Vzorové riešenia 2. kola zimnej série 2014/2015

Príklad č. 1 (opravovali Danka, ViRPo, Ivo, Ondro):

Zadanie:

Riešenie: Zo zadania nám vyplýva, že keď zoberieme myslené trojciferné číslo a z jeho 3 cifier spravíme ich všetky kombinácie, tak nám vzniknú 3 nové čísla, dokopy s tým pôvodným 4 čísla. Keď spočítame dve najmenšie z nich, dostaneme číslo 1088.

Potrebujeme zistiť, kedy nám vzniknú z kombinácií troch cifier práve 4 čísla. Označme si cifry trojciferného čísla nejak všeobecne. Napríklad a, b, c. Rozoberieme si teraz tieto situácie:

- V čísle máme všetky 3 cifry rôzne, môžeme z nich vytvoriť nasledujúce čísla: abc, acb, bac, bca, cba, cab. Toto je vlastne maximálny počet trojciferných čísel vytvorených z číslic a, b, c. Je ich 6.
- V čísle máme 2 rovnaké cifry a jednu inú, vznikajú čísla: aab, aba, baa. Teda sú len 3.

My ale potrebujeme niečo medzi. Potrebujeme práve 4 čísla. Čo keby jedna z cifier bola 0? Povedzme si, že $c = 0$. Potom c nemôže byť prvá cifra čísla, napríklad číslo $012 = 12$ nie je trojciferné. Vylúčime teda dve možnosti z tých 6, ktoré sú spomenuté vyššie: $ab0$, $a0b$, $ba0$, $b0a$. Vidíme, že sme dostali 4 čísla, z toho tie tri nové.

Keďže vieme, že tieto tri cifry musia byť rôzne, pričom jedna z nich je nula ($c = 0$), jedna cifra z tých zvyšných dvoch (a alebo b) musí mať menšiu hodnotu, ako druhá. Povedzme, že $a < b$ (v opačnom prípade by sme ale postupovali podobne). Potom platí:

$$a0b < ab0 < b0a < ba0$$

Z toho už vieme, že najmenšie dve čísla budú $ab0$ a $a0b$. Podľa zadania majú mať súčet 1088, dáme si ich do rovnice:

$$a0b + ab0 = 1088$$

Všimnime si posledné cifry sčítancov. Keďže $0 + b = 8$, vyplynie nám z toho, že $b = 8$. Dosadíme do našej rovnice:

$$a08 + a80 = 1088$$

Teraz vieme, že na miestach stoviek je tá istá cifra a, ktorú keď spočítame, dá nám výsledok 10. Takže jednoducho môžme vydeliť 10 dvomi: $a = 5$.

Na záver urobíme skúšku správnosti, snáď sme sa nepomýlili :o) 4 čísla sú 580, 508, 850, 805, z nich najmenšie sú 580 a 508. Ich súčet je skutočne 1088.

Odpoveď: Hľadané cifry sú 8,5,0.

Komentár: Príklad bol ľahký, všetci ste sa dopracovali k výsledku. Väčšinou ste ale zabúdali dokázať, že sú to tie dve najmenšie čísla, alebo prečo tam práve musí byť tá nula.

Príklad č. 2 (opravovali MaťoPaťo, Dada B.):

Zadanie:

Riešenie: Začneme teda tým, že si spočítame všetky steny, ktoré chceme postaviť.

$$(1 \cdot 4) + (3 \cdot 3) + (1 \cdot 2) + (2 \cdot 1) = 17$$

Prvé číslo v zátvorke vyjadruje počet stĺpov a druhé, koľko stien od nich vedie. Zistili sme, že chceme posataviť 17 stien, avšak musíme brať ohľad na to, že každá stena spája dva stĺpy. To znamená, že ak od jedného stĺpu vedie k druhému jedna stena, tak je automaticky započítaná aj do počtu stien vedúcich od druhého stĺpu. Počet stien v tejto stavbe je teda polovičný, ako náš súčet zadaný v zadaní, teda sme každú započítali dvakrát.

Tu nám vzniká problém, že 17 nevieme vydeliť dvojkou. Z toho vyplýva, že nevieme navrhnúť plán stavby, pretože niektorá zo stien by nebola vzájomná, čo sa nemôže stať.

Odpoveď: Nevieme nakresliť plán takejto stavby.

Komentár: Príklad ste vyriešili väčšinou úplne správne. Bola radosť čítať vaše riešenia.

Príklad č. 3 (opravovali Kuchťo, Lámač):

Zadanie:

Riešenie: Označíme ViRPa ako V, Phila ako P, Kuchťa ako K, Laca ako L, Hanku ako H. Keď otec odchádzal, bolo poradie $VKPHL$ (0. etapa) a po jeho návrate $LKPVH$ (4. etapa).

Prvé, čo si všimneme, je, že K a V si polepšili v štvrtej etape, čo pre V znamená jendoznačne 5. miesto v tretej etape a pre K 3. alebo 4. miesto na tom istom úseku. Keďže H ale v tretej etape K neporazila, musela byť za K a teda mohla byť jedine 4. a K musel skončiť tretí.

Ďalej vieme, že v nultej etape bol L piaty, čiže musel v prvej etape poskočiť na tretie miesto. P nebol nikdy piaty, a ani si v prvej etape nepolepšil (nebol prvý ani druhý), jediné miesto, ktoré mu ostalo, bolo štvrté. H nemohla poskočiť z piateho na druhé ani prvé miesto, kedže sa nediali šialené kúsky. H bola teda piata. V bol po prvých dvoch etapách celkovo lepší ako K. To je dosiahnuteľné jedine tak, že v obidvoch týchto etapách ho predbehne. V prvej etape je preto V prvý a K druhý.

Keďže je V v prvej etape prvý a v tretej piaty, aby splnil pravidlo, že sa nediali počas etáp žiadne bláznivé kúsky, musel byť v druhej etape tretí. K bude opäť za V, tak, ako sme si to vyššie povedali, a pretože bol K v prvej etape druhý, tak mu neostáva nič iné ako štvrtá priečka. H bola v prvej etape piata, a nakoľko sú štvrté a tretie miesto už obsadené, a na prvé a druhé miesto poskočiť nemohla, ostáva na piatom mieste. P sa nemohol zo štvrtého miesta v prvej etape vyšvihnúť na prvé miesto v druhej etape, tak P je v druhej etape druhý a L obsadil napokon prvé miesto.

Už nám ostalo iba prvé a druhé miesto v tretej etape, o ktoré súperili L a P. My však vieme, že v žiadnej z týchto etáp nevyhral viackrát ten istý cyklista, a tiež vieme, že v druhej etape bol L prvý, z čoho vyplýva, že teraz mohol byť prvý jedine P, a na L ostala druhá priečka.

Odpoveď: Poradia boli následovné:

1. etapa: $VKLPH$
2. etapa: $LPVKH$
3. etapa: $PLKHV$

Komentár: Všetci ste v princípe zadanie pochopili, z čoho sme sa veľmi tešili, no našli sa aj bodovo menej úspešní. Netreba však smútiť, pevne veríme, že do tretice to už bude dokonalé.

Príklad č. 4 (opravovala Tete):

Zadanie:

Riešenie: Označíme si rozdiel hmotnosti medzi dvoma vrecúškami písmenkom x. Prvé vrecúško (teda najťažšie) váži 5 kg, ako nám hovorí zadanie. Druhé vrecúško je ľahšie, ako to prvé, a teda váži $5 - x$ kg. Hmotnosť vrecúška sa dá teda všeobecne zapísať ako $V_n = 5 - (n-1) \cdot x$ kg, kde n je poradové číslo vrecúška a V vrecúško. To platí, pretože počet rozdielov medzi dvoma vrecúškami je vždy o 1 menší, ako počet vrecúšok.

Ďalej zo zadania vieme, že súčet hmotností 76. – 80. vrecúška je rovný súčtu hmotností 96. – 101. vrecúška. Vieme to teda napísať do jednej rovnice tak, že postupne za n doplníme čísla 76–80 a 96–101. Rovnica bude teda nasledovná:

$$(5-75x)+(5-76x)+(5-77x)+(5-78x)+(5-79x)=$$
$$=(5-95x)+(5-96x)+(5-97x)+(5-98x)+(5-99x)+(5-100x)$$

Rovnicu si upravíme:

$$25\,\mathrm{kg} - 385x = 30\,\mathrm{kg} - 585x$$

$$200x = 5\,\mathrm{kg}$$

$$x = 0,025\,\mathrm{kg} = 25\,\mathrm{g}$$

Zistili sme teda, že rozdiel hmotnosti medzi dvoma vrecúškami je 25 g. Na vypočítanie hmotnosti 101. vrecúška (teda najľahšieho) si znova vezmeme rovnicu $V_n = 5-(n-1)$ kg a dosadíme do nej všetky neznáme ($n = 101$, $x = 0,025$): $V_{101} = 5 - 100 \cdot 0,025$, teda $V_{101} = 2,5$ kg.

Odpoveď: Najľahšie vrecúško váži 2,5 kg.

Komentár: Príklad nebol zložitý, takmer všetci ste ho vypočítali správne. Hlavná chyba bola, že ste zabudli uviesť, čo má ktorá neznáma vyjadrovať, alebo ste nevysvetlili, prečo sa $V_{101} = 5 - 100 \cdot 0,025$. Niektorí ste sa rozhodli počítať príklad tak, že ste si označili najľahšie vrecúško ako y a x ste pričítavali, čo bol tiež jeden z postupov.

Príklad č. 5 (opravovali Danka, ViRPo, Ivo, Ondro):

Zadanie:

Riešenie: Najprv si pozrieme výroky, ktoré sa navzájom vylučujú. Našli sme, že babka sa chce podľa seba fotiť a podľa starkej chce darčeky. To znamená, že pravdovravná je nutne jedna z nich dvoch a tretia, mama, klame.

Pokiaľ by starká hovorila pravdu, tak ani babka ani mama by nemohli povedať, že chcú hranolčeky bez toho, aby povedali pravdu. Hneď prvý mamin výrok nám hovorí pravdu, aj keď má mama klamať, z čoho vyplýva, že starká klame. To znamená, že jedine babka môže byť tá pravdovravná a teraz si vieme doodvodzovať, kto čo v skutočnosti chce.

Podľa babky zistíme, že starká chce zlatú výzdobu a ostatné dve striebornú. Podľa mamy zistíme, že ona a starká chcú šalát a darčeky. Následne zasahuje opäť babka, ktorá podľa jej tvrdenia musí mať hranolčeky. Ešte raz si skontrolujeme, či nám sedí výsledok s výrokmi a môžme skonštatovať, že sedí.

Odpoveď:

Babka: Strieborná výzdoba, hranolčeky, fotenie

Mama: Strieborná výzdoba, šalát, darčeky

Starká: Zlatá výzdoba, šalát, darčeky

Komentár: Veľa z vás skúsilo všetky 3 možnosti pre pravdovravnú osobu a skúsilo, kedy to sedí. Ak to robíte skúšaním, nezabudnite, že musíte vyskúšať všetky možnosti a že nestačí povedať, že skúsil som a vyšlo mi to, treba aj odôvodniť, prečo by taká možnosť nevyhovovala. Príklad sa dal oveľa jednoduchšie riešiť tak, že ste sa pozreli, ktoré výroky sa vylučujú.

Príklad č. 6 (opravovala Zuzka):

Zadanie:

Riešenie: Dôležité je zamerať sa na ručičky a môže nám byť ukradnuté, aký je naozaj čas. Normálne na hodinách by minútová ručička prešla 24-krát obvod kružnice a hodinová 2-krát. Zafixujme si hodinovú ručičku a budeme pozorovať len obiehajúcu minútovú ručičku. Novú kružnicu obehne 22-krát.

Ak mi neveríte, vysvetlím vám to. Minútová ručička prejde za hodinu celý kruh, hodinová ručička za ten čas prejde $\frac{1}{12}$ kruhu. Preto keď sa stretnú, minútová ručička už prejde jeden celý kruh a navyše istú vzdialenosť, ktorá je 12-krát väčšia ako vzdialenosť, ktorú prejde hodinová ručička, no tej sa ešte k tomu zarátava tá $\frac{1}{12}$ kruhu, ktorú prešla za čas, keď minútová. Preto $\frac{1}{12}$ kruhu je 11-krát väčšia ako úsek, ktorý bol prejdený hodinovou ručičkou po hodine. Spolu minútová ručička prešla $\frac{12}{11}$ pôvodnej kružnice, a to bude obvod novej kružnice, na ktorej budem počítať. Obvod 24 pôvodných zodpovedá 22 nových.

Za týchto 22 otočiek, keď bude hodinová ručička stáť a minútová sa bude plynule pohybovať, budú ručičky logicky zvierať všetky uhly od $0°$ do $180°$. Treba myslieť na to, že ručičky zvierajú vždy dva uhly, a to α a $360 - \alpha$. Preto sa všetky uhly vyskytnú za jednu otočku dvakrát, a to keď sa α rovná danému uhlu a keď sa $360 - \alpha$ rovná danému uhlu. Výnimkou je, ak $\alpha = 360 - \alpha$. To sa deje pri uhle $180°$, a preto za jednu otočku nastane len raz. Ďalšou výnimkou je, že $0° = 360°$, takže aj uhol $0°$ sa bude vyskytovať len raz za otočku. O uhloch väčších ako $360°$ neuvažujeme.

Spolu je to 22-krát pri $0°$ a $180°$ a 44-krát pre všetky uhly väčšie ako $0°$ a menšie ako $180°$.

Niektorí z vás si tiež všimli, že čas do 23 : 59 nie je to isté, akoby to bolo do 24 : 00. Toto som reálne nehodnotila, ale bola som rada, ak ste to zaradili do svojho riešenia. Minútová ručička bude o 23 : 59 $6°$ od najvrchnejšieho bodu hodín. Hodinová ručička bude $0,5°$ od najvrchnejšieho bodu hodín, pretože to je $\frac{1}{60}$

z uhlu, ktorý prejde za jednu hodinu. Medzi sebou budú mať teda $5,5°$ a preto všetky menšie uhly (okrem $0°$) sa do 23 : 59 budú vyskytovať o jeden raz menej.

Odpoveď: Uhly $0°$ a $180°$ budú ručičky zvierať 22-krát. Uhly menšie ako $5,5°$ ale väčšie ako $0°$ budú ručičky zvierať 43-krát. Uhly väčšie alebo rovné $5,5°$, ale menšie ako $180°$ budú ručičky zvierať 44-krát.

Komentár: Veľmi veľa z vás si chcelo príklad priveľmi zjednodušiť a zanedbávalo pohyb hodinovej ručičky. Bohužiaľ to z príkladu urobilo jednoduchý nábojový príklad, za ktorý ste veľa bodov teda nedostali. Ďalej ste chyby robili v tom, že ste nevedeli poriadne dokázať, prečo je to správne. Ukazovali ste to zaokrúhlenými hodnotami, čo nikdy nemôže byť nepriestrelný dôkaz. Nakoniec vás ešte chcem upozorniť, že nebolo treba počítať len s celočícelnými uhlami. Mnohokrát som opravovala to, že ste rozoberali prípady pre $0°$, $1°$ až $179°$ a $180°$. Bolo mi pri tom veľmi ľúto uhlov medzi $0°$ a $1°$ a medzi $179°$ a $180°$. Čo taký uhol $0,5°$?

Príklad č. 7 (opravovali Zajo, Aďa):

Zadanie:

Riešenie: Na začiatok si vyraďme triviálne prípady. Ak ležia aspoň štyri body na priamke, nevieme zostrojiť žiaden štvoruholník.

Avšak, ak ležia na priamke najviac tri body, možnosť zostrojiť konvexný štvoruholník nebude pevne daná. Pozrime sa na túto priamku a priamku, na ktorej ležia zostávajúce dva body. Tieto priamky môžu byť rovnobežné. V tom prípade je určite možné zostrojiť konvexný štvoruholník pomocou dvoch bodov z jednej priamky a dvoch bodov z druhej rovnobežnej priamky.

Druhý prípad je, ak nie sú rovnobežné. Predstavme si tieto dve priamky. Budem uvažovať o polpriamkach vedúcich od ich priesečníku. Rozloženie bodov na polpriamkach môže byť nasledujúce:

Na jednej polpriamke môžu byť 3 body a na ďalšej 2. Keďže tieto polpriamky sú rôznobežné, určite bude možné zostrojiť konvexný štvoruholník.

Na jednej polpriamke budú 3 body, na druhej 1 a na tretej 1. Polpriamky, na ktorých je jeden bod, tvoria priamku. Na to, aby sme dosiahli konvexný štvoruholník, musí tento štvoruholník mať najmenej 2 vrcholy z 3 bodov na jednej priamke, avšak keďže sú na jednej priamke, len 2 z nich môžu byť vrcholmi štvoruholníka. Aby bol štvoruholník konvexný, musia byť ďalšie dva jeho vrcholy v jednej polrovine od priamky tvorenej prvými 2 vrcholmi štvoruholníka, avšak v každej polrovine je len jeden ďalší bod. Preto sa konvexný štvoruholník v tomto prípade nebude dať zostrojiť.

Na jednej polpriamke sú 2 body, na druhej 2 a na tretej 1. Keďže polpriamky s dvoma bodmi sú rôznobežné, určite bude možné zostrojiť konvexný štvoruholník.

Na jednej polpriamke sú 2 body, na druhej 1, na tretej 1 a na štvrtej 1. Ak zoberiem 1 bod z každej polpriamky, tieto body tvoria konvexný štvoruholník, pretože uhlopriečky sa určite pretínajú, keďže sú to tie priamky.

Toto sú všetky možnosti, okrem špeciálneho prípadu, ak bodom je priesečník priamok. Priesečník priamok nemôže byť vrcholom, pretože ak by sme vybrali ďalšie 3 body na ľubovoľných polpriamkách, vždy by 3 z bodov boli na jednej priamke a preto by nemohli byť vrcholmi štvoruholníka. Teda z piatich bodov, z ktorých by jeden bol priesečníkom zadefinovaných priamok, by sa dal zostrojiť konvexný štvoruholník len vtedy, ak by ho tvorili zostávajúce 4 body, teda boly každý na jednej polpriamke alebo 2 na jedenj polpriamke a 2 na druhej polpriamke.

Ďalej sa venujme prípadu, kedy žiadne tri body nie sú „kolineárne“, tj. neležia na jednej priamke. Prípady si ďalej rozdeľme podľa toho, koľko bodov tvorí konvexný obal všetkých piatich bodov.

Konvexný obal je taký útvar, ktorý si môžeme predstaviť nasledovne. Do zeme zatneme koly na miestach kde máme 5 bodov. Následne okolo nich uviažeme špagát. Ten ich všetky obkolesuje, ale nemusí sa ich dotýkať. Môže vzniknúť napríklad trojuholník s dvoma bodmi v jeho vnútri.

Prvá možnosť teda je, že všetkých 5 bodov leží na konvexnom obale. Vtedy, ľubovoľný odstránime, vieme, že aj to čo nám ostalo bude konvexný štvoruholník. (Dva uhly ostali a boli v konvexnom útvare a dva uhly sme zmenšili oproti 5-uholníku)

Druhou možnosťou je, že konvexný obal tvoria štyri body a teda piaty je v jeho vnútri. Je nám hneď jasné, že samotný obal bude hľadaným štvoruholníkom.

Rozoberáme možnosti, kedy žiadne tri body neležia na jednej priamke a preto nám už ostáva iba posledná možnosť, že konvexný obal tvoria tri body a dva ležia v danom trojuholníku.

Konštrukcia bude nasledovná: Dva body vo vnútri spojíme a nakreslíme si priamku. Tá pretne dve zo strán trojuholníkového obalu. Hľadaný konvexný štvoruholník bude tvorený dvoma bodmi zvnútra a nepretnutou stranou.

Prečo tomu tak je? Ukážme si že vnútorné uhly tohto štvoruholníka budú naozaj menšie ako 180 stupňov. Dva uhly pri vrcholoch trojuholníka, sme zmenšili oproti pôvodným, lebo sme spájali s bodmi vnútri trojuholníka. Uhly v trojuholníku sú menšie ako 180 stupňov, preto budú tieto dva tiež. Letmý pohľad na zvyšné dva body, vnútri trojuholníka nám povie, že strana s ktorou sme ich spojili, leží celá v jednej polrovine, oproti priamke určenej nimi. Na to, aby uhol pri jednom z nich bol väčší ako 180 stupňov by sme ich ale museli spájať s bodom z opačnej polroviny. Preto aj tieto dva uhly budú menšie ako 180 stupňov.

Odpoveď: Ak žiadne tri body neležia na priamke, je možné nájsť takýto štvoruholník vždy. Ak tri body ležia na priamke, v istých prípadoch vieme nájsť konvexný trojuholník a v istých nie. Bližšie sú vysvetlené v postupe.

Komentár: Príklad bol z tých ťažších a zvyčajne dochádzalo k bežnej chybe, kedy niečo tvrdíme, ale nedokážeme, prečo tomu tak je. Keďže úlohou v príklade bolo práve niečo dokázať, body museli často ustupovať.

Za zmienku tiež stojí myšlienka od Karin Demkovej. K príkladu sa dalo pristupovať aj úplne iným spôsobom. V konvexnom štvoruholníku sa totiž pretínajú uhlopriečky. Preto nám stačilo nájsť dve dvojice bodov, ktorých spojnice sa pretínajú. Tvorili by konvexný štvoruholník.

Opäť by bolo ale treba dokázať, prečo také vždy budú, ako ich vyberieme a čo pre ne ešte platí.

Príklad č. 8 (opravovala Lia):

Zadanie:

Riešenie: Po prvé si bolo treba uvedomiť, že čísla na chrbte presne určujú čísla v obálkach. Keďže človek s číslom 1 na chrbte nemôže mať v obálke číslo, ktoré je menšie (čísla sú len od 1 do 8), musí tam mať číslo 2. Potom ale človek s číslom 3 na chrbte, musí mať zas v obálke číslo 4, lebo číslo 2 je už zabraté. Takto si postupne vieme jednoducho určiť všetky čísla v obálkach (tabuľka 1).

chrbát	1	2	3	4	5	6	7	8
obálka	2	1	4	3	6	5	8	7

Tabuľka 1: Čísla na chrbte a v obálkach.

Poďme teda na stratégiu. Na stole si pred vyhradné štvorce predstavíme isté „riadky“, do ktorých budú dávať očíslovaní ľudia svoje obálky, postupne prvý, ktorý príde do prvého riadku, druhý, ktorý príde do druhého riadku a tak ďalej, až kým nepríde posledný, ktorý dá svoju obálku do posledného riadku.

Zároveň, keďže každý človek (okrem prvého) vie, aké je pred ním číslo na chrbte, vie aj, aké číslo má ten pred ním v obálke. Medzi sebou sa teda dohodnú, že každý položí svoju obálku pred vyznačené pole, kam patrí obálka toho pred ním. Samozrejme, do toho riadku, koľký nasleduje.

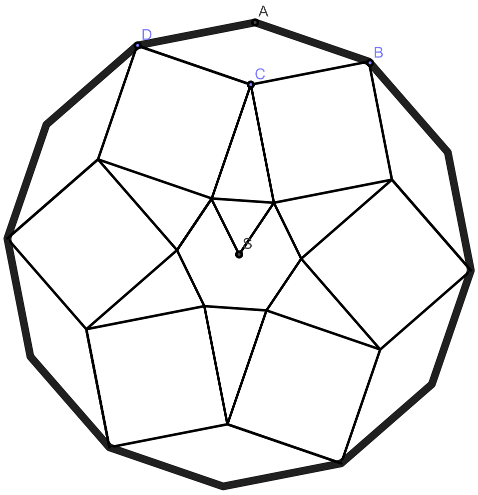
Teda uvediem príklad: Ľudia za sebou stoja v poradí od prvého po posledného, s číslami na chrbte: 1 2 3 4 5 6 7 8. Keď ide posledný dnu (číslo 8), vidí, že pred ním stojí číslo 7 a vie, že ten pred ním má v obálke číslo 8 a teda položí svoju obálku pred vyznačený štvorec číslo osem, do prvého riadku. Ide ďalší, vidí pred sebou číslo 6, teda vie, že v obálke má číslo 5 a teda svoju obálku položí pred vyznačený štvorec číslo 5, do druhého riadku. Takto to pokračuje ďalej, až kým posledný (prvý v rade) položí svoju obálku pred číslo, pred ktorým ešte nie je žiadna iná obálka, do posledného riadku. Potom začne premiestňovať obálky.

Tú v poslednom riadku dá do štvorca, pred ktorým leží obálka v predposlednom riadku, tú z predposledného riadka dá do štvorca, pred ktorým leží obálka v pred-predposlednom riadku a tak ďalej, až kým nedá obálku z prvého riadku do posledného voľného vyznačeného štvorca.

Odpoveď: Výsledok je uvedený v postupe.

Komentár: Príklad ste zvládli skoro všetci veľmi pekne, minimálne straty bodov, boli za nedostatočné vysvetlenie :)

	štvorec 1	štvorec 2	štvorec 3	štvorec 4	štvorec 5	štvorec 6	štvorec 7	štvorec 8
1.riadok								obálka (7)
2.riadok					obálka (8)			
3.riadok						obálka (5)		
4.riadok			obálka (6)					
5.riadok				obálka (3)				
6.riadok	obálka (4)							
7.riadok		obálka (1)						
8.riadok							obálka (2)	



Obr. 1: Výsledný útvar

Príklad č. 9 (opravovali Dada, Jumaj):

Zadanie:

Riešenie: Pri geometrických príkladoch si pre správne pochopenie veci vždy treba narysovať alebo načrtnúť obrázok, tak sa pustíme do toho, nie je to až také ťažké, ako sa to tvári. V zadaní je sled krokov, ktorým keď budeme postupovať, dostaneme sa k obrázku 1.

Šesťuholník je pravidelný a jeho ťažisko je stred kružnice (lebo vzdialenosť ťažiska od kružnice je rovnaká pre všetkých šesť možností)

Chceme zistiť dĺžku strany pravidelného šesťuholníka. To je rovnaká dĺžka ako dĺžka strany rovnostranných trojuholníkov, z ktorých pozostáva. Táto dĺžka je zároveň vzdialenosť vrcholu šesťuholníka od stredu kružnice. Z obrázka vidno, že súčet tejto dĺžky a jednej z uhlopriečok rovnobežníka zostrojeného, ako druhého v poradí, je polomer kružnice.

V geometrických úlohách sa zároveň vždy zíde si do obrázka dopísať všetky dĺžky a uhly, čo vieme zistiť. Pozrime sa teraz na tie uhly. Vieme, že vnútorný uhol (teda uhol dvoch strán) dvanásťuholníka je 150°. Keď chceme vedieť prečo, rozdeľme si dvanásťuholník na dvanásť rovnoramenných trojuholníčkov s vrcholmi jeho ťažiskom a dvomi susediacimi vrcholmi dvanásťuholníka. Potom uhol nad základňou bude $\frac{360^\circ}{12} = 30^\circ$ a ostatné uhly 75°. Súčet dvoch takýchto ostatných uhlov je vnútorný uhol.

Súčet uhlov v rovnobežníku je 360° a uhly oproti sebe sú rovnaké. Z toho vyplýva, že uhly prvých zostrojených rovnobežníkov sú 150° a $\frac{360-2\cdot 150}{2} = 30^\circ$. Teraz vieme vyjadriť jeden z uhlov druhého typu rovnobežníkov. Uhol na vrchole, ktorý je súčasťou kružnice bude $150^\circ - 2\cdot 30^\circ = 90^\circ$. Rovnobežník s uhlom dvoch strán 90° je štvorec, alebo obdĺžnik. Zároveň vieme, že rovnobežníky zostrojené ako prvé sú kosoštvorce (keďže dve jeho susediace strany sú rovnako dlhé). Teda dve susediace strany rovnobežníkov zostrojených ako druhých v poradí sú rovnaké. Vďaka tomu vieme, že tieto rovnobežníky sú štvorce. Potom je ale aj strana dvanásťuholníka a štvorca tiež rovnako dlhá. Na výpočet dĺžky uhlopriečky teda môžme použiť Pytagorovu vetu:

$$x = \sqrt{2 \cdot \left(\sqrt{3} - 1\right)^2} = \sqrt{2} \cdot \left(\sqrt{3} - 1\right)$$

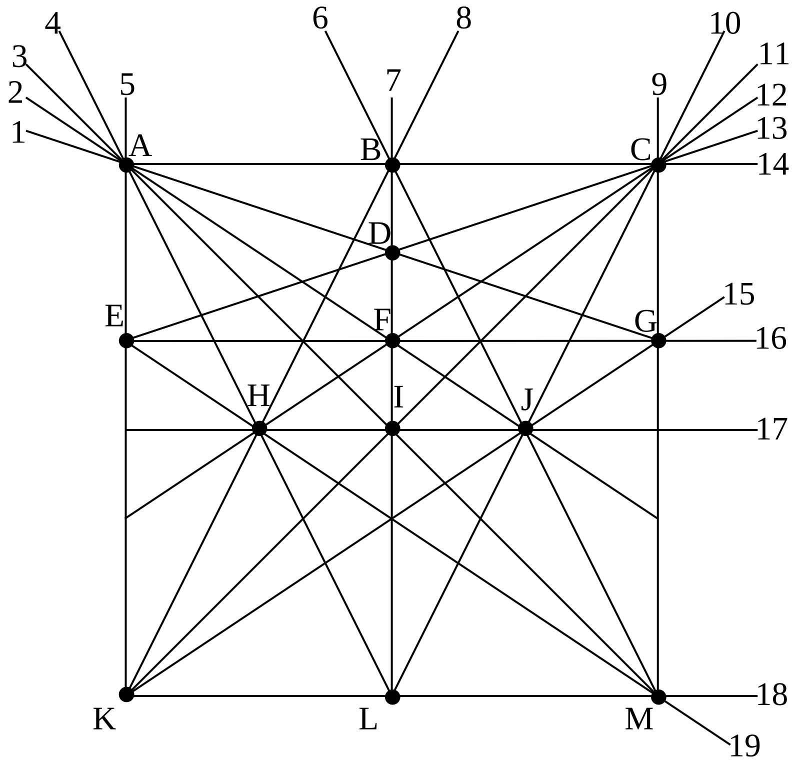
Ako sme už povedali (s je hľadaná dĺžka strany):

$$\begin{aligned} \sqrt{2} &= s + \sqrt{2} \cdot \left(\sqrt{3} - 1\right) \\ s &= \sqrt{2} - \sqrt{2} \cdot (\sqrt{3} - 1) = \sqrt{2} \cdot (2 - \sqrt{3}) \end{aligned}$$

Odpoveď: Hľadaná dĺžka je $\sqrt{2} - \sqrt{2} \cdot \left(\sqrt{3} - 1\right) = \sqrt{2} \cdot \left(2 - \sqrt{3}\right)$.
Komentár: Na tomto príklade bol výzvou už samotný obrázok. To ste, až na pár výnimiek, zvládli veľmi dobre. Pri bodovaní sme vám často odpúšťali, keď ste nepovedali, že štvorec je štvorcom preto, lebo je to vlastne kosoštvorec s vnútorným uhlom 90°. Menej odpustiteľné pre nás bolo, keď ste nevysvetlili, ako ste sa dopracovali ku konkrétnym uhlom, resp. ak ste len tak zrazu prehlásili nejaký uhol za 60°. Celkovo príklad dopadol pomerne dobre, dokonca niektorí z vás využili aj pokročilejšie znalosti geometrie. Chválime vás a želáme veľa šťastia v ďalšom kole :)

Prémia (opravovala Hanka):

Zadanie:
Riešenie: Najlepšie riešenie, ktoré sa vám podarilo nájsť, bolo riešenie s 13 pomarančovníkmi. Môžete ho vidieť na obrázku 2, kde sú písmenami označené body, v ktorých sa nachádzajú stromy, a očíslované rady stromov, ktoré pri takomto rozložení pomarančovníkov vznikajú.



Obr. 2: Rozmiestnenie pomarančovníkov

Odpoveď: Najmenej sme mohli dokázali zasadiť 13 pomarančovníkov.
Komentár: Tento príklad bol prinajmenšom zákerný. Riešenia nám poslalo vyše 60 z vás, a mnohé z nich boli naozaj pekné a nápadité. Vo veľa prípadoch sa však stalo, že bolo vo vašom rozmiestnení omnoho viac

radov, ako ste si mysleli, že tam je – inými slovami, neuvedomili ste si, že niektoré trojice bodov ležia tiež na jednej priamke. Keďže takéto riešenia nevyhovovali podmienkam zadania, boli ohodnotené 0 bodmi. Ostatné riešenia boli adekvátne obodované vzhľadom na to, koľkým z vás sa podarilo nájsť rozmiestnenie na ten ktorý počet pomarančovníkov.

Najlepšie riešenie s 13 pomarančovníkmi sme dostali len jedno, a to bolo ocenené krásnymi 8 bodíkmi :)