vybral. Po ťahoch odpočítavate druhú mocninu prirodzeného čísla (nie väčšiu ako číslo, ktoré si vybral) v zápalkách. Hra končí, keď zostane 0 (nemôžeš odpočítať viac, ako tam momentálne je) zápaličk. Prehráva ten, ktorý ako prvý nemôže odpočítavať. Koľko čísel môžeš vybrať tak, aby si vyhral, keď začínaš ty? Obaja hráte najlepšie ako viete a každý chce vyhrať.

Hanka sa poďakovala za hru a spýtala sa dedkov kade má ísť ďalej. „To nie je žiaden problém, máme mapu,“ potešili ju. Ukázali jej, kde sa nachádza aj so záchytnými bodmi, okolo ktorých prejde. Ako sa pozerala na mapu, všimla si zaujímavu usporiadanú ulicu.

Príklad č. 8: Keď zakrúžkujeme body X a Y, znamená to, že vytvoríme kružnicu prechádzajúcu X a Y so stredom v strede úsečky XY. Raz sme zakrúžkovali body A a B a potom B a C. Okrem bodu B nám vznikol druhý priesečník kružníc D. Vieme, že pomer obsahov $\triangle ABD : \triangle BCD$ je 1 : 2 a že úsečka CD je dvakrát dlhšia ako BD. Aký je uhol ABD?

Ako si tak Hanka kráčala po ceste, stretla kamarátku Tete. Hneď jej porozprávala svoj príbeh ako sa stratila. Tete sa nad tým len pousmiala: „Máme spoločnú cestu.“ Nastúpili do okoloidúceho autobusu. Hanka sa spýtala Tete, čo robila, keďže ju už tak dlho nevidela. Tete pohotovo odpovedala, že sa učila na skúšky.

Príklad č. 2: Tete má 8 skúšok. Inú známku ako jednotku, dvojku alebo trojku zo skúšky nechce. Skúšky sú rovnako ťažké. Na to, aby mala zo skúšky jednotku, sa musí učiť 10 hodín. Na dvojku 9 a na trojku 5 hodín. Koľko najmenej dní pred prvou skúškou sa má Tete začať učiť, ak chce mať priemer lepší ako 1,4 a denne sa nechce učiť viac ako 6 hodín? Medzi skúškami sa už neučí.

Keď Hanka dobehla do školy, bolo vyučovanie už v plnom prúde. Prvá hodina bola biológia. Sadla si vedľa spolužiaka a vypytovala sa ho, čo zmeškala. Vysvetlil jej, že sa hrajú hru Game of Life. Má si to vraj vyskúšať, pretože to je veľká zábava. Hanka dlho neváhala a zapla si hru.

Prémia: Hra menom Game of Life má nasledovné pravidlá: Hrá sa na štvorcovej mriežke, pričom v každom políčku môže byť buď živá, alebo neživá bunka. Každé kolo sa vyhodnotia nasledujúce podmienky pre každú bunku: 1. Každá živá bunka s menej než dvoma živými susedmi zomrie. 2. Každá živá bunka buď s dvoma, alebo tromi živými susedmi zostáva žiť. 3. Každá živá bunka s viac než tromi živými susedmi zomrie. 4. Každá mŕtva bunka s práve tromi živými susedmi sa oživí. Susedná bunka znamená bunka, ktorá sa dotýka druhej stranou alebo vrcholom. Máte nekonečne veľkú hraciu plochu. Ako treba položiť 20 buniek, aby sme po 12 kolách mali čo najviac buniek? Ako výsledok nám pošlite začiatkové a konečné rozloženie buniek. Odporúčame použiť počítačový simulátor Life, napríklad: <http://pmav.eu/stuff/javascript-game-of-life-v3.1.1/>

Jej dobrodružná cesta do školy sa nakoniec skončila šťastne. Nikto sa na ňu nehneval, že prišla do školy neskoro a ona sa už nevedela dočkať, ako všetkým vyrozpráva, čo sa jej v toto ráno prihodilo.