Vzorové riešenia 1. kola letnej série 2015/2016

Príklad č. 1 (opravovala Dada):

Zadanie: Keď sa Dada neučí, chodí behať a cvičiť na schodisko v paneláku. Zvezie sa na prízemie výťahom a beží hore. Popritom na každom poschodí spraví 10 klikov a na každom treťom schode spraví drep (na jedno poschodie treba prekonať dve schodiská, pričom každé má 9 schodov). Na každom treťom poschodí má ale kamarátku, ktorá jej ponúkne muffin (ktorý zje). Každým klikom spáli 8 kalórií, každým drepom 5 kalórií a každý muffin má 205 kalórií. Na ktorom poschodí Dada býva, ak cestou hore spáli presne 360 kalórií? Dada je na seba tvrdá a vždy s cvikmi skončí na svojom poschodí.

Riešenie: Čaute, tu je Dada, poďme sa pozrieť, čo som to cez to skúškové stvárala.

Takže máme tu kliky, drepy a samozrejme muffiny. Keďže muffin dostávam iba na každom treťom poschodí, bude fajn pozrieť sa, čo sa mi za také trojposchodie stane.

Čo sa klikov týka, na každom poschodí spravím 10, teda za tri poschodia to bude $3 \cdot 10 = 30$ klikov a potom rovno po prepočte na kalórie to bude $30 \cdot 8 = 240$ kalórií.

Poďme na tie drepy. Každé poschodie má dve schodiská po 9 schodov, teda za jedno schodisko dám $2 \cdot 3 = 6$ drepov. Preto za tri poschodia dám $6 \cdot 3 = 18$ drepov, teda spálim presne $18 \cdot 5 = 90$ kalórií.

Čo sa ale nestane, prišlo tretie poschodie, a s ním aj čas na obľúbený muffin. Doteraz som spálila $240 + 90 = 330$ kalórií a muffin z toho spravil $330 - 205 = 125$ kalórií.

Za takéto trojposchodie mám teda bilanciu 125 spálených kalórií. Vieme, že dokopy som spálila 360, teda sa mi tam zmestia 2 trojposchodia (môžeme si vyskúšať, že 3 by už boli veľa, pretože $125 \cdot 3 = 375$ by už bolo veľa).

Teda máme 2 trojposchodia a ešte nám zostalo $360 - 2 \cdot 125 = 110$ kalórií, ktoré treba spáliť. Viem, že žiadny muffin už nezjem, takže kalórie už budem len spaľovať. Za jedno poschodie to je 10 klikov, čiže $10 \cdot 8 = 80$ kalórií, a $9 + 9 = 18$ schodov, z toho bude 6 drepov, a teda $6 \cdot 5 = 30$ kalórií. Dokopy za jedno poschodie teda spálim $80 + 30 = 110$ kalórií, a to je presne toľko, koľko som potrebovala spáliť.

Vybehla som teda dve trojposchodia a ešte jedno poschodie navyše, teda je to $2 \cdot 3 + 1 = 7$ poschodí.

Odpoveď: Je to tak, bývam na siedmom poschodí.

Príklad č. 2 (opravovala Tete):

Zadanie: Tete má 8 skúšok. Inú známku ako jednotku, dvojku alebo trojku zo skúšky nechce. Skúšky sú rovnako ťažké. Na to, aby mala zo skúšky jednotku, sa musí učiť 10 hodín. Na dvojku 9 a na trojku 5 hodín. Koľko najmenej dní pred prvou skúškou sa má Tete začať učiť, ak chce mať priemer lepší ako $1,4$ a denne sa nechce učiť viac ako 6 hodín? Medzi skúškami sa už neučí.

Riešenie: Poďme teda pomôcť Tete s plánmi. Zo zadania vieme, že nechce mať priemer horší ako $1,4$. Priemer známok sa vypočíta ako súčet známok vydelený ich počtom. Napríklad, ak by ste dostali jednotku, dve dvojky a trojku, váš priemer by bol $\frac{1+2+2+3}{4} = \frac{8}{5} = 1,6$. Tete dostane určite 8 známok. Čím má Tete horšie známky, tým majú väčší súčet a tým aj horší priemer. Keďže $\frac{sucetznamok}{8} = 1,4$, tak vieme vypočítať, že pri najhoršom priemere, s ktorým by Tete ešte bola spokojná, by bol súčet známok $1,4 \cdot 8 = 11,2$. Keďže dostávame iba celočíslené známky, súčet známok musí byť nanajvýš 11.

Spravme si teraz tabuľku s možnosťami kombinácií známok, ich súčtom a počtom hodín, ktoré sa na danú kombináciu treba učiť.

V tabuľke sme skončili pri piatich jednotkách. Ďalej ju vypisovať nebudeme, pretože ak by mala Tete iba 4 jednotky, súčet zvyšných známok by mohol byť maximálne 7. Potrebujeme ešte 4 známky, takže aj keby to boli dvojky, tak by dávali súčet 8. Rovnako, ak by mala 3 alebo menej jednotiek, súčet zvyšných známok by aj pri kombinácií jednotiek a dvojok dával viac ako 11.

Z tabuľky si môžeme všimnúť, že najmenej hodín učenia je potrebných na kombináciu šiestich jednotiek, jednej dvojky a jednej trojky. Vtedy sa Tete musí učiť 74 hodín. Keďže každý deň sa učí maximálne 6 hodín, tak pri učení Tete strávi $\frac{74}{6} = 12,\overline{3}$ dňa.

Odpoveď: Tete sa musí začať učiť minimálne 13 dní pred prvou skúškou.

počet jednotiek	**počet dvojok**	**počet trojok**	**súčet známok**	**počet hodín**
8	0	0	8	$8 \cdot 10 = 80$
7	1	0	9	$7 \cdot 10 + 1 \cdot 9 = 79$
7	0	1	10	$7 \cdot 10 + 1 \cdot 5 = 75$
6	2	0	10	$6 \cdot 10 + 2 \cdot 9 = 78$
6	1	1	11	$6 \cdot 10 + 1 \cdot 9 + 1 \cdot 5 = 74$
6	0	2	12	príliš veľký súčet známok
5	3	0	11	$5 \cdot 10 + 3 \cdot 9 = 77$
5	2	1	12	príliš veľký súčet známok
5	1	2	13	príliš veľký súčet známok
5	0	3	14	príliš veľký súčet známok

Tabuľka 1: Kombinácie známok

Komentár: Príklad nebol ťažký, väčšina z vás ho vyriešila správne. Len si dávajte pozor, ak vypisujete možnosti, nezabudnite naozaj vypísať všetky.

Príklad č. 3 (opravoval Ivo):

Zadanie: Infotabuľa autobusových liniek je hotový hieroglyf. Napriek veľkej snahe bola Hanka značne zmätená. Stálo tam zhruba toto: Prvočíslo vždy zvíťazí nad neprvočíslom, pokiaľ neprvočíslo nie je jeho násobkom. Inak vždy vyhrá väčšie číslo. Ide o klasického pavúka t.j. 8 čísiel, rozdelených do dvoch skupín. V skupine postupuje víťaz duelu (víťazný autobusový spoj) v prvom kole do semifinále (kde hrá so súperom zo svojej skupiny – ďalším spojom). Víťazné spoje potom súťažia vo finále. Raz zápasili spoje, ktorých čísla boli prirodzené čísla od 1 po 8. Na veľké prekvapenie sa 8 ocitlo vo finále. S kým v ňom bude hrať a ako to dopadne? Koľko je rôznych možností na členov skupiny, v ktorej 8 nebola?
Riešenie: Najprv sa pozrieme na čísla, ktoré porazia 8. Sú to všetky prvočísla, okrem dvojky, lebo 8 je jej násobok. Konkrétne 3, 5 a 7. Avšak, pokiaľ v prvom kole bude jedno z týchto čísel porazené číslom, ktoré je 8 schopná poraziť, môže sa dostať 8 do finále napriek faktu, že by bola s týmto číslom v skupine a v dueli s ním by prehrala.

Číslo 7 je dosť unikátne, pretože poráža všetky ostatné čísla. Tým pádom musí byť určite v inej skupine, ako 8, inak by sa 8 nedostala do finále.

Číslo 5 môže byť porazené iba číslom 7 a ničím iným. Teda ani 5 nemôže byť v skupine spolu s 8. Jediné číslo, ktoré poráža číslo 8, ale môže s ním byť v jednej skupine je teda 3.

Pokiaľ je 3 v tej istej skupine ako 8, musí sa v prvom dueli stretnúť s niečim, čo ho porazí a pritom to samozrejme nie je ani 5 ani 7. Jediné takéto číslo je 6. 6 podľahne 8, čiže by sa 8 dostala do finále. Teraz musíme vybrať dve čísla z troch, aby sme doplnili druhú skupinu. To sa dá troma možnosťami.

Pokiaľ nie je 3 v skupine s číslom 8, 8 automaticky postúpi do finále. Teraz ideme dopĺňať druhú skupinu. Mám v nej jedno voľné miesto a ešte 4 voľné čísla, tým pádom mám 4 možnosti ako môže vyzerať druhá skupina v tomto prípade.
Odpoveď: Vzhľadom na to, že 7 vždy zvíťazí, musí iba ona stáť proti 8, kde znova zvíťazí. Celkovo možností zloženia skupiny, kde nie je 8, je $4 + 3 = 7$.
Komentár: V príklade ste občas zabúdali na to, že 3 a 8 môžu byť spolu v skupine, poprípade nejakú inú podmienku.

Príklad č. 4 (opravovala Tinka):

Zadanie: Raz som išiel predávať kravu. Namiesto peňazí som ju však vymenil za špeciálnu zeminu. Vraj keď pridám zeminu k rastlinám, zázračne porastú. Vo svojej záhrade pestujem vždy len jednu brokolicu a jednen baobab. Baobab je jednoduchý, má vždy dve poschodia konárov. Zo zeme vyraší niekoľko konárov na prvé poschodie a z každého konáru prvého poschodia vyraší presne toľko ďalších konárov na druhé poschodie. Naopak brokolica môže mať veľmi veľa poschodí. Z každého konára na každom poschodí (okrem posledného) vyrastú ďalšie dva konáre na vyššie poschodie. Keď zo zeme vyraší viac ako jeden konár, nenazývame to jednou brokolicou, ale viacerými.

Vždy, keď zasadím novú brokolicu a baobab, do svojej záhradky zakopem nejaký počet celých kusov špeciálnej zeminy. Mojim rastlinám skutočne prospieva, preto tam vždy dám aspoň jednu. Moja brokolica potom vyrastie tak, že bude mať presne toľko poschodí, koľko kusov som použil. Môj baobab bude mať zase na prvom poschodí presne toľko konárov.

Zaujímalo by ma, koľko špeciálnej zeminy mám použiť, aby bol rozdiel konárov brokolice a baobau párny a koľko, aby bol nepárny. Koľko to je? A koľko mám použiť, aby ich bolo rovnako veľa?

Riešenie: Na začiatok si povedzme, že sa chceme pozrieť na to, koľko konárov bude mať brokolica a koľko baobab vzhľadom na paritu špeciálnej zeminy. Pod paritou zeminy si predstavme, či sme jej zasadili párny alebo nepárny počet kusov.

Zoberme si najprv baobab. Predstavme si, že sme zasadili nepárny počet špeciálnej zeminy. Čo sa stane? Prvé poschodie bude mať nepárny počet konárov, pretože prvé poschodie má rovnako veľa konárov ako je zahrabanej špeciálnej zeminy. Druhé poschodie bude mať tiež nepárny počet konárov. Na každom konári z prvého poschodia bude nepárny počet konárov, ktoré len celkovo sčítame dokopy. Keď sčítavame nepárny počet nepárnych čísel, dostaneme jedine nepárne číslo. Teda konárov bude celkovo párny počet, pretože po prirátaní nepárneho počtu konárov z prvého poschodia dostaneme párny počet konárov (N označuje ľubovoľné nepárne číslo, P ľubovoľné párne): $N + N = P$

Ale čo ak zahrabeme párny počet špeciálnej zeminy? Prvé poschodie bude mať párny počet konárov, druhé poschodie tiež, pretože sčítavame len párne čísla. Obe poschodia dokopy sú $P + P = P$, teda nám vyrastie párny počet konárov.

Môžeme si všimnúť, že baobabu je jedno koľko špeciálnej zeminy zasadíme, vždy vyrastie s párnym počtom konárov.

Teraz sa môžeme zaoberať brokolicou. Ak zahrabeme párny počet kusov špeciálnej zeminy, tak brokolica bude mať párny počet poschodí. Čo nás ale zaujíma? Všimnime si, že každé poschodie brokolice (okrem prvého - prvé poschodie brokolice má vždy len jeden konár, pretože inak by to bolo viac brokolíc a to sa nezhoduje so zadaním) má párny počet konárov, pretože na každom novom poschodí sa z existujúceho konáru vyženú dva nové. Teda počet konárov na novom poschodí je dvojnásobok počtu konárov o poschodie nižšie, z čoho vyplýva párnosť počtu konárov. Keď si naše poznatky zhrnieme, všetky poschodia brokolice, okrem prvého, budú mať párny počet konárov, čo je $P + 1$, teda vždy nepárne číslo.

Ak zahrabeme nepárny počet špeciálnej zeminy funguje to obdobne, jedine poschodí je nepárny počet, čo však neovplyvní fakt, že brokolica bude mať až na prvé poschodie vždy párny počet konárov na poschodí, čiže zase je to $P + 1$, čo je nepárne čislo.

Ako sme zistili, parita konárov baobabu ani brokolice nezávisí od počtu zasadených kusov špeciálnej zeminy. Ich rozdiel bude vždy nepárny počet, pretože $P - N$ (alebo $N - P$) je vždy nepárne číslo.

Ešte si uvedomme, že ak má baobab vždy párny počet konárov a brokolica vždy nepárny, tak ich rozdiel nikdy nemôže byť 0. Takáto situácia by nastala iba v prípade, že by sme nezasadili žiadnu špeciálnu zeleninu, vtedy by babobab aj brokolica mali 0 konárov. Avšak zadanie vravı́, že vždy aspoň 1 kus zasadíme.

Odpoveď: Rozdiel počtu konárov baobabu a brokolice je pre ľubovoľný kladný počet kusov špeciálnej zeminy nepárny.

Komentár: Väčšina z vás tento príklad zvládla naozaj pekne. Udeľovali sme 4 body za zdôvodnenie, že brokolica má nepárny počet konárov, 4 za ukázanie, že baobab má vždy párny počet konárov a 2 za správnu odpoveď.

Príklad č. 5 (opravovali Jumaj, Tete, MaťoPaťo):

Zadanie: Majme veľkú dlaždicu kockového tvaru so stranou $3cm$. Ponoríme ju do červenej farby. Necháme uschnúť, položíme na vodorovnú podložku a rozrežeme na tri rovnako veľké časti (dvoma rezmi rovnobežnými s podložkou, t j vodorovnými). Vzniknú nám teda tri hranoly s rozmermi $3 \times 1 \times 3$ (dĺžka $\times$ výška $\times$ šírka). Dolný a horný vymeníme, zlepíme a dlaždicu opäť ponoríme, tentokrát do zelenej farby. Rozrežeme rovnako, ale zvislými rezmi, vymeníme krajné dva hranoly, opäť zlepíme, a ponoríme do žltej farby. Teraz rozrežeme dlaždicu na 27 menších (Šiestimi rezmi, postupne po dvoch rovnobežnými so stenami). Dlaždice vložíme do školskej tašky. Pri výmenách hranolov po rezaní ich nijakým spôsobom neotáčame. Otázky:

a) Koľkokrát musíme vytiahnuť z tašky náhodnú dlaždicu, aby sme si boli istý, že sme vytiahli dlaždicu, čo má na sebe aspoň jednu stenu zo všetkých troch farieb?

b) Koľkokrát musíme vytiahnuť z tašky náhodnú dlaždicu, aby sme si boli istý, že jedna z farieb sa už nenachádza na žiadnej dlaždici v taške? (Teda že sme vytiahli všetky dlaždice čo mali na sebe niektorú z farieb?)
c) Koľkokrát musíme vytiahnuť z tašky náhodnú dlaždicu, keď všetky čo vytiahneme potom znovu naházdžeme do inej tašky, a musí platiť nasledovné:

Ak z druhej tašky potiahnem osem (alebo všetky, ak je ich tam menej) dlaždíc, tak určite medzi nimi budú tri také, že budú mať spolu spoločnú farbu aspoň na jednej stene? (t.j. existuje farba, ktorá sa nachádza na aspoň troch z tých ôsmich dlaždíc?)

Riešenie: Dlaždice majú tvar kociek, preto o nich budeme rozprávať ako o kockách. Všetky otázky sú zamerané na to, koľko musíme vytiahnuť malých kociek, aby sa nám niečo podarilo. Najprv si povedzme, aké kocky získame tým, že budeme namáčať, rezať a prekladať pôvodnú kocku.

Prefarbovanie sa dalo pochopiť dvoma rôznymi spôsobmi. Líšia sa v tom, čo sa stane, keď je nejaká stena zafarbená a ponoríme ju ešte raz do farby.

Prvé pochopenie je, že stena sa prefarbí. Teda keď predtým bola červená a teraz sme ju ponorili do žltej farby, bude iba žltá. Druhé je, že stena sa bude počítať do obidvoch farieb. Aké kocky v konečnom dôsledku dostaneme sa dá zistiť veľa spôsobmi. Napríklad tak, že si zoberieme 27 kociek (napríklad hracích) a urobíme s nimi úkony zo zadania.

Najprv si rozoberme riešenie príkladu podľa prvého spôsobu pochopenia. Dostaneme takéto kocky:

- 8 rohových kociek: 3 žlté strany, 1 zelená, 1 červená, 1 neofarbená
- 4 kocky na hrane: 2 žlté strany, 1 zelená, 1 červená, 2 neofarbené
- 4 kocky na hrane: 2 žlté strany, 1 zelená, 3 neofarbené
- 4 kocky na hrane: 2 žlté strany, 1 červená, 3 neofarbené
- 2 kocky v strede steny: 1 žltá strana, 1 zelená strana, 4 neofarbené
- 2 kocky v strede steny: 1 žltá strana, 1 červená strana, 4 neofarbené
- 2 kocky v strede steny: 1 žltá strana, 5 neofarbených
- 1 kocka v strede veľkej kocky: 6 neofarbených

Teraz budeme postupne odpovedať na otázky.

a) Chceme mať istotu, že sme vytiahli aspoň jednu kocku, ktorá má na sebe viditeľné všetky tri farby. Preto vždy musíme uvažovať najhorší prípad. Takže uvažujme, že pred tým, než by sme nejakú vytiahli by sme vytiahli všetky také, čo nevyhovujú.

To sú tie, ktoré na sebe majú maximálne dve farby. Takých je podľa výpisu kociek vyššie 15. Keď by sem ale vytiahli 15 kociek, stále by sme mohli vytiahnuť práve týchto 15. Preto, aby sme splnili úlohu musíme vytiahnuť ešte jednu kocku, takže spolu 16.

b) V tejto úlohe ide o to, že keď vytiahneme nejaký počet kociek, vo vnútri v taške sa už nebude nachádzať nejaká farba. Teda žiadna z kociek nebude mať žltú stenu, alebo žiadna z kociek nebude mať červenú stenu, alebo zelenú.

Môžeme si ale všimnúť, že máme takú kocku, ktorá má na sebe všetky tri farby. Dokonca je ich viac. V najhoršom možnom prípade ju vytiahneme ako poslednú. Teda aby sme mali istotu, že sa zbavíme jednej z farieb musíme vytiahnuť všetky kocky.

c) Všetky kocky až na jednu mali nejakú stranu na povrchu veľkej kocky a teda boli ofarbené žltou farbou. Teda ak vytiahnem štyri kocky, môžu nastať dva prípady. Buď sú tam tri kocky so žltou stenou a jedna neofarbená, alebo štyri kocky so žltou stenou. Tie dáme do druhej tašky, opäť všetky vytiahneme a tri z nich budú mať určite aspoň jednu stenu žltú.

Teraz si rozoberme zostavenie kociek podľa druhého postupu a porovnajme riešenie s tým podľa prvého.

Steny veľkej kocky najďalej a najbližšie k nám sú zafarbené všetkými tromi farbami naraz. Na každej z týchto stien bolo $3 \cdot 3$ kociek, teda kociek, ktorých stena je trojfarebná, je spolu 18. Okrem toho je ale každá malá kocka (okrem strednej) zafarbená každou farbou aspoň raz. Je to preto, lebo po každom premiestnení kociek týmto kockám zostala aspoň jedna stena odhalená.

a) V tomto prípade sa dá zadanie podúlohy pochopiť znova dvojako. Buď chceme vytiahnuť jednu z vyššie spomínanách 18 kociek, alebo kocku, na ktorej sa nachádzajú všetky tri farby, nie nutne na rovnakej stene.

V prvej možnosti môžeme v najhoršom prípade vytiahnuť najprv všetkých 9 kociek, ktoré nespĺňajú podmienky. Teda ak si chceme byť istí, musíme ich vytiahnuť 10.

V druhej spĺňajú hľadané podmienky všetky kocky až na jednu. Teda musíme vytiahnuť 2.

b) Opäť máme kocky, ktoré majú na sebe všetky tri farby. Teda rovnako ako v predošlom b) je výsledok 27.

c) Postup je rovnaký ako v predošlom c), keď vytiahneme štyri kocky, určite aspoň tri z nich majú žltú farbu.

Komentár: Príklad ste väčšinou vyriešili dobre (podľa niektorého z vysvetlení zadania). Niektorí si niekedy nevšimli nejaké kocky, čo už, to sa stáva. Iní zas niekde napísali iba výsledný počet kociek bez zdôvodnenia, za to sme veľa bodov dávať nemohli.

Príklad č. 6 (opravoval Tomáš):

Zadanie: V mrakodrape so 49 poschodiami sú v piatich rôznych výťahoch (každý v inej šachte) uväznení piati ľudia. Teraz sú výťahy na 17., 26., 20., 29. a 31. poschodí - v tomto poradí. Aby sa dvere otvorili, výťahy musia byť zostupne za sebou na 25. až 21. poschodí, presne v tomto poradí (teda ten čo je teraz na 17. bude na 25. poschodí.) Výťahy majú iba dva druhy príkazov, ktoré sa vždy vzťahujú na dva výťahy. *Prvý príkaz:* jeden výťah 8 poschodí hore, druhý výťah 13 poschodí dole. *Druhý príkaz:* jeden výťah 13 poschodí hore a druhý 8 dole. Uväznení ľudia sa rozhodnú vziať situáciu do vlastných rúk a dostať sa von. Koľko najmenej príkazov potrebujú na to, aby sa im to podarilo?

Riešenie: Pri tomto type príkladov sa oplatí najskôr zistiť, či sa vôbec dá tento príklad vyriešiť. A to veľmi jednoduchým spôsobom, spočítaním celkového rozdielu poschodí. Najprv spočítame poschodia, na ktorom sa nachádzajú výťahy na začiatku.

$$17 + 26 + 20 + 29 + 31 = 123$$

Ďalší krok je spočítať poschodia, na ktoré sa chcú dostať.

$$25 + 24 + 23 + 22 + 21 = 115$$

Celkový rozdiel poschodí medzi pôvodným stavom a stavom, ktorý chceme dosiahnuť je $123 - 115 = 8$. Jedným stlačením gombíkov sa dokážeme posunúť o 13 poschodí v jednom smere a 8 v druhom smere. To znamená, že v jednom kroku dokážeme celkový súčet poschodí zmeniť o $13 - 8 = 5$ poschodí. Takže potrebujeme zmeniť celkový počet poschodí o 8, pričom v jednom kroku dokážeme zmeniť len o 5. To sa však nedá, lebo 8 nie je násobkom čísla 5.

Odpoveď: Úloha nemá riešenie.

Príklad č. 7 (opravovala Zuzka):

Zadanie: S dedkom hráš hru so zápalkami. Vyberieš celé číslo medzi 1 a 50 vrátane. Potom začnete hru so spoločnou kôpkou s presne toľko zápalkami, koľko si vybral. Po ťahoch odpočítavate druhú mocninu prirodzeného čísla (nie väčšiu ako číslo, ktoré si vybral) v zápalkách. Hra končí, keď zostane 0 (nemôžeš odpočítať viac, ako tam momentálne je) zápaliek. Prehráva ten, ktorý ako prvý nemôže odpočítavať. Koľko čísel môžeš vybrať tak, aby si vyhral, keď začínaš ty? Obaja hráte najlepšie ako viete a každý chce vyhrať.

Riešenie: Ak chceme vyhrať, najskôr musíme poriadne poznať pravidlá hry. Hráč vždy odoberá taký počet zápaliek od 1 do 50, ktorý je zároveň druhou mocninou. To znamená, že môže odobrať $1, 4, 9, 16, 25, 36$ alebo 49 zápaliek. Hra končí, keď už hráč nemôže odobrať žiadnu zápalku. Keďže hráč môže vždy odobrať 1 zápalku, tak taká situácia nastane až s 0 zápalkami.

Keď hráme nejakú takúto hru s pomerne jednoduchými pravidlami, často sa oplatí nachádzať výherné a prehrávajúce pozície. V tomto prípade to budú počty zápaliek. Ak pred naším ťahom zostane na kope 0 zápaliek, prehrali sme. To znamená, že 0 je prehrávajúci počet zápaliek. Tak ako nechceme mať pred naším ťahom prehrávajúci počet zápaliek v kope, tak chceme, aby v nej po našom ťahu bol prehrávajúci počet. Výherné počty zápaliek sú preto také, z ktorých vieme odobrať zápalky tak, aby po našom ťahu bol v kope prehrávajúci počet zápaliek. Ďalšie prehrávajúce počty zápaliek sú zas také, z ktorých nevieme odobrať taký počet zápaliek, aby tam zostal prehrávajúci počet. Teda by mal po našom ťahu súper v kope vyhrávajúci počet, čo určite nechceme.

Nezostáva nič iné, ako postupne určovať výherné a prehrávajúce počty zápaliek. 0 je prehrávajúca. Všetky počty, z ktorých sa dá na jeden ťah dostať na 0, sú preto výherné. To sú $1, 4, 9, 16, 25, 36$ a 49. O počte 0 a 1 už viem, čo sú. Zoberme si 2. Jediné, čo sa dá urobiť, je odobrať 1 zápalku, čím by počet zápaliek zostal výherný. Preto je počet zápaliek 2 prehrávajúci. Zase označíme všetky počty, z ktorých sa dá na jeden ťah dostať na počet 2 ako výherné. Sú to $3, 6, 11, 18, 27$ a 38.

Pre zjednodušenie si uvedomíme, čo sa tu deje. Vždy, keď nájdeme nejaký prehrávajúci počet, tak označíme ako výherné všetky počty, z ktorých sa dá na jeden ťah dostať na ten počet. Vždy najmenší počet, o ktorom ešte nevieme, čo je, je určite prehrávajúci. Je to preto, lebo o všetkých menším počtoch vieme, či sú výherné alebo prehrávajúce. Všetkým menším prehrávajúcim sme určili, z ktorých počtov sa na ne dá dostať na jeden ťah. To znamená, že sa z nášho počtu určite nedá dostať na žiaden menší prehrávajúci a preto je určite prehrávajúci. Takto postupujeme, až kým nevieme o všetkých počtoch, čo sú zač.

Je to trochu práce, ale som si istá, že to hravo zvládnete. Po nejakom tom vypisovaní by vám malo vyjsť, že prehrávajúcimi počtami sú: $0, 2, 5, 7, 10, 12, 15, 17, 20, 22, 34, 39$ a 44. Výherné sú všetky ostatné. Keď teda vieme o každom počte zápaliek, či je výherný alebo prehrávajúci, môžeme odpovedať na otázku. Ak ideme ako prvý, tak určite chceme mať v kope vyhrávajúci počet zápaliek. Takže tam chceme 1, 3, 4, 6, 8, 9, 11, 13, 14, 16, 18, 19, 21, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 35, 36, 37, 38, 40, 41, 42, 43, 45, 46, 47, 48, 49 alebo 50. To je spolu 38 čísel.

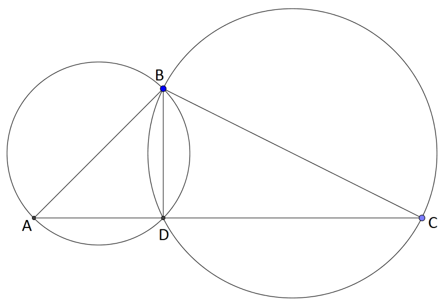
Odpoveď: Môžeme vybrať 38 čísel.

Komentár: Nezabúdaje, že je dobré všetko napísať jasne. Pri tomto príklade som si totiž ja, ktorá som vedela, ako sa to rieši, veľmi ľahko vedela domyslieť, ako ste sa dostali k správnym číslam, no mali ste to mať aj jasne napísané. Ak ste nemali, musela som strhávať body. Vaše riešenie má byť tak podrobne napísané, aby človek, ktorý vidí tento príklad prvýkrát (a je schopnosťami na vašej úrovni), chápal a nemusel sa pri tom veľmi zamýšľať.

Príklad č. 8 (opravovali Ľubo, Zuzka V., Sára):

Zadanie: Keď zakrúžkujeme body X a Y, znamená to, že vytvoríme kružnicu prechádzajúcu X a Y so stredom v strede úsečky XY. Raz sme zakrúžkovali body A a B a potom B a C. Okrem bodu B nám vznikol druhý priesečník kružníc D. Vieme, že pomer obsahov $\triangle ABD : \triangle BCD$ je $1 : 2$ a že úsečka CD je dvakrát dlhšia ako BD. Aký je uhol ABD?

Riešenie: V príkladoch tohto typu nám vie veľmi pomôcť, keď si nakreslíme obrázok. Náš obrázok by mohol vyzerať napríklad takto (Obrázok 1):



Obr. 1: Náš obrázok

Z obrázku vidíme, že bod D leží na úsečke AC. To si vieme veľmi jednoducho dokázať tak, že uhly ADB a BDC sú vďaka Tálesovej kružnici pravouhlé. Preto uhol ADC je priamy uhol. Označme si stranu BD ako a. Zo zadania vieme, že úsečka CD je dvakrát dlhšia, čiže jej veľkosť bude $2a$. Taktiež sme si ukázali, že BD je kolmá na CD, takže vieme zistiť, čomu sa rovná obsah $\triangle BCD$. $S_{\triangle BCD} = \frac{a \cdot 2a}{2} = a^2$. Zo zadania taktiež vieme, že pomer obsahov $\triangle ABD$ a $\triangle BCD$ je $1 : 2$. Obsah $\triangle ABD$ bude teda $S_{\triangle ABD} = \frac{a^2}{2}$. Nie je problém si z tohto vypočítať veľkosť AD, ktorá bude a. Teraz si všimneme, že trojuholník $\triangle ABD$ je rovnoramenný a keďže jeho ramená zvierajú pravý uhol, tak uhol ABD je $45°$.

Odpoveď: Veľkosť uhla ABD je $45°$.

Komentár: Príklad väčšina spočítala správne. Občas niekto nedostatočne ukázal, že prečo body A, D a C ležia na priamke, za čo sme strhli nejaké tie body. Treba si dávať pozor, keď tvrdíme, že niečo platí, aby bolo dostatočne zdôvodnené, prečo to platí.

Príklad č. 9 (opravoval Zajo):

Zadanie: Na štvorčekovej sieti 10×10 je niekoľko dvojíc kameňov (to, ktoré kamene sú navzájom dvojica je určené dopredu a nemení sa). S kameňom môžem hýbať o políčko doprava, doľava, hore, dole vždy o 1 políčko, ale musím zároveň pohnúť druhým kameňom dvojice opačným smerom. Dva kamene rovnakej dvojice nesmú byť na rovnakom mieste, dva kamene rôznych dvojíc áno. Za každú dvojicu dostávam body rovné súčinu x-ových súradníc kameňov plus súčinu ich y-ových súradníc. Na mriežke mám dve dvojice kameňov, jednu na súradniciach $[4,5]$ a $[7,3]$ a druhú na $[0,1]$ a $[5,4]$. Ďalší kameň máme na $[3,2]$. K nemu môžeme umiestniť druhý kameň z dvojice na ľubovoľné miesto.

Po umiestnení posledného kameňa presuniem všetky kamene do polohy tak, že v tejto polohe vytvárajú priamky prechádzajúce každou dvojicou kameňov pravouhlý trojuholník s obsahom 8. Aký je maximálny bodový zisk v tomto prípade a koľkými spôsobmi sa tento zisk dá dosiahnuť?

Riešenie: Keď začneme riešenie skúšaním niekoľkých možností, tak si môžeme všimnúť nasledovné, na prvý pohľad zrejme platné tvrdenia:

- V zadaní sa hovorí o mriežke 10×10 a niektoré kamene majú súradnicu rovnú 0, preto je mriežka číslovaná od 0 po 9.
- Keď máme dvojicu kameňov, tak najvyššie skóre táto dvojica má, keď sú kamene pri sebe.
- Tým pádom zrejme čím ďalej dáme posledný kameň, tým väčšie bude môcť byť celkové skóre.
- Pravouhlé trojuholníky s obsahom 8 sa nám darí stavať väčšinou iba s celočíselnými stranami.
- Z našich pokusov je najvyššie skóre väčšinou 113

Okrem prvého bodu, sú to všetko len domnienky z prvého pozorovania (zoradené od zjavnejších, k pre niekoho menej zjavným). Aj tak nám ale môžu pomôcť, pri hľadaní maximálneho skóre.

Na začiatok by pomohlo, ak by platilo tvrdenie, že kamene blízko seba majú najvyšší súčet. Potom vieme totiž pre nejakú dvojicu povedať, aké bude jej maximálne skóre. Nech máme teda dva kamene, na súradniciach $[a,b]$, $[c,d]$. Ľubovoľne nimi hýbeme, tak vždy jednému jeho súradnicu (buď x-ovú, alebo y-ovú) zvýšime o 1 a druhému znížime. Pre túto dvojicu je celkové skóre za ňu rovné $ac + bd$.

Ak hýbeme dvojicou v smere x-ovej osi(vľavo a vpravo), ovplyvňujeme prvú časť celkového skóre (člen ac). Napr. pri posune prvého kameňu doprava zmeníme

$$ac \to (a+1)(c-1) = ac + c - a - 1$$

Podobne, pri vertikálnom posune ovplyvňujeme iba druhú časť skóre. Aby sme skóre maximalizovali, môžeme sa na to preto dívať ako dve nezávislé časti, najprv sa snažíme dosiahnuť čo najvyšší súčin x-ových súradníc a potom y-ových.

Položme si otázku, kedy bude skóre v jednom z týchto smerov najvyššie. Ak si označíme $s = a + c$, tak by sme radi zistili maximálnu hodnotu výrazu $ac = a(s-a) = as - a^2$. Pri takýchto otázkach vieme často využiť vlastnosť, že druhá mocnina reálneho čísla je nezáporná ($x^2 \geq 0$).

Skúsme k nášmu výrazu pripočítať a odpočítať to isté (teda jeho hodnotu nezmeníme) tak, aby nám vznikol nejaký člen umocnený na druhú. To sa dá napríklad takto:

$$as - a^2 = -(a^2 - as) = -\left(a^2 - as + \frac{s^2}{4} - \frac{s^2}{4}\right) = -\left(\left(a - \frac{s}{2}\right)^2 - \frac{s^2}{4}\right) = -\left(a - \frac{s}{2}\right)^2 + \frac{s^2}{4}$$

Súčet máme daný (s), preto ak hľadáme maximum tohoto výrazu, chceli by sme nájsť najväčšiu hodnotu prvého členu. Keďže niečo na druhú, bude aspoň 0, tak po prenásobení -1, to bude najviac 0. Prvý člen je teda najväčší ak je rovný 0. Dostávame:

$$0 = -\left(a - \frac{s}{2}\right)^2 \to a - \frac{s}{2} = 0 \to a = \frac{s}{2}$$

Keď je s párne, ako je to pri y-ových súradniciach prvej dvojice (3 a 5), jednoznačne vieme, že najväčší súčin nastane ak $a = 4$.

Čo sa ale deje, ak je s nepárne (napr. $7 + 4 = 11 = s$)? Vtedy nám napadajú ako najlepší adepti dve najbližšie hodnoty, teda $5, 6$ v ľubovoľnom poradí. To je naozaj pravda a môžeme si to všimnúť z toho, že o koľko sa zmení súčin, pri posune (vyššie uvedené). Zmení sa o $c - a - 1$. Aby sa nám posun „oplatil“, mal by zvyšovať súčin, inými slovami $c - a - 1 > 0$,$c > a + 1$ (Pri posune opačným smerom dostávame podobnú nerovnosť $a > c + 1$). Práve tento argument obstojí, keď je s nepárne, pretože ak sa naše dve súradnice líšili o viac ako 1, tak sa skóre za nich vieme určite zvýšiť.

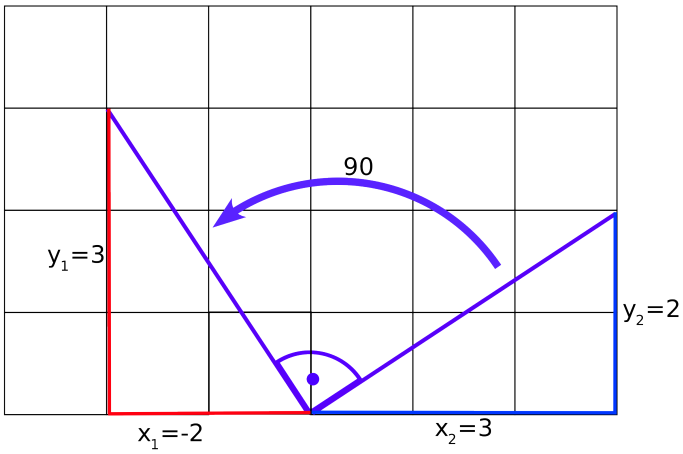
Dôsledok: Dvojica kameňov má najvyššie skóre, ak sú kamene pri sebe (priamo, prípadne dve možnosti šikmo).

Očíslujme si teraz dvojice ako v zadaní, prvou bude $[4, 5]$ a $[7, 3]$, druhá $[0, 1]$ a $[5, 4]$ a tretia je $[3, 2]$ a $[?, ?]$.

Keď už poznáme náš dôsledok, tak pre prvú dvojicu nám ako usporiadanie z najvyšším súčtom vychádza poloha $[5, 4], [6, 4]$. Pre druhú dvojicu sú dve možnosti, $[2, 3], [3, 2]$, resp. $[2, 2], [3, 3]$.

V tejto fáze príkladu sa oplatí skúšať. Keď sa totiž pohráme s možnosťami aké máme, často nám to pomôže nahliadnuť čo by mohli byť ďalšie kroky. Po chvíli skúšania, zrejme nájdeme polohu pre posledný kameň $[7, 9]$, kedy dostávame celkové skóre 113. Nič lepšie sa nám nedarí vymyslieť, poďme preto skúsiť dokázať, že je to naozaj najviac.

Predtým si teda pomôžme ešte jedným detailom. Konečná poloha tvorí pravouhlý trojuholník, to znamená že práve dve z priamok, ktoré sú tvorené dvojicami, budú na seba kolmé. Presuňme sa na chvíľu do sveta v mriežke a ukážme si, čo môže znamenať taká kolmosť.



Obr. 2: Ilustrácia kolmosti

Označme rozdiely medzi súradnicami postupne x_1, x_2, y_1, y_2 ako na obrázku. Dve čiary sú na seba kolmé, keď jednu dostaneme tak, že otočíme druhú o 90°. Na obrázku vidíme, že potom sa prenesie $y_2 \to x_1$ a $x_2 \to y_1$. Dajme si ale pozor na to, že x_1 je záporné, lebo je to rozdiel na opačnú stranu ako x_2.

To znamená, že z rozdielov x_2, y_2 sme urobili $x_1 = -y_2, y_1 = x_2$. Na tento proces sa môžeme dívať tak, že sme vymenili x-ové a y-ové rozdiely a jeden z nich sa stal záporným (ale ich veľkosti sa zachovali).

$$x_2, y_2 \to -y_2, x_2$$

Ak by sme sa na to pozerali z opačnej strany (rotovali vpravo, nie vľavo, tak záporný by bol ten druhý).

Predstavme si teraz, že by na seba mali byť kolmé čiary z prvých dvoch dvojíc zo zadania. Potom bude musieť platiť, že ak si zoberieme nejakú časť čiary prvej dvojice, a jej x-ový a y-ový rozdiel, tak keď tieto súradnice vymeníme a jednu vynásobíme -1, dostaneme aké sú súradnicové rozdiely v druhej čiare (toto vyplýva z predchádzajúceho odseku).

9		TOP skóre	NN	PN
8		$\downarrow$	NP	PP
7		$\downarrow$	NN	PN
6	$\leftarrow$	$\downarrow\leftarrow$	$\leftarrow$	Príliš malé skóre
	6	7	8	9

Tabuľka 2: Orezanie okraja tabuľky a parita rozdielov v rohu

Pri pohybe dvojicou kameňou zachovávame jednu zaujímavú vlastnosť. Vždy sa totiž pohneme kameňmi do protichodných smerov. To znamená, že ich rozdiel v tomto smere buď zväčšíme o 2 (ak sa pohnú „od seba“), alebo zmenšíme o 2 (ak sa pohnú „k sebe“). Preto ak bol rozdiel x-ových, alebo y-ových súradníc párny (nepárny), tak aj po posunoch ostane rovnako párny (resp. nepárny).

Počiatočný rozdiel prvej dvojice kameňov je $3, -2$, teda x-ový je párny a y-ový nepárny. Pre druhú dvojicu dostávame $5, 3$, kedy sú oba rozdiely nepárne.

Už sme si vysvetlili, že na to, aby na seba dve čiary boli kolmé, tak musíme vedieť z jednej „vyrobiť“ časť druhej tak, že vymeníme jej rozdiely a jeden vynásobíme -1. V tomto postupe sa ale nezmení to, že či je rozdiel párny, alebo nepárny. Preto ak máme dve čiary, z čoho jedna má nepárne rozdiely pre obe súradnice a druhá jeden párny a jeden nepárny rozdiel súradníc, tak na seba nikdy nebudú kolmé.

Dôsledok 2 Čiary prvej a druhej dvojice kameňov na seba nikdy nebudú kolmé. (Musí byť teda kolmá čiara tretej dvojice na jednu z prvých dvoch čiar)

Pre naše zatiaľ najlepšie riešenie platí, že všetky tri dvojice kameňov sú „najviac pri sebe“, teda pre dané počiatočné rozmiestnenie je to najväčšie možné skóre. Poďme teraz skúmať, kam inam by sme museli položiť náš posledný kameň, aby sme to prekonali. Aby sme totiž získali vyššie skóre, určite musíme získať viac než v našom riešení za tretiu dvojicu. (Lebo za prvé dve už viac nezískame) Teraz za ňu získavame $5 \cdot 5 + 5 \cdot 6 = 55$ bodov.

Na čím menšie súradnice kameň položíme, tým menšie bude aj maximálne dosiahnuteľné skóre. Preto môžeme jednu časť tabuľky vylúčiť už teraz, lebo vieme, že tam sa nám položiť posledný kameň neoplatí.

Podobne vieme tabuľku odrezať nižšie a vľavo od $[9, 6]$. Pre túto polohu, by bolo tiež maximálne skóre v strede, teda $[(9 + 3)/2, (6 + 2)/2]$. Odhliadnuc od toho, že kamene z dvojice sa nesmú prikrývať, by toto bolo stále málo, takže takýmto výberom väčšie skóre získať nevieme.

Ostáva nám 6 polôh.

1. $[8, 8], [9, 8]$ môžeme rovno vylúčiť, pretože majú buď oba rozdiely ku $[3, 2]$ párne, alebo x-ový párny a y-ový nepárny, preto čiara kolmá na nich by musela mať oba rozdiely párne, alebo obrátene y-ový párny a x-ový nepárny. Ani jedna z čiar tvorených prvými dvomi dvojicami toto ale nespĺňa.
2. Pre $[8, 7]$ by sme maximálne skóre, dostali vtedy, ak by sme presunuli tretiu dvojicu na $[5, 4], [6, 5]$, resp. $[5, 5], [6, 4]$. Hodnota týchto polôh je ale iba $50 < 55$, teda táto poloha posledného kameňa nevyhovuje.
3. Ostávajú možnosti $[9, 7], [8, 9], [9, 9]$.

Teraz si žiaľ už treba nasadiť gumené rukavice a pustiť sa do bažín.

Pre každý z týchto prípadov vieme urobiť nasledovnú úvahu: Z počiatočného umiestnenie najprv kamene presunieme do polohy, kde je skóre dvojice maximálne. Pre tieto tri prípady sú to postupne nasledovné polohy:

$$[6, 4][6, 5], [5, 5][6, 6]/[5, 6][6, 5], [6, 5][6, 6]$$

Z nášho prvého dôsledku tiež vyplýva, že postupným odďaľovaním sa bude skóre zmenšovať. V našom najlepšom riešení, čo sme našli je skóre poslednej dvojice 55. Preto sa postupným posúvaním do strán od optimálneho rozmiestnenia budeme snažiť nájsť všetky polohy, kde je to skóre ešte väčšie než 55. (Ostatné možnosti budú horšie ako tá čo sme našli.)

a) Možnosť $[9, 7]$ bude v tomto zmysle najjednoduchšia, pretože jej optimálne umiestnenie je $[6, 4][6, 5]$, čo dáva skóre 56 a ľubovoľný posun do strany ho zmenší o viac ako jedna, takže by už nebolo väčšie než 55.

#	Celkové skóre	X-ové skóre	Y-ové skóre	Pozícia prvého kameňa	Pozícia druhého kameňa
1	56	28	28	[4,4]	[7,7]
2	56	28	28	[4,7]	[7,4]
3	58	30	28	[5,4]	[6,7]
4	58	30	28	[5,7]	[6,4]
5	58	28	30	[4,5]	[7,6]
6	58	28	30	[4,6]	[7,5]
7	60	30	30	[5,5]	[6,6]
8	60	30	30	[5,6]	[6,5]

Tabuľka 3: Možnosti pre skóre pri $[8, 9]$

9										
8										
7						-9	-9			
6					-6	-4	-4	-6		
5				-9	-3	-1	-1	-3	-9	
4				-6	-2	0	0	-2	-6	
3				-9	-3	-1	-1	-3	-9	
2					-6	-4	-4	-6		
1						-9	-9			
0										
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Tabuľka 4: Straty skóre pri posúvaní prvej čiary, aby bola preponou

Z už dokázaného vieme, že táto čiara bude musieť byť kolmá na prvú čiaru z zadania. Dve odvesny sú vtedy ronobežné s y-ovou osou cez stĺpec č.6 a z x-ovou cez riadok č.4.
Aby posledná čiara dotvorila trojuholník preponou, musí byť druhá dvojica na $[2, 3][3, 2]$. Lenže tento trojuholník nemá obsah 8 (Obe odvesny sú dlhšie ako 4, teda obsah je určite viac ako 8) a keď posunieme druhú dvojicu do ľubovoľného smeru, okrem polohy $[2, 2][3, 3]$ znížime skóre aspoň o dva. Túto možnosť môžeme s kľudným srdcom tiež vylúčiť, lebo opäť platí, že obe odvesny sú kratšie než 4, teda aj obsah bude menší ako 8. (Lebo ho vypočítame ako polovicu súčinu dĺžok odvesien).

b) $[8, 9]$
Podobnou úvahou vieme zostrojiť tabuľku s možnosťami umiestnení, kedy je skóre tretej dvojice aspoň 55. Dostávame tak 8 možností. Vo všetkých bude platiť, že čiara nimi tvorená je kolmá na čiaru druhej dvojice.

1. Pre možnosti $1, 2, 7, 8$ platí, že priamky v nich tvorené majú rovnaký rozdiel na oboch osiach (teda sú pod uhlom 45°). Z toho vyplýva, že optimálna voľba pre čiaru druhej dvojice bude vždy buď $[2, 2][3, 3]$, alebo $[2, 3][3, 2]$.
   Ostáva nám v každom z prípadov sa pokúsiť doplniť trojuholník čiarou prvej dvojice na obsah 8. Vieme však, že aby zostala zachovaná podmienka, že v tomto prípade získame viac ako 113 bodov, smieme kamene prvej dvojice posunúť najviac o toľko, aby sa skóre za nich zmenšilo o menej, než sa zvýši skóre tretej dvojice oproti pôvodným 55. (napr. v možnostiach $1, 2$ smieme posunúť kamene prvej dvojice iba tak, aby sme nestratili viac ako 1 bod. Inak by skóre, ktoré získame bolo už menšie ako 113)
   Zostrojíme si preto tabuľku, v ktorej si zaznačíme, koľko skóre stratíme oproti optimálnej polohe prvej dvojice. Z nej vidíme, ktoré možnosti treba a ktoré netreba skúmať.
   V prípadoch $1, 2$ overíme, že prepona cez $[5, 3][6, 5]$, resp. cez $[5, 5][6, 3]$ neutvorí pravouhlý trojuholník s čiarami, ktoré už máme. Toto sa dá poľahky dokázať z náčrtu, ako sme to už raz urobili.

#	Celkové skóre	X-ové skóre	Y-ové skóre	Pozícia prvého kameňa	Pozícia druhého kameňa
1	57	27	30	[3,5]	[9,6]
2	57	27	30	[3,6]	[9,5]
3	60	32	28	[4,4]	[8,7]
4	60	32	28	[4,7]	[8,4]
5	62	32	30	[4,5]	[8,6]
6	62	32	30	[4,6]	[8,5]
7	63	35	28	[5,4]	[7,7]
8	63	35	28	[5,7]	[7,4]
9	64	36	28	[6,4]	[6,7]
10	65	35	30	[5,5]	[7,6]
11	65	35	30	[5,6]	[7,5]
12	66	36	30	[6,5]	[6,6]

Tabuľka 5: Možnosti pre skóre pri $[9,9]$

Vo všetkých prípadoch sa totiž stane to, že obsah trojuholníku budeme vedieť zhora, alebo zdola odhadnúť na základe dĺžok prepôn. Buď ukážeme, že ich súčin je väčší ako 16, alebo naopak menší, a preto je obsah vzniknutého trojuholníka väčší, alebo menší než 8.
Pri $7,8$ to bude o niečo viac počítania. Tieto polohy zvyšujú skóre, ktoré dosahujeme až o 5, preto musíme overiť viacero polôh pre prvú dvojicu. (Konkrétne 10, všimnime si, že práve ony určovali, dokedy sa nám oplatí vypisovať si rozdiely, ktoré vzniknú posunutím.)
Opäť bude fungovať prístup popísaný v predchádzajúcej možnosti.
Aby sme to len tak vláčne neopisovali, ukážme si to na jednej z možností konkrétne. Napr. pri 7, ak by sme posunuli prvú dvojicu na $[5,2][6,6]$.
Priamku druhej dvojice pretne naša prepona niekde v štvrtom stĺpci a prvom riadku. Z toho, že naša prepona má x-ový rozdiel 1 a y-ový 3 vieme, že to bude v pravej polovici tohto stĺpca. Prvá odvesna bude teda dlhá aspoň $\frac{3}{2}\sqrt{2}$
S treťou priamkou sa pretne prepona niekde v šiestom stĺpci. Z toho vieme, že dĺžka druhej odvesny je aspoň $3\sqrt{2}$. (Pri oboch odhadoch sme si uvedmili, že odvesny sa pretínajú v strede medzi $[2,3][3,2]$ a tiež že dĺžka uhlopriečky políčka je z pytagorovej vety $\sqrt{2}$.
Teraz keď vynásobíme spodné odhady dĺžok odvesien, dostávame

$$\frac{3}{2}\sqrt{2}\cdot 3\sqrt{2} = \frac{9\cdot 2}{2} = 9 > 8$$

tým pádom tento trojuholník má obsah aspoň 9 (nie presne, lebo sme robili iba spodné odhady dĺžok odvesien), to nám ale stačí, pretože určite nebude mať obsah 8.

2. Prípady $3,4,5,6$ ošetríme obdobne. V nich platí, že rozdiel jednej súradnice je 1 a druhej 3, teda druhú dvojicu budeme musieť vždy patrične posunúť buď na $[2,1][3,4]$ príp. $[1,2][4,3]$
Týmto posunom však stratíme ďalšie dva body, preto nám bude stačiť, ak preskúmame polohy tretej dvojice, kedy získavame aspoň o dva body viac. Následne budeme podobne ako v predchádzajúcej možnosti posúvať prvú dvojicu tak, aby sme stále dosahovali celkové skóre aspoň 113. Pomocou už vysvetlenej odhadovej techniky prídeme na to, že nám opäť nevznikne žiaden pravouhlý trojuholník s obsahom práve 8.

c) $[9,9]$
Analogicky, 12 možností. Možností pre umiestnenie oboch kameňov v šiestom stĺpci je viac, ale uvádzamu len tú, kde sú kamene najbližšie k sebe, keďže ďalšie by boli rovnaké, čo sa týka tvorby trojuholníkov, iba by za nich bolo menej bodov. V tomto prípade bude musieť byť tretia čiara kolmá na čiaru tvorenú prvou dvojicou kameňov.
Naša práca bude analogická k tej, čo sme robili pri $[8,9]$. Takisto si urobíme tabuľku rozdielov, ktoré

9										
8										
7										
6										
5	-12	-8	-6	-6	-8	-12				
4	-10	-4	-2	-2	-4	-8				
3	-6	-2	0	0	-2	-6				
2	-6	-2	0	0	-2	-6				
1	-8	-4	-2	-2	-4	-8				
0	-12	-8	-6	-6	-8	-12				
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Tabuľka 6: Straty skóre pri posúvaní druhej čiary, aby bola preponou

nastávajú pri posune druhej dvojice. Okraj tabuľky bude tentokrát limitovaný okrajom hracej plochy (kamene mimo nej posunúť nesmieme).

1. $1, 2$ vieme vylúčiť hneď, už len pri posune prvej dvojice, aby sme zaručili kolmosť priamok stratíme aspoň 9 bodov. (posun o 3 hore, resp. dole)
2. $3, 4$ tu za prvú dvojicu tiež stratíme viac ako 9 bodov, a získame navyše iba 5 ,takže lepšiu možnosť nenájdeme.
3. V $5, 6$ získavame navyše 7 bodov, za cenu aspoň 4, teda potrebujeme overiť 16 možností pre druhú čiaru, ktoré poľahky vieme vylúčiť ako už predtým, jednoducho odhadom príliš veľkého / malého obsahu.
4. $7, 8, 10, 11$ fungujú podobne, niečo získame, niečo stratíme a odhadneme obsahy.
5. Pri $9, 12$ sa nachvíľku zastavme, tu hneď vidíme, že tretia čiara bude musieť byť kolmá na prvú a teda odvesny budú rovnobežné s osami. Avšak obe orientácie druhej priamky s optimálnym skóre pre nás budú príliš malé. Keď budeme hýbať druhou dvojicou, bude stačiť zopakovať niekoľko odhadov.

Týmto sme vyčerpali všetky možnosti, ktoré by nám mohli dať skóre vyššie, ako 113.
Odpoveď: 113 je najvyššie možné skóre, aké vieme dosiahnuť.
Komentár: Napriek tomu, že príklad je pomerne pracný a zložitejší, než sa zdá na prvý pohľad, okrem prvých dvoch dôsledkov, ktoré sme si odvodzovali (tie aj tak veľa z vás už pozná), sme používali len sedliacky rozum a správne rozoberali možnosti.

Prémia (opravoval MaťoPaťo):

Zadanie: Hra menom Game of Life má nasledovné pravidlá: Hrá sa na štvorčekovej mriežke, pričom v každom políčku môže byť buď živá, alebo neživá bunka. Každé kolo sa vyhodnotia nasledujúce podmienky pre každú bunku: 1. Každá živá bunka s menej než dvoma živými susedmi zomrie. 2. Každá živá bunka buď s dvoma, alebo tromi živými susedmi zostáva žiť. 3. Každá živá bunka s viac než tromi živými susedmi zomrie. 4. Každá mŕtva bunka s práve tromi živými susedmi sa oživí. Susedná bunka znamená bunka, ktorá sa dotýka druhej stranou alebo vrcholom. Máte nekonečne veľkú hraciu plochu. Ako treba položiť 20 buniek, aby sme po 12 kolách mali čo najviac buniek? Ako výsledok nám pošlite začiatočné a konečné rozloženie buniek. Odporúčame použiť počítačový simulátor Life, napríklad: http://pmav.eu/stuff/javascript-game-of-life-v3.1.1/
Riešenie: Úloha má pomerne jednoduché zadanie. Do simulátora zo zadania budeme umiestňovať 20 živých buniek a hľadať také umiestnenie, aby sme po dvánastich kolách mali čo najviac buniek. Najlepšie riešenie, ktoré ste našli bude mať po dvanástich kolách 138 živých buniek. Tu je link s týmto riešením, zobrazujúci počiatočné rozostavenie:

http://tinyurl.com/jzpd5ys

Odpoveď: Najlepšie riešenie má po dvanástich kolách 138 buniek.

Komentár: Najlepšie riešenie našli dvaja z vás. Toto riešenie bolo hodnotené ôsmimi bodmi. Najpočetnejšie riešenie viedlo ku 64 bunkám a bolo hodnotené dvoma bodmi.