Vzorové riešenia 3. kola zimnej série 2014/2015

Príklad č. 1 (opravovali Tete, Zuzka):

Zadanie:

Riešenie: Keďže číslo má byť deliteľné piatimi, musí končiť cifrou 0 alebo 5 (to je pravidlo deliteľnosti piatimi). Toto číslo je však palindróm a teda cifra, ktorou číslo končí, je rovnaká ako cifra, ktorou číslo začína.

Päťciferné číslo nemôže začínať cifrou 0, pretože vtedy by bolo štvorciferné. Prvá a piata cifra je teda 5.

Teraz potrebujeme na ostatné miesta dosadiť také cifry, aby mali ciferný súčet 14 ($24 - 5 - 5 = 14$). Aby sme mali súčin najmenší, musí byť v čísle aspoň jedna 0, vtedy bude súčin tiež 0. Menší ciferný súčin sa dosiahnuť nedá.

Keby bola 0 na druhom a štvrtom mieste (je to palindróm, takže musí byť buď na oboch alebo ani na jednom), musel by byť na treťom mieste ciferný súčet 14, ktorý sa však jednou cifrou dostať nedá. Čiže jediná možnosť je, že 0 bude v strede (teda na tretiom mieste). Potom musí byť na druhom a štvrtom mieste cifra 7 ($14 - 0 = 14$, $14 : 2 = 7$). Číslo s najmenším ciferným súčinom je preto 57075.

Aby sme zistili najväčší ciferný súčin, dosadíme si postupne na druhé a štvrté miesto cifry $1 - 9$, a vypočítame ich ciferný súčin.

Pri číslach 51_15 a 52_25 by sme na stredné miesto museli doplniť dvojciferné číslo, aby platil ciferný súčet 24, takže tieto dve možnosti môžeme vyškrtnúť.

Pri číslach 58_85 a 59_95 by sme museli doplniť zápornú cifru, aby ciferný súčet platil, takže to tiež nebude riešenie.

Správne možnosti teda sú tieto:

$53835 \to 5 \cdot 3 \cdot 8 \cdot 3 \cdot 5 = 1800$
$54645 \to 5 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 5 = 2400$
$55455 \to 5 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 5 = 2500$
$56265 \to 5 \cdot 6 \cdot 2 \cdot 6 \cdot 5 = 1800$
$57075 \to 5 \cdot 7 \cdot 0 \cdot 7 \cdot 5 = 0$

Z toho jasne vidíme, že najväčší ciferný súčin je 2500 a to pri čísle 55455.

Odpoveď: Najvačší ciferný súčin je 2500 pri čísle 55455 a najmenší 0 pri čísle 57075.

Komentár: Príklad ste mali takmer všetci správne a na 10 bodov, niektorým sme museli pár bodov strhnúť, pretože nedostatočne vysvetlili, prečo je prvá a posledná cifra práve 5, alebo zabudli nejakú možnosť. Poniektorí ste mali príklad pekne vyriešený, ale kvôli nepozornosti vám vyšiel nesprávny výsledok, takže nabudúce pozor na to!

Príklad č. 2 (opravovali MaťoPaťo, Tete, Zuzka):

Zadanie:

Riešenie: Najbežnejším riešením bolo skúšanie možností. Už ste od nás možno veľakrát počuli alebo čítali, že skúšanie nie je ideálny postup riešenia. Môže byť však najvhodnejší, ak vyskúšate úplne všetky možnosti, alebo dobre zdôvodníte, prečo tie, ktoré ste skúšali, sú všetky, ktoré je treba skúšať. Tiež ak tých možností nie je veľmi veľký počet.

Prvý spôsob riešenia je takýto. Najmenší trojciferný násobok čísla 19 je $6 \cdot 19 = 114$. Najväčší dosiahnuteľný ciferný súčet trojciferného čísla je $9 + 9 + 9 = 27$, takže násobky väčšie ako $27 \cdot 19 = 513$ určite nebudú mať vhodný ciferný súčet. Všetkým násobkom čísla 19 od 6-násobku po 27-násobok teda môžeme vypočítať ciferný súčet a zistiť, či je rovný tomu, koľkonásobok čísla 19 bolo číslo.

Druhý spôsob riešenia je bez skúšania a je veľmi elegantný, používa však aj rovnice. Cifry trojciferného čísla si označíme a, b, c. Zadanie si zapíšeme do rovnice, ktorú budeme upravovať:

$$100a + 10b + c = 19(a + b + c)$$

$$100a + 10b + c = 19a + 19b + 19c$$

a	b	c
1	9	0
1	7	1
1	5	2
1	3	3
1	1	4
2	8	5
2	6	6
2	4	7
2	2	8
2	0	9
3	9	9

Tabuľka 1: Možnosti čísel

$$81a = 9b + 18c$$

$$9a = b + 2c$$

Ak platí tento vzťah medzi ciframi, tak trojciferné číslo je vyhovujúce. Keďže b aj c sú cifry, môžu mať maximálne hodnotu 9 a preto $b + 2c$ bude maximálne 27. Z toho vyplýva, že a bude 1, 2 alebo 3. Nemôže byť 0, pretože je to prvá cifra čísla.

Postupne si to budeme zapisovať do tabuľky 1. Určíme si hodnotu a a potom budeme zväčšovať c a dorátavať b.

Odpoveď: Čísel vyhovujúcich zadaniu je 11 a sú to 114, 133, 152, 171, 190, 209, 228, 247, 266, 285, 399.

Komentár: Väčšina z vás tento príklad napísala krásne na 10 bodov. Bolo však zopár takých, ktorí skúšali postupne po číslo 285, a keď ďalšie číslo nesedelo, tak to vzdali. Ak nemáte poriadny dôvod na to prestať, nikdy neprestávajte!

Príklad č. 3 (opravoval Jumaj):

Zadanie:

Riešenie: Najprv si treba správne predstaviť situáciu. Štvrť je štvorčeková mriežka 7×7, ulice sú stĺpce a riadky. Križovatky sú štvorčeky mriežky. Križovatka je nestrážená vtedy, keď strážcovia nevidia na celý riadok a celý stĺpec, ktoré sa tam križujú. Všetky križovatky, na ktoré nevidia, sú nestrážené.

Teda počet nestrážených križovatiek je vlastne súčin počtu nestrážených riadkov a stĺpcov (keďže v štvorcovej mriežke každý riadok vytvára križovatku s každým stĺpcom).

Pôjdeme hľadať riešenia pomocou toho súčinu. Najprv ale zistime, koľko najviac a najmenej nestrážených vieme dostať, aby sme potom hľadali len počty medzi tým. Najmenej dostaneme, keď bude každý strážca strážiť iný riadok aj stĺpec. Potom budú nestrážené 4, ako môžete vidieť v tabuľke 2a. Najviac bude, keď čo najviac strážcov bude strážiť rovnaké riadky a stĺpce. Pre 4 strážcov by to bolo uloženie strážcov 2×2, my máme ale strážcov 5, teda ešte pridáme piateho ako v tabuľke 2b a počet bude 20.

Poďme postupne od 4. Počet 5 nemôžme dostať. 5 je prvočíslo, teda ak ho máme napísať ako súčin dvoch čísel, môže to byť len 5 a 1. Potom by musel byť nestrážený len jeden riadok alebo stĺpec. Máme však len 5 strážcov na 7 riadkov a stĺpcov, teda to nejde. Z rovnakého dôvodu ako pre 5 sa nebude dať dosiahnuť žiadny iný prvočíselný počet.

Príklady na počty 6, 8, 9, 10, 12, 15 a 16 môžete vidieť v priloženej tabuľke 2. Počty 14 a 18 nevieme dosiahnuť. 14 preto, lebo je to len buď $2 \cdot 7$ alebo $1 \cdot 7$. Obidva tieto súčiny obsahujú čísla, ktoré nevieme dosiahnuť ako počty nestrážených riadkov alebo stĺpcov pri 5 strážcoch. 18 je zas len buď $1 \cdot 7$, $2 \cdot 9$ alebo $3 \cdot 6$. Prvé dva súčiny znova obsahujú nedosiahnuteľné čísla. Tretí je tiež zlý, lebo ak chceme 6 nestrážených stĺpcov alebo riadkov, všetci strážcovia musia byť na jednej ulici. Potom bude nestrážený ale len 1 riadok, ak sú na jednom stĺpci alebo len 1 stĺpec, ak sú na jednom riadku. Teda kombinácia 3 a 6 sa nedá dosiahnuť.

Riešenie pre chybné zadanie: Toto riešenie je inšpirované riešením Terezy Škublovej. Ak je v štvrti 0 dozorcov, máme 49 nestrážených križovatiek. Pre zvyšok postupu uvažujme, že tam aspoň jeden je.

Ako v normálnom zadaní štvrť tvorí 7 stĺpcov a 7 riadkov. Počet riadkov, v ktorých je strážca, označme x, nazvime ich nestážené riadky. Počet stĺpcov, v ktorých je strážca, označme y, nazvime ich nestážené stĺpce.

Rovnako, ako v normálnom zadaní, je nestrážená križovatka priesečník nestráženého riadku a stĺpca. Počet nestrážených križovatiek je teda počet nestrážených stĺpcov krát počet nestrážených riadkov (keďže v štvorcovej mriežke každý riadok vytvára križovatku s každým stĺpcom). To sa rovná $(7-x)\cdot(7-y)$.

Keďže uvažujeme už len situácie, kde je aspoň jeden dozorca, x aj y sú medzi 1 a 7. Keďže narozdiel od normálneho zadania nemáme žiadne limitácie v počte dozorcov a teda ani v x a y, všetky možnosti tohoto súčinu sú riešeniami. Stačí len nájsť príklad na každú z nich, to však už necháme na vás :)

Odpoveď: Riešení je 9. Sú zobrazené v zjednotenej tabuľke 2.

		S				
			S			
				S		
					S	

(a)

					S	S
				S	S	S

(b)

		S	S			
				S		
					S	
						S

(c)

		S	S	S		
					S	
						S

(d)

			S			
			S	S		
					S	
						S

(e)

		S	S	S	S	
						S

(f)

		S	S	S	S	S

(g)

			S	S	S	S
						S

(h)

				S	S	
				S	S	
						S

(i)

Tabuľka 2: Riešenia príkladu

Komentár: Tento príklad mal originálne chybu v zadaní, ako sme sa vás na stránke a facebooku snažili upozorniť. Tí, ktorí príklad vyriešili dobre už predtým, alebo sa im oznam nedostal, riešili originálne zadanie. Aj medzi nimi však boli krásne riešenia. Celkovo to ale mohlo byť lepšie, veľmi veľa z vás napísalo len všetky možnosti, čo našlo, a neodôvodňovalo, prečo sú všetky. V Rieškach ide vždy o postup, preto sme vám za toto nemohli dať veľa bodov. Potešilo ma, že ste našli veľa rôznych spôsobov, ako sa dostať k výsledku.

Príklad č. 4 (opravovali Jumaj, Dada B.):

Zadanie:

Riešenie: Postupov bolo niekoľko, ukážeme si jeden z nich. K dispozícií máme 3 políčka. To, na ktorom stojíme, jedno pred nami a jedno za nami. Z toho vyplýva, že každá dvojica krokov (1 a 2, 3 a 4, …) musí byť zložená z jedného kroku na jeden smer a potom naspäť.

Dvojice pre jednotlivé postupy:

(1) 1 a 2, 3 a 4, 5 a 6, 7 a 8, 9 a 10, 11 a 12
(2) 2 a 4, 6 a 8, 10 a 12
(3) 3 a 6, 9 a 12
(4) 4 a 8, 12
(5) 5 a 10
(6) 6 a 12

Bolo si treba uvedomiť, že celý set pohybov je symetrický, teda netreba pracovať s dvomi opačnými možnosťami, stačí jedna, a v prípade, že nám vyjde, tak ju prepíšeme presne opačne.

Na začiatok si povedzme, že prvý krok bude hore (H). Druhý teda bude smerom dole (D), kvôli postupnosti pre každý krok. Ak je druhý krok smerom dole, tak štvrtý musí byť smerom hore. Musí, aby platila dvojica 2 a 4 z podmienky (2). K štvrtému kroku smerom hore patrí ôsmy smerom dole, ako hovorí podmienka pre každý štvrtý krok. Ak máme osmy smerom dole, tak z podmienky pre každý druhý krok vyplýva, že šiesty ide smerom hore. Ak ide šiesty smerom hore, tak má dve opačné dvojice. Sú to piaty krok z podmienky (1) a tretí z podmienky pre každý tretí krok. Ak piaty ide smerom dole, potom musí desiaty ísť hore (podmienka pre každý piaty krok). Ak ide desiaty krok hore, tak z podmienky pre každý krok vieme, že deviaty ide dole. Teraz k deviatemu aj desiatemu prislúcha ako pár dvanásty. Avšak pri deviatom by dvanásty mala ísť hore, pri desiatom zas dole.

Tu nám to nesedí, musíme mať zároveň 12 dole a 12 hore. Vždy sme odvádzali len od už existujúcich pravdivých tvrdení. Preto sa vytvoriť takúto postupnosť nedá.

Odpoveď: Nedá sa napísať séria 12 pohybov tak, aby udržala Lindu a Kristiána v bezpečí, bez ohľadu na to, ako sa počítač rozhodne.

Komentár: Príklad ste pochopili mnohými spôsobmi. Niektorí ste si to sťažili, iní uľahčili, ale celkovo so sebou môžete byť spokojní. Vyskytovali sa len malé logické chybičky, či neodôvodnené tvrdenia.

Príklad č. 5 (opravovali MaťoPaťo, Tete, Zuzka):

Zadanie:

Riešenie: Ako prvé si môžeme všimnúť, že na mieste jednotiek máme súčet $A + A + A = A$. Teraz tam môže byť buď 0 alebo 5, pretože jedine pri týchto dvoch cifrách dostaneme na mieste jednotiek to isté číslo. $A = 0$ byť nemôže, pretože $ALFA$ by začínalo 0 a prirodzené číslo nemôže začínať nulou.

Tým, že teda $A = 5$, bude sa nám presúvať do stĺpca desiatok 1 (nastal prechod cez desiatku), pretože $5+5+5 = 15$. V stĺpci desiatok máme takýto vzťah $F+T+M+1 = T$. Vidíme, že tam máme už minimálne $+1$ z prechodu cez desiatku, takže výsledok nemôže byť T, ale niečo väčšie, takže buď $10 + T$ alebo $20 + T$ ($30 + T$ už byť nemôže, pretože keby boli všetky tri čísla 9 tak stále by sme mali len súčet 27 a ani tento stav nevieme dosiahnuť, pretože rôzne písmená majú mať rôzne hodnoty).

Keby platilo to $20 + T$, mali by sme rovnicu $F + T + M + 1 = 20 + T$, čo po úprave bude $F + M = 19$. Toto platiť nemôže, pretože $F + M$ môže byť maximálne $9 + 8 = 17$.

Z toho vyplýva, že platí $F+T+M+1 = 10+T$ a teda $F+M = 9$. Do stĺpca stoviek sa nám presunulo $+1$ (výsledok stĺpca desiatok je $10 + T$). V stĺpci stoviek máme súčet $L + E + A + 1 = L$.

Rovnako ako v predchádzajúcom stĺpci to môže byť buď $10 + L$, alebo $20 + L$. Pri tej druhej možnosti máme (za A dosadíme 5) $L + E + 5 + 1 = 20 + L$ čo po úprave dáva $E = 14$. E má byť ale cifra, takže táto možnosť nie je správna a musí platiť $L + E + 5 + 1 = 10 + L$, z čoho po úprave dostaneme $E = 4$ a do stĺpca tisícok sa nám opäť prenieslo 1.

Stĺpec tisícok vyzerá takto: $A + B + G + 1 = 10D + E$. Tak isto ako v predchádzajúcich prípadoch, D môže byť buď 1, alebo 2. Pokiaľ by sme mali $D = 2$, dostaneme po dosadení a upravení $B + G = 18$. Toto nastať nemôže, pretože $B + G$ môže byť maximálne 17. Z toho teda vyplýva, že $D = 1$ a keď to dosadíme a upravíme dostaneme $B + G = 8$.

Všetko, čo máme, dosadíme: $5LF5 + B4T5 + G5M5 = 14LT5$. Nepoužité cifry sú ešte 0, 2, 3, 6, 7, 8 a 9.

Pre odvodený vzťah $B + G = 8$ máme zjavne iba jednu možnosť, a to čísla 2 a 6 (0 a 8 byť nemôže, pretože by bola 0 na začiatku). Keďže máme zo zadania vzťah $F + 2 = B$, B musí byť nutne 2 (inak by bolo $F = 4$ a to už je E) a teda $G = 6$ a $F = 0$. Ďalší odvodený vzťah je $F + M = 9$, takže po dosadení F zistíme, že $M = 9$.

Posledné, čo nemáme, je L a T. V zadaní máme ďalší vzťah, a to $L+1=T$, a ostali nám už iba cifry 3, 7 a 8. Vidíme teda, že jediná možnosť je $L=7$ a $T=8$. Dosadíme všetko do príkladu a po skúške zistíme, že to naozaj platí. $5705+2485+6595=14785$.

Odpoveď: Príklad po nahradení písmen za cifry vyzerá takto: $5705+2485+6595=14785$.

Komentár: Príklad nepatril medzi najľahšie, ale aj tak mala veľká časť z vás 10 bodov. Väčšinou ste robili chybu v tom, že ste predpokladali, že $F+T+M+1=10+T$ bez odôvodnenia, inak pekne.

Príklad č. 6 (opravoval Peťo):

Zadanie:

Riešenie: Ukážeme si dva najčastejšie postupy, ktoré ste používali pri riešení. Začneme tým prvým z nich. Zoberme si číslo zo zadania, 352687. V desiatkovom zápise ho vieme napísať nasledovne:

$$352687 = 100000\cdot 3+10000\cdot 5+1000\cdot 2+100\cdot 6+10\cdot 8+7$$

Keď náhodne poprehadzujeme jeho cifry, dostaneme napríklad číslo 762853, ktorého desiatkový zápis bude:

$$762853 = 100000\cdot 7+10000\cdot 6+1000\cdot 2+100\cdot 8+10\cdot 5+3$$

Teraz odčítame menšie od väčšieho a dostávame

$$\begin{aligned}762853-352687 &= 100000\cdot 7+10000\cdot 6+1000\cdot 2+100\cdot 8+10\cdot 5+3- \\ &- (100000\cdot 3+10000\cdot 5+1000\cdot 2+100\cdot 6+10\cdot 8+7)\end{aligned}$$

Keď dáme spolu sčítance s rovnakou cifrou a následne ešte trochu upravíme, rozdiel bude mať tvar

$$\begin{aligned}762853-352687 &= 99999\cdot 7+9900\cdot 6+0\cdot 2+90\cdot 8-9990\cdot 5-99999\cdot 3 \\ &= 9\cdot(11111\cdot 7+1100\cdot 6+0\cdot 2+10\cdot 8-1110\cdot 5-11111\cdot 3)\end{aligned}$$

Vidíme, že rozdiel je deliteľný deviatimi. Čo si však treba uvedomiť, je, že my sme deliteľnosť ukázali len pre jeden špecifický prípad (konkrétne číslo a konkrétne poprehadzovanie cifier). Preto treba v riešení spomenúť, ako by to bolo pre ostatné prípady. Tak to spravme. Ak by sme cifry poprehadzovali iným spôsobom, tak by cifry boli stále násobené číslami tvaru 1 a niekoľko núl za ňou. A pri odčítavaní takýchto čísel nám vznikne jedine číslo, ktoré je zložené z cifier 9 a 0, a to je určite deliteľné deviatimi, takže aj ich súčet bude deliteľný deviatimi. Ak by sme na začiatku zobrali iné číslo, tak by stačilo len v desiatkových zápisoch vymeniť cifry a postup by bol stále dobrý. Týmto sme ukázali, že rozdiel v treťom kroku bude vždy deliteľný deviatimi.

Vieme, že ak je číslo deliteľné deviatimi, bude aj jeho ciferný súčet násobkom čísla deväť. Súčet je komutatívny (poprehadzovanie sčítancov nemení súčet), preto ak poslíček spočíta čísla, ktoré mu Linda povie a tento súčet odpočíta od najbližšieho väčšieho násobku deviatky, dostane číslo, ktoré Linda vyškrtla. Bude to vedieť vždy, pretože vie, že Linda nemohla vyškrtnúť nulu. Ak by ju mohla vyškrtnúť a povedala by mu čísla, ktorých súčet je násobkom deviatky, tak by nevedel povedať, či vyškrtla nulu alebo deviatku (obe po pričítaní dávajú číslo, ktoré je násobkom deviatky).

Iné riešenie: Budeme postupovať od konca. Predpokladajme, že poslíček by vedel vždy Linde povedať, ktoré číslo vyškrtla. Jediné čo od Lindy vie, sú cifry rozdielu, ktoré mu povedala. Keďže ich však mohla premiešať a jednu mu dokonca ani nepovedala, poslíček nevie určiť hodnotu rozdielu. Čo však vie určiť, je súčet týchto cifier. Že zistenie vyškrtnutej cifry bude súvisieť so súčtom zvyšných nám napovedá aj fakt, že Linda určite nevyškrtla nulu (tá totiž nemení súčet). Ak by poslíček vedel presne určiť, aký je ciferný súčet výsledku v treťom kroku, vedel by, akú cifru Linda vyškrtla.

Ako vieme, ciferný súčet čísla určuje, či je číslo deliteľné tromi resp. deviatimi, alebo nie je. Deliteľnosť tromi poslíčkovi veľmi nepomôže, lebo viaceré cifry vplývajú na deliteľnosť tromi rovnako. Napríklad ak vieme, že ciferný súčet štvorciferného čísla má byť deliteľný tromi a máme cifry 2, 3 a 9, tak nevieme, či posledná cifra je 1, 4 alebo 7. Pri deliteľnosti deviatimi tento problém nie je, pretože jediné dve cifry, ktoré rovnako ovplyvňujú deliteľnosť ciferného súčtu sú 0 a 9, ale vieme, že Linda určite nevyškrtla nulu. Vieme však povedať, či je výsledné číslo v treťom kroku deliteľné deviatimi alebo nie, pre ľubovoľné číslo, ktoré si

Linda zvolí? Ukážeme si, že odpoveď je: Áno, vieme povedať, či je alebo nie je deliteľné deviatimi. A dokonca vieme povedať, že vždy bude.

Ešte sme sa nepozreli na číslo, ktoré si Linda napísala na papier na začiatku. Ak by toto číslo bolo násobkom čísla deväť, tak aj jeho ciferný súčet by bol násobkom deviatky, teda aj ciferný súčet čísla v druhom kroku by bol násobkom deviatky, v dôsledku čoho by aj číslo v druhom kroku bolo deliteľné deviatimi. A keď odpočítavame dve čísla, ktoré sú násobkami čísla deväť, dostaneme opäť číslo, ktoré je násobkom deviatky. Teda aby poslíček vedel povedať, akú cifru Linda vyškrtla, stačilo by mu spočítať cifry, ktoré mu Linda povedala, a nájsť takú, ktorej súčet so súčtom ostatných dáva násobok deviatky.

Ak by Lindino číslo nebolo násobkom deviatky, tak by malo nejaký nenulový zvyšok po delení deviatimi. Budeme si to ukazovať na konkrétnom prípade zo zadania. Lindino číslo je 352687. Jeho zvyšok po delení deviatimi je 4. Ak sa pozrieme na ciferný súčet Lindinho čísla, zistíme že jeho zvyšok po delení deviatimi je tiež 4. Je to náhoda? Keď si jej číslo napíšeme v desiatkovom rozvoji a trochu upravíme, zistíme, že nie:

$$\begin{aligned}
352687 &= 100000 \cdot 3 + 10000 \cdot 5 + 1000 \cdot 2 + 100 \cdot 6 + 10 \cdot 8 + 7 \\
&= 99999 \cdot 3 + 9999 \cdot 5 + 999 \cdot 2 + 99 \cdot 6 + 9 \cdot 8 \ + (3+5+2+6+8+7) \\
&= 9 \cdot (11111 \cdot 3 + 1111 \cdot 5 + 111 \cdot 2 + 11 \cdot 6 + 1 \cdot 8) + (3+5+2+6+8+7)
\end{aligned}$$

Vidíme, že prvý sčítanec je deliteľný deviatimi (jeho zvyšok po delení je 0), preto druhý sčítanec musí mať zvyšok po delení deviatimi rovnaký, ako Lindine číslo. No a druhý sčítanec nie je nič iné, ako ciferný súčet. Pre ľubovoľné iné číslo by sme jednoducho v desiatkovom rozvoji dali príslušné cifry a postup zopakovali. Ukázali sme teda, že číslo má rovnaký zvyšok po delení deviatimi, ako je zvyšok jeho ciferného súčtu po delení deviatimi. Lindine číslo z príkladu zo zadania si vieme zapísať ako $352687 = 9 \cdot 39187 + 4$. Keďže poprehadzovanie cifier nemení ciferný súčet, tak aj číslo, ktoré Linda vytvorí v druhom kroku, bude mať rovnaký zvyšok po delení deviatimi ako pôvodné číslo. Číslo z príkladu zadania si teda vieme zapísať ako $762853 = 9 \cdot 84761 + 4$. A keď teraz tieto dve čísla odčítame, tak sa zvyšky po delení deviatimi odčítajú a dostaneme číslo, ktoré je deliteľné deviatimi. Pre príklad zo zadania to vyzerá nasledovne:

$$762853 - 352687 = 9 \cdot 84761 + 4 - (9 \cdot 39187 + 4) = 9 \cdot 45574 = 410166.$$

Ako sme už napísali vyššie, keďže je výsledné číslo v treťom kroku deliteľné deviatimi, aj jeho ciferný súčet je násobkom deviatky. Preto stačí poslíčkovi spočítať čísla, ktoré mu povedala Linda, a vyškrtnutá cifra bude tá, ktorú treba pripočítať, aby vzniklo číslo deliteľné deviatimi.

⋆ ⋆ ⋆

Na záver už iba jedna poznámka. Ak by si Linda vybrala číslo, ktoré má všetky cifry rovnaké, poprehadzovaním cifier by dostala to isté číslo. Ich rozdiel by bol preto nula. Vtedy by poslíček nevedel povedať, aké číslo vyškrtla, lebo mohla vyškrtnúť 9 *alebo nič.*

Odpoveď: Dá sa to určiť vždy, pokiaľ všetky cifry Lindinho čísla nie sú rovnaké. Postup, ako to zistiť, je napísaný v riešení.

Komentár: Skoro všetci ste prišli na to, že číslo, ktoré vznikne ako rozdiel v treťom kroku, bude deliteľné deviatimi. Nestačí to ale iba napísať, treba aj ukázať, že to tak bude, nech si Linda na začiatku zoberie ľubovoľné číslo.

Príklad č. 7 (opravovali Tinka, Ľubo, Tomáš):

Zadanie:

Riešenie: Vyskúšame si, kedy by sme najskôr mohli dosiahnuť požadovaný počet mincí.

Prvý deň môžeme buď obchodovať, alebo si požičať v banke (podľa zadania v prvý deň nemôžme ísť k mágovi). Ak by sme obchodovali, tak by sme po jednom dni mali $2 \cdot 1,65 = 3,3$ mince, čo by nám veľmi nepomohlo. Požičať si môžeme najviac 1000 mincí, pomocou čoho v prvý deň tiež nevieme získať hneď 3000 mincí. Navyše by sme ostali zadĺžení. Takže za jeden deň nevieme nazbierať 3000 mincí.

Pozrime sa, či by sa našich vytúžených 3000 mincí dalo dosiahnuť za dva dni. Postupne preskúmame všetkých 6 možností. Ak by sme prvý deň obchodovali a počas druhého dňa si požičali, získali by sme najviac $1003,3$ mincí. A to by sme ešte aj ostali zadĺžení.

Keby sme si najprv požičali a potom obchodovali, vedeli by sme zhodnotiť naše mince na maximum $(2 + 1000) \cdot 1,65 = 1653,3$, čo tiež nie je postačujúca suma. V druhom dni by sme mohli použiť mága, ale dá sa ľahko ukázať, že pomocou neho sa tiež nedá získať viac mincí, ako dvojnásobok aktuálnych, keďže najmenší spoločný násobok čísel 2 a $n + 2$ je najviac $2 \cdot (n + 2) = 2 \cdot n + 4$. Následne by sme museli banke vrátiť dlh vo výške skoro $2 \cdot n$, takže by sme ostali so štyrmi mincami.

Obchodovanie v prvom aj druhom dni tiež nie je veľmi efektívna cesta, dostali by sme iba $2 \cdot 1,65 \cdot 1,65 = 5,445$ mincí.

Ak by sme si v oboch dňoch požičali, tak by sme sa len veľmi zadĺžili a nemali by sme z čoho splatiť dlhy. Overením všetkých možností sme teda zistili, že neexistuje spôsob, ako by sme vedeli získať 3000 mincí za 2 dni.

Dá sa to spraviť na tretí deň? Skúsme sa zamyslieť nad tým, ako by sme od mága mohli získať čo najväčší počet mincí. Jedna z možností je robiť najmenší spoločný násobok dvoch nesúdeliteľných čísiel. Ako takéto niečo dosiahnuť? Existuje veľa možností, ako dosiahnuť 3000 mincí na tretí deň. Vieme ich rozdeliť do dvoch kategórií.

Do prvej radíme stratégie, v ktorých si prvý deň požičáme, na druhý deň obchodujeme a na úsvite tretieho dňa ideme k mágovi. Ak by sme si v prvý deň požičali napríklad 1000 mincí, budeme mať 1002 mincí. Druhý deň by sme teda obchodovali, dostali by sme sa na čiastku $1653,3$ mincí. Teraz by nastal ten pravý čas ísť k mágovi. Hľadali by sme najmenší spoločný násobok čísiel 1002 a 1653, keďže mág zanedbáva necelú časť. Dostali by sme 552102 mincí, čo je oveľa viac ako 3000. Aj po zaplatení dlhu, ktorý je približne 2000 mincí, by nám stále ostalo 550102 mincí.

Druhý spôsob, ako dosiahnuť požadovaný počet mincí, je aj prvý aj druhý deň si požičať a potom ísť k mágovi. Pôžičky zvolíme tak, aby sme na tretí deň u mága dostali ich súčin. Najmenší spoločný násobok dvoch čísel je určite ich súčinom, ak ide o dve po sebe idúce čísla. Túto myšlienku teraz použijeme pre konkrétne riešenie.

Prvý deň by sme si požičali 1000 mincí, teda by sme ich mali 1002. Druhý deň by sme si opäť požičali, tento krát ale len jednu mincu, takže by sme mali 1003 mincí. Keďže sme mali 1002 a teraz máme 1003 mincí, čo sú nesúdeliteľné čísla, tak je ideálny čas ísť k mágovi. Na tretí deň by sme teda vysmiati boli už na ceste k mágovi, pretože by sme vedeli, že máme vyhraté. Mág by nám dal najmenší spoločný násobok čísel 1002 a 1003, čiže 1005006. Opäť už len zaplatíme dlh okolo 2002 a ostane nám viac ako 1003004 mincí, čo nám úplne stačí.

Odpoveď: 3000 mincí vieme získať najskôr za 3 dni. Ukázali sme, že za menej sa to nedá.

Komentár: Príklad zvládlo veľa z vás veľmi slušne. K najčastejšej chybe patrilo, že ste vôbec neodôvodnili, prečo je nemožné získať 3000 za 1 alebo 2 dni. Tiež iba napísanie konkrétnej stratégie sme nepovažovali za dostačujúce, bolo potrebné povedať, podľa čoho ste volili výšku pôžičky a poradie akcií. Vaše riešenia však boli veľmi rôznorodé a kreatívne, čo nás veľmi potešilo.

Príklad č. 8 (opravovali gabika, Ivo):

Zadanie:

Riešenie: Najprv si ukážeme, ako vyzerá ustálený stav. Pri ustálenom stave musí platiť, že koľko kôpok ubudne, toľko sa nám aj pridá. V každom kroku sa nám pridáva iba jedna kôpka, takže v každom kroku musí aj jedna kôpka zaniknúť. Kôpka zaniká iba vtedy, ak má iba jeden kryštálik. Znamená to, že musí v každom kroku vzniknúť kôpka s jedným kryštálikom. Tie vznikajú z kôpok s dvomi kryštálikmi a tie z kôpok s tromi kryštálikmi a tak ďalej... Ukázali sme, že pri ustálenom stave musíme mať kôpky s postupne jedným, dvomi, tromi až n kryštálmi.

Celkový počet kryštálov musí teda byť číslo, ktoré vieme zapísať ako $1 + 2 + \cdots + n$. Ako niektorí z vás vedeli, takéto čísla nazývame trojuholníkové. Pozrime sa na to, ktoré sú prvé trojuholníkové čísla:

$$1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 55, 66, 78 \ldots$$

Vidíme, že 55 je desiatym z týchto čísel, teda preň existuje ustálený stav. Dopracujeme sa ale k tomuto ustálenému stavu? Vezmime si počiatočnú kôpku o veľkosti x a sledujme čo sa s kôpkami deje. Niekoľko prvých krokov nájdeme vypísaných v tabuľke 3.

x				
$x-1$	1			
$x-2$		2		
$x-3$	1	2		
$x-4$	1		3	
$x-5$		2	3	
$x-6$	1	2	3	
$x-7$	1	2		4
$x-8$	1		3	4
$x-9$		2	3	4
$x-10$	1	2	3	4
		$\vdots$		

Tabuľka 3: Prvé kroky

Z tabuľky vidíme, že sa skutočne vytvárajú kôpky s postupne rastúcim počtom kryštálikov, teda ak začneme s počtom pre ktorý existuje ustálený stav, tak sa k nemu dopracujeme.

Odpoveď: Ustálený stav pre počiatočný počet kryštálikov 55 sú kôpky s $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ a 10 kryštálikmi. Ustálený stav existuje pre tzv. trojuholníkové čísla, teda čísla, ktoré sú súčtom niekoľkých prvých prirodzených čísel.

Komentár: Za tento príklad si mnohí z vás zaslúžia pochvalu, lebo ste ho vyriešili veľmi pekne. Dokonca sme na príklade číslo 8 mali viacero šikovných riešiteľov z prímy, spomedzi nich si špeciálnu pochvalu zaslúži Ela Vojtková za úplne vzorové riešenie :) Body boli strhnuté zväčša za nedostatočné vysvetlenie niektorých vecí, prípadne za to, že niektorí zabudli odpovedať na druhú otázku.

Príklad č. 9 (opravovala Dada):

Zadanie:

Riešenie: Vitajte pri vzorovom riešení krásneho geometrického príkladu číslo 9 z 3. kola 1.série Riešok. Úvodom by som sa rada predstavila, volám sa Dada, a dnes si ukážeme, aký pekný príklad ste riešili.

Takže ako ste všetci dobre pochopili, najprv si bolo treba nakresliť obrázok. Ten mohol vyzerať napríklad ako na obrázku 1.

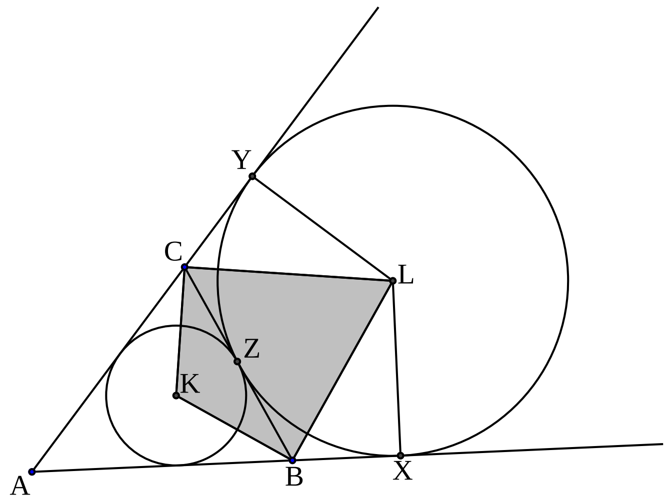
Ak váš obrázok vyzeral inak, nezúfajte, väčšia kružnica sa dá rovnako dobre nakresliť dole alebo vľavo, teda, aby sa dotýkala buď strany AB trojuholníka ABC, alebo strany AC trojuholníka ABC. Riešenia pre iné obrázky by vyzerali rovnako, ako to, ktoré vám dnes predvediem.

Poďme teda na to. Venujme prvý pohľad trojuholníku ABC. Máme v ňom vpísanú kružnicu so stredom v bode K. Ako sa zostrojuje taká vpísaná kružnica? Ja som si nikdy nepamätala, či je to priesečník osí strán alebo priesečník osí uhlov. Pre príležitosť nášho príkladu som si ale spomenula, že stred vpísanej kružnice leží v priesečníku osí uhlov.

Os uhla sa volá os uhla, pretože delí uhol na dve rovnako veľké časti. Preto vieme, že veľkosť uhla ACK je rovnaká ako veľkosť uhla KCB. Označme si obe α.

Prenesme teraz, dámy a páni, uhol pohľadu na väčšiu kružnicu, ktorá má stred v bode L. Keďže sa dotýka polpriamok AC a CB, tak spojnica stredu L a bodu C bude tiež os uhla, ktorý zvierajú tieto polpriamky.

Kto mi toto neverí, pozrite sa sem. Dokreslime si body X, Y a Z ako dotykové body priamok a väčšej kružnice. Trojuholníky CYL a CZL sú podobné, pretože majú rovnako dlhé dve strany ($CL = CL$, $LZ = LY$=polomer väčšej kružnice) a uhol $CYL = LZC = 90°$, pretože sú to body dotyku. Z podobnosti majú aj rovnaké uhly pri príslušných vrcholoch, teda uhol $YCL = ZCL = \beta$ a teda naozaj CL je os uhla.



Obr. 1: Náš obrázok

Snáď mi už veríte. Keď je to tak, označme si uhly KBZ a LBZ γ a δ (z rovnakých dôvodov ako sme si označili uhly α a β)

Verím, že ste teraz už nedočkaví, čo sa stane ďalej. A ako to vo všetkých dobrých komerčných programoch býva, zápletku odhalíme hneď po reklame.

Reklama: Otvorte si svoj obľúbený internetový prehliadač, zadajte `www.google.sk`, zvoľte sekciu obrázky, a naťukajte QUOKKA. Teraz sa tešte. Objavili ste spolu so mnou najkrajšie zvieratko na svete. Quokka sa totiž vždy usmieva!

Koniec reklamnej prestávky. Skončili sme pri označení všetkých uhlov tak, ako je to uvedené v obrázku. Teraz sa pozrime na uhol ACY. Možno si hovoríte, že som asi divná, veď body ACY ležia na priamke. Je to tak. Preto veľkosť uhla ACY je 180°. A to je výborné, pretože u nás je to $2 \cdot \alpha + 2 \cdot \beta$. A teda keď $2 \cdot \alpha + 2 \cdot \beta = 180°$, tak po predelení získame $\alpha + \beta = 90°$. Na čo nám to bolo? Pozrite sa, uhol $KCL = \alpha + \beta = 90°$. Rovnako vieme overiť, že aj uhol $\gamma + \delta = 90°$.

Teda trojuholníky KCL a KBL sú pravouhlé. A kde leží stred tentokrát opísanej kružnice pravouhlého trojuholníka? No predsa v strede prepony. U nás teda v strede úsečky KL. A čo nevídíme teraz? KL je prepona KCL, ale aj KBL. Teda keď opíšem kružnicu trojuholníku KCL, tak nakreslím rovnakú kružnicu, ako keď ju opíšem trojuholníku KBL. Čiže všetky body K, C, L, K, B, L budú na tejto kružnici ležať! Teda naozaj $KBLC$ ležia na jednej kružnici.

Môžete sa pýtať, a ležia tak vždy? Ale keďže sme nepoužili žiadne konkrétne dĺžky ani veľkosti uhlov, tak si tieto dĺžky môžeme zvoliť hocijako, a bude to tak vždy.

Odpoveď: Kružnica sa dá vytvoriť pri ľubovoľnom rozmiestnení kamienkov.

Prémia (opravoval Mesi):

Zadanie:

Riešenie: Aby sme dokázali nájsť spôsob, ako presunúť kamienky na čo najmenej ťahov, skúsme najskôr porozmýšľať, ako bude rozumné postupovať. Miesta je málo a musíme sa snažiť, aby sa nikto neblokoval, a zároveň, aby sme si umiestnili kamienky čo najvhodnejšie pre ďalšie ťahy.

Plánik je jemne rozšírený naľavo, bližšie k svojej spodnej strane. Teda sa najskôr budeme snažiť vyhnúť vyššími číslami menším – jednotka a dvojka sa musia z úzkeho vrchu plániku skrátka dostať preč. Trojka, štvorka a päťka sa im uhnú. Ak si zároveň pripravíme päťku a štvorku tak, aby potom bez ďalších zbytočných ťahov ľahko vkĺzli až navrch, budeme na najlepšej ceste.

Na začiatku sa nemôžu pohnúť kamienky 1,2 a 5. Trojka má jediná možnosť výberu, pohyb doľava alebo doprava. Keďže je zo všetkých najbližšie svojej želanej polohe (je priamo na nej), nechceme ju posúvať ďalej, ako je nutné. Zároveň nechceme, aby zavadzala v priestore, kde sa čísla budú navzájom vyhýbať – naľavo.

Posunieme ju teda pekne doprava a 4 a 5 schováme doľava. V súlade s úvahou na začiatku, 4 len jemne doľava a 5 tromi ťahmi až nad 4, takto bude mať neskôr otvorenú cestu až úplne hore. Zatiaľ sme použili 5 ťahov.

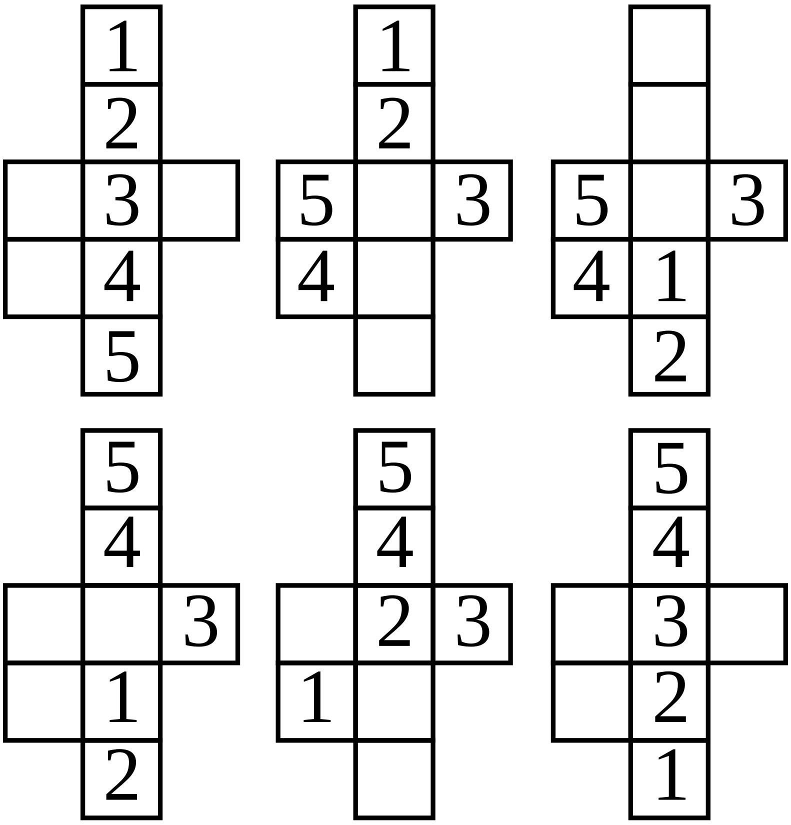
Sláva, 1 a 2 majú otvorenú cestu, takže ich tam spolu 6 ťahmi presunieme. Radi by sme ich mali vymenené, no všetko má svoj čas. Počítadlo ukazuje spolu 11 ťahov.

Čo sa to deje hore? Plánik sa nám na hornej strane krásne vyčistil. 5 so 4 môžu ako džentlmeni, ktorí uvoľňovali miesto, pekne preklznuť až na svoje správne miesta – tu sa ukazuje výhoda toho, že sme na začiatku posunuli 5 nad 4. Ďalších 6 ťahov, dokopy 17.

Trojka stále čaká na svoj čas, teraz sa musia vymeniť 1 s 2. Dvojka je úplne dole a potrebuje vycúvať, jednotka sa uhne. 1 si môže vybrať, či pôjde o políčko nahor a dvojka vycúva nahor a doľava, alebo sa 1 posunie doľava a 2 o dve políčka nahor. Skrátka, 3 ťahom sa nevyhneme a zaokrúhlime to na 20.

V poslednej fáze sa už len všetky tri zostávajúce čísla posunú na svoje miesta, najskôr 1 úplne nadol, potom 2 a napokon 3 do stredu. Štyri finálne ťahy a – bumtádadá – máme 24 ťahov, najmenší počet, na ktorý bolo možné kamienky popresúvať.

Odpoveď: Máme 24 ťahov. Ťahy sú znázornené na obrázku 2.



Obr. 2: Ťahy