Vzorové riešenia 1. kola zimnej série 2014/2015

Príklad č. 1 (opravoval ViRPo):
Zadanie:
Riešenie: Prvá vec, ktorú si uvedomíme, je, že ak nájdeme ľubovoľné riešenie, môže k nemu existovať symetrické riešenie. To je také, že všetky rastlinky prevrátime horizontálne alebo vertikálne. Nám vždy stačí nájsť jedno rozmiestnenie a presvedčiť sa, že keby sme ho poprevracali, dostaneme z neho 3 ďalšie riešenia.

Pre zjednodušenie si políčka očíslujeme tak, ako v tabuľke 1.

Tabuľka 1: Očíslovanie miest v záhradke

1	2	3	4
5	6	7	8

Začneme tým, že si umiestnime prvý trifid. Ten bude buď na políčku 1, alebo 2, a každé ďalšie umiestnenie je vlastne len symetrické ku tomu pôvodnému umiestneniu, teda sa nimi zaoberať nemusíme, zrátame ich na konci.

Nech je prvý trifid najprv na pozícii 1. Umiestnime druhý trifid na pozíciu 5. Jediný spôsob, ako teraz zakryjeme oba trifidy iskerníkmi, je umiestniť ich na pozície 2 a 6. Baobaby následne umiestnime na 3 a 7 a iskerník na 4. Z tohoto rozmiestnenia vieme preklápaním dostať dokopy 4 symetrické riešenia. Pri ďalšom riešení vždy iba ukážeme ďalšie možné rozmiestnenie a budeme rátať s tým, že ich počet nakonci vynásobíme štyrmi, aby sme dostali aj symetrické riešenia.

Ak dáme baobaby na políčka 3 a 4, posledný iskerník vieme dať na 7 alebo 8.

Keď dáme baobaby na 4 a 8, iskerník dáme napríklad na 3. Alebo vieme dať baobaby na 4 a 7 a iskerník na 3 alebo 8. Tým sme vyčerpali všetky možnosti umiestnení pre trifidy na týchto pozíciách. Zatiaľ máme 6 možností.

Dajme druhý trifid z 5 na 6 pozíciu. Iskerníky môžeme dať jedine na 2 a 5, inak by trifidy neboli správne zatienené. Baobab ani iskerník nemôžeme dať na pozíciu 7. Baobaby však môžeme dať na 3 a 8 a iskerník na 4, alebo baobaby na 3 a 4 a iskerník na 8.

Ak by sme druhý trifid umiestnili na pozíciu 2, jediný spôsob, ako ich správne zatieniť iskerníkmi, by bolo dať jeden na pozíciu 5 a druhý na pozíciu 6. Pre baobaby dostaneme to isté, čo v predchádzajúcej možnosti, s tým, že horný a spodný riadok pre zvyšné rastliny vymeníme. Dostaneme takto ďalšie 2 možnosti.

Posledná možnosť pre druhý trifid je dať ho na pozíciu 3. Uvedomíme si teraz, že baobaby môžeme dať iba na pozície 6 a 8, dva iskerníky musíme dať na 2 a 5 a pre tretí nám zostanú 2 možnosti, teda pozícia 4 alebo 7. To sú dokopy ďalšie 2 možnosti.

Ak by sme druhý trifid (stále počítame s tým, že prvý je na pozícii 1) dali na ľubovoľnú inú pozíciu, nedočiahli by naňho iskerníky tak, aby ho zatienili, alebo by sme nemohli nikam umiestniť baobaby, lebo by zavadzali koreňmi.

Zatiaľ sme našli 12 možností a pre prvý trifid nám teda ostane už iba možnosť dať ho na pozíciu 2 (ostatné riešenia sú symetrické). Tak ho tam dajme. :)

Uvedomíme si, že možnosti, kde máme druhý trifid umiestnený na pozícii 1, 4, 5 a 8 už máme zahrnuté v predchádzajúcich prípadoch. Ak by sme tento druhý trifid dali na pozíciu 6 (hneď pod prvý trifid), baobaby by museli byť na 4 a 8, čo by spôsobilo, že by sme iskerníkmi zatienili trifidy až príliš, ak by sme ich umiestnili ľubovoľne.

Ostáva nám dať druhý trifid na pozíciu 3 alebo 7. Ak ho dáme na pozíciu 3, baobaby musíme dať do dolných dvoch rohov, aby sa nedotýkali stranou trifidov, a pre iskerníky zvolíme umiestnenie 1, 4 a 5. Ostatné možnosti sú symetrické.

Úplne posledná možnosť je teda prvý trifid na pozícii 2 a druhý na pozícii 7. Ak by sme baobaby dali na hocijaké iné miesto, než 4 a 5, zavadzali by trifidom koreňmi. Iskerníkom potom zvolíme pozície 1, 3 a 8. Ľubovoľné iné rozmiestnenie je už symetrické.

Pre prvý trifid na pozícii 2 sme teda našli ďalšie 2 možnosti.

Odpoveď: Možných rozmiestnení bolo 14 a pre každé existovali 4 preklopenia, teda dokopy 56 riešení.

Komentár: Možností bolo veľa, na takýchto príkladoch je dobré natrénovať si trpezlivosť a uistiť sa, že vám žiadna možnosť neušla. Taktiež, ak ste našli jedno riešenie, nie je to dôvod prestať hľadať ďalšie, vždy je totiž potrebné nájsť všetky možnosti! :)

Príklad č. 2 (opravovala Gabika):

Zadanie:

Riešenie: V rodine stonožiek so štyrmi členmi (mamou, otcom a dvoma deťmi) denne zašpinia $4 \cdot 100 = 400$ ponožiek. Keďže ponožky nosia všetky dni v týždni okrem soboty, tak musí mama oprať vždy $6 \cdot 400 = 2400$ ponožiek. Do jednej várky prania sa zmestí 573 ponožiek. Na koľko várok teda operie všetkých 2400 ponožiek? Predelením zistíme, že $2400 : 573 = 4$, zv. 108. Mama stonožka teda ponožky operie na najmenej 5 várok.

Každú várku prania musí najprv uložiť do práčky (2 minúty), oprať (dve a pol hodiny = 150 minút) a následne vyberať z práčky (3 minúty). Všetky tieto úkony s jednou várkou prania jej trvajú spolu $3+150+2 = 155$ minút, s piatimi várkami $5 \cdot 155 = 775$ minút $= 12$ hodín a 55 minút. Keď s praním začne o $6:00$, všetky ponožky bude mať oprané o $18:55$.

Odpoveď: Mama stonožka s praním skončí o $18:55$.

Komentár: Takmer všetci ste príklad zvládli bezchybne, no špeciálna pochvala patrí Tomášovi Barančokovi a Martinovi Martišovi, ktorí s úvahami zašli ešte ďalej ako náš vzorák :)

Príklad č. 3 (opravovali Hanka, Dada B.):

Zadanie:

Riešenie: Najprv si určíme, ako môžme skladať rytmus. Môžme ho zložiť ako 3 trojdobové kombinácie, alebo 1 trojdobovú kombináciu a 3 dvojdobové kombinácie. Párny počet trojdobových kombinácií nemôžme použiť, pretože by nám ostal nepárny počet dôb, ktoré z dvojdobových kombinácií nezložíme.

V prípade 3 trojdobových kombinácií nám vychádza iba jedna možnosť.

Ak si zoberieme druhú možnosť, rytmus skladáme z 3 dvojdobových a 1 trojdobovej kombinácie, spolu 4, teda každý rytmus bude mať 4 pozície, na ktoré môžeme ukladať kombinácie. Zoskupenia BV a VB (kde B je bass a V je výška) vieme na 3 voľné pozície umiestniť 8 rôznymi spôsobmi. Trojdobovú kombináciu môžeme vložiť na 1. až 4. pozíciu. Teda máme 8 kombinácií dvojdobových a 4 možnosti umiestnenia trojkombinácie. Dokopy máme teda až $8 \cdot 4 = 32$ spôsobov.

Avšak niektoré rytmy sú síce zložené z iných kombinácií, ale keď ich zahráme, tak budú znieť úplne rovnako.

Musíme teda určiť, koľko z nájdených rytmov sa opakuje. Ak máme kdekoľvek vedľa seba BV a BVB a v inom rytme na rovnakých dvoch pozíciach BVB a VB a na ostatných pozíciách majú rovnaké zoskupenia, budú sa tieto rytmy zhodovať. Táto dvojkombinácia môže byť na 1. a 2. pozícii, na 2. a 3. pozícii alebo na 3. a 4. pozícii.

Na zvyšných dvoch pozíciach (je jedno, kde sú) možeme použiť buď zoskupenie VB, alebo BV, teda spolu $2 \cdot 2 = 4$ možnosti. Keďže máme 3 rôzne pozície, na ktorých sa nám vymenia BV a BVB s BVB a VB, máme $3 \cdot 4 = 12$ rytmov, ktoré zarátať nemôžeme, lebo sa opakujú. Máme teda $32 - 12 = 20$ rôznych rytmov zložených z jedného trojdobového a troch dvojdobových zoskupení. Netreba však zabudnúť na ten jediný rytmus zložený z troch trojdobových zoskupení. Celkovo teda máme 21 rôznych rytmov.

Odpoveď: Na bubne vieme zahrať 21 rôzne znejúcich rytmov.

Komentár: Príklad nebol veľmi ťažký. Napriek tomu mnohí z vás po tom, čo zistili, že zoskupenia sa dajú kombinovať 33 spôsobmi, zabudli na to, že niektoré znejú rovnako. Zopár z vás sa pomýlilo niekde pri vyškrtávaní rovnakých rytmov, či zabudlo nejakú možnosť napísať, alebo nevysvetlili, ako postupovali. Ale samozrejme boli aj takí, ktorí mali ukážkové riešenie za 10 bodíkov.

Príklad č. 4 (opravovali Lutinko, Tinka):

Zadanie:

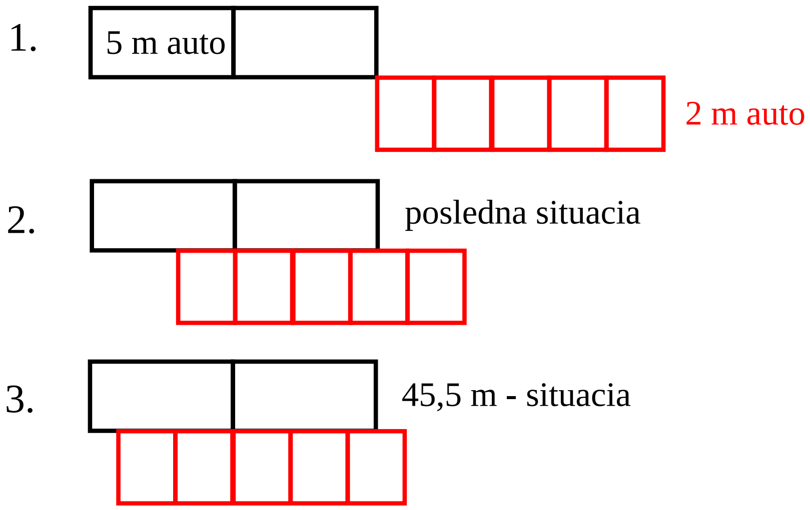
Riešenie: Na začiatok si bolo treba uvedomiť, že hľadáme počet situácií, pri ktorých sa dá prejsť, a nie počet možností, ako by tieto situácie mohli nastať. Druhá dôležitá myšlienka bola, že takáto situácia nastáva vtedy, keď sa stretnú 2 začiatky áut.

Máme 2 rady áut, vrchný bude rad áut s dĺžkou 5 m hýbajúci sa doľava a druhý rad budú 2-metrové autá hýbajúce sa doprava. Ako prvé bolo potrebné zistiť, akou rýchlosťou sa autá pohybujú. Pri nakreslení začiatočnej situácie sme si mohli všimnúť, že nastávali momenty, kedy by sa každý rad posunul o 0,5 m svojím smerom, teda by nastal vzájomný posun o celý 1 m, tak by vznikli potrebné situácie. Takže máme rýchlosť, ktorá je $0,5\frac{m}{pohyb}$. Avšak, nie pri každom posune o pol metra vhodné situácie nastanú.

Pozrime sa na to odzadu, keď sa stretnú konce oboch radov (ako na obrázku 1, prvá možnosť). Tadeto sa nedá prejsť, lebo by to nebolo hrdinské. Ak by sa autá teraz posunuli späť iba o 0,5 m, tak vhodný moment tiež nenastane.

Poďme autá posúvať po pol metri naspäť až dovtedy, pokým sa nestretnú 2 začiatky áut. Vidíme to na obrázku 1, druhá možnosť. Týmto zistíme, že posledná vhodná situácia vznikla po prejdení 46,5 m oboma kolónami. Teraz ale zase treba dávať pozor. Ani toto nie je situácia, kedy by následné posunutie radov o 0,5 m späť pomohlo k ďalšej vhodnej situácii. Od poslednej situácie nám treba autá posunúť o celý meter.

Nachádzame sa na mieste 45,5 metra. Rovnakým spôsobom znova zistíme, že toto tiež ešte nie je možnosť, kedy by posunutie o 0,5 m pomohlo (novo-vzniknutá situácia by nebola vhodná, lebo by nešlo o 2 začiatky áut). Až ďalším posunutím o pol metra dosiahneme požadovanú situáciu. Od tejto pozície, ktorá nastala po prejdení 44,5 m, nám už stačí posúvať autá o 0,5 m späť a vždy nám vznikne nová vyhovujúca situácia, lebo už vieme vždy nájsť začiatky dvoch protiidúcich áut, ktoré sú vzdialené 1 m.



Obr. 1: Situácie áut

Cez cestu sa teda dá prejsť hneď na začiatku, potom po prejdení každého pol metra až po 44,5 m, potom po prejdení 45,5 m a 46,5 m, teda $1 + 44,5 \cdot 2 + 1 + 1 = 92$.

Odpoveď: Počet momentov, kedy Kristián a Lucia mohli prejsť, je 92.

Komentár: Bolo pár ľudí, a pár $\neq 2$, ktorí príklad vyriešili veľmi pekne, avšak našlo sa viacero jednotlivcov, ktorí zadanie nepochopili a autá neposúvali, alebo neriešili posledné situácie, alebo sa našli aj takí, ktorí rátali celkový počet možností. Napriek všetkému si myslíme, že ste šikovní!

Príklad č. 5 (opravovali Tete, Bendži):

Zadanie:

Riešenie:

Stretli sme sa tu v tejto chvíli,
aby sme vaše riešenia opravili.
Označili sme si začiatočný počet strán
písmenkom x bez zábran.
Písmenkom y (ypsilon) dám
bonusové strany tam.
x strán prvý deň prečítala
a obliekla sa do gala.
$x + y$ druhý deň,
vravela si: „Linda, neleň!“
Takto čítala 10 dní a nocí,
možno skončila až o polnoci.
Prečítala spolu $10x + 45y$ stránok,
teda pokiaľ ich neodvial ranný vánok.
Zadanie na štvrtý deň hovorí,
že nám 22 stránok vytvorí.
Z hornej časti básničky
dedukujeme obsah rovničky.
A teda $x + 3y = 22$ je,
niečo sa nám tu nerýmuje.
Vyplýva nám z toho rovníc sústava
$10x + 45y > 310$ a $x = 22 - 3y$.
A to nám do jednej ustáva
$220 + 45y - 30y > 310$
A z toho nám vyplýva,
y väčšie ako 6 býva.
Ale ak y je 8 (ôsmim) väčšie rovné,
bude v prvej rovnici ($x + 3y = 22$) x záporné.
To sa nám ale nemôže stať,
kladný počet stránok treba mať.
y musí byť teda 7 (sedem),
dosaďme to do prvej rovnice, získame x sa rovná 1 (jeden).
325 je teda celkový počet strán.
$10 \times 1 + 45 \times 7 = 325$
A teda správne riešenie vychádza nám,
pretože $310 < 325$.

Odpoveď: Kniha mala 325 strán a Linda každý deň prečítala o 7 strán viac.
Komentár: Príklad nebol až tak ťažký, ale veľa z vás urobilo tú chybu, že ste sa zastavili pri jednom riešení a neoverili ste, či je jediné. Dúfame, že sa vám naša básnička páči, a že sa z nej riešenie dá pochopiť. A rýmovať nám pomáhala aj Zuzka.

Príklad č. 6 (opravovali MaťoPaťo, Lámač):

Zadanie:

Riešenie: Klamára označíme ako K, pravdovravného ako P. Pravdu mohlo hovoriť 0 až 5 ľudí. Rozoberme si všetky možné počty pravdovravných ľudí a klamárov.

➔*Ak je* 5 P *a* 0 K*:*

Aby bolo 5 P, každý z nich musí povedať 5, čiže je len 1 možnosť, a to 55555.

➔*Ak je* 4 P *a* 1 K*:*

Každý z 4 P povie skutočnosť (čo sú 4 hovoriaci pravdu), a K nepovie 4 (inak by vravel pravdu). K môže povedať 0, 1, 2, 3 a 5. Spolu je teda 5 možností, a to 44440, 44441, 44442, 44443 a 44445.

➔*Ak je* 3 P *a* 2 K*:*
Každý z 3 P povie skutočnosť (čo sú 3 hovoriaci pravdu), a 2 K nepovedia 3 (inak by vraveli pravdu). K môže povedať 0, 1, 2, 4 a 5. Môže nastať situácia, že obaja K povedali to isté číslo – tu je 5 možností, aké číslo môžu povedať. Ak obaja K povedali navzájom rôzne čísla, tak prvý mohol povedať všetkých 5 čísel a druhý si mohol vybrať, čo povie, iba z toho, čo nepovedal prvý, čo sú 4 čísla. To je $4 \cdot 5$ kombinácií, kde záleží na poradí čísel, no nám na ňom nezáleží (35 je to isté, ako 53, a každá kombinácia sa opakuje práve dvakrát), preto celkový počet kombinácií vydelíme $\frac{4 \cdot 5}{2} = 10$ možností. Celkový počet kombinácií, ktoré mohli povedať 3 P a 2 K, je teda $5 + 10 = 15$.
➔*Ak je* 2 P *a* 3 K*:*
Každý z 2 P povie skutočnosť (čo sú 2 hovoriaci pravdu), a 3 K nepovedia 2 (inak by vraveli pravdu). K môže povedať 0, 1, 3, 4 a 5. Pre 3 K môžu nastať 3 situácie:

1. Všetci K povedali navzájom rovnaké čísla:
   - Je 5 možností (0, 1, 3, 4 a 5).
2. Všetci K povedali navzájom rôzne čísla:
   - Prvý K povedal jedno z 5 čísel, druhý mohol povedať iba to, čo nepovedal prvý, čo sú 4 čísla. Tretí mohol povedať iba to, čo nepovedal ani jeden pred ním, čiže 3 čísla. Tu sa každá kombinácia opakuje $1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$-krát (napríklad 013, 031, 103, 130, 310 a 301). To je celkovo $\frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{6} = 10$ možností.
3. Dvaja K povedali navzájom rovnaké čísla a tretí rôzne od nich:
   - 2 K, ktorí povedali rovnaké číslo, si mohli zvoliť 1 z 5 čísel. Tretí K mohol povedať iba to, čo nepovedali predošlí K, čo sú 4 čísla. Tu sa žiadna kombinácia neopakuje (331 nie je to isté, ako 113), čo znamená, že je $5 \cdot 4 = 20$ možností.

Celkový počet kombinácií, ktoré mohli povedať 2 P a 3 K, je $5 + 10 + 20 = 35$.
➔*Ak je* 1 P *a* 4 K*:*
1 P povie skutočnosť (čo je 1 hovoriaci pravdu), a 4 K nepovedia 1 (inak by vraveli pravdu). K môže povedať 0, 2, 3, 4 a 5. Pre 4 K môže nastať 5 situácií:

1. Všetci K povedali navzájom rovnaké čísla:
   - Je 5 možností (0, 2, 3, 4 a 5).
2. Všetci K povedali navzájom rôzne čísla:
   - Prvý K povedal jedno z 5 čísel, druhý mohol povedať iba to, čo nepovedal prvý, čiže 4 čísla. Tretí mohol povedať iba to, čo nepovedal ani jeden pred ním, čiže 3 čísla. Štvrtý mohol potom povedať iba 2 čísla. Tu sa každá kombinácia opakuje $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$-krát. To je celkovo $\frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{24} = 5$ možností.
3. Dvaja K povedali navzájom rovnaké čísla, tretí rôzne od nich a štvrtý rôzne od všetkých:
   - Prví 2 K povedali rovnaké číslo, mohli si zvoliť 1 z 5 čísel. Tretí K mohol povedať iba to, čo nepovedali predošlí K, čo sú 4 čísla. Štvrtý K mohol povedať potom iba 3 čísla. Tu sa každá kombinácia opakuje dvakrát (napríklad 0023 a 0032). To je celkovo $\frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{2} = 30$ možností.
4. Dvaja K povedali navzájom rovnaké čísla, tretí a štvrtý rôzne od nich, no vzájomne rovnaké:
   - Prví 2 K povedali rovnaké číslo, mohli si zvoliť z 5 čísel. Druhí 2 K povedali rovnaké číslo, mohli si zvoliť z 4 čísel. Tu sa každá kombinácia opakuje dvakrát (napríklad 0022 a 2200). To je celkovo $\frac{5 \cdot 4}{2} = 10$ možností.
5. Traja K povedali navzájom rovnaké čísla a štvrtý rôzne od nich:
   - Prví 3 K povedali rovnaké číslo, mohli si zvoliť z 5 čísel. Štvrtý K mohol povedať iba to, čo nepovedali predošlí K, čo sú 4 čísla. To je celkovo $5 \cdot 4 = 20$ možností.

Celkový počet kombinácií, ktoré mohli povedať 1 P a 4 K je $5 + 5 + 30 + 10 + 20 = 70$.
➔*Ak je* 0 P *a* 5 K*:*
P by povedal skutočnosť (čo je 0 hovoriacich pravdu), preto 5 K nepovedia 0 (inak by vraveli pravdu). K môže povedať 1, 2, 3, 4 a 5. Môže nastať 7 situácií:

1. Všetci K povedali navzájom rovnaké čísla:

   - Je 5 možností (1, 2, 3, 4 a 5).
2. Všetci K povedali navzájom rôzne čísla:
   - Je iba 1 možnosť, a to 12345.
3. Dvaja K povedali navzájom rovnaké čísla, tretí rôzne od nich, štvrtý rôzne od všetkých a 5 tiež rôzne od všetkých:
   - Prví 2 K povedali rovnaké číslo, mohli si zvoliť 1 z 5 čísel. Tretí K mohol povedať iba to, čo nepovedali predošlí K, čo sú 4 čísla. Štvrtý K mohol povedať iba to, čo nepovedali predošlí K, čo sú 3 čísla. Piaty K mohol povedať iba to, čo nepovedali všetci predošlí K, čo sú 2 čísla. Tu sa každá kombinácia opakuje šesťkrát (napríklad 44123, 44132, 44213, 44231, 44312 a 44321). To je celkovo $\frac{5\cdot4\cdot3\cdot2}{6} = 20$ možností.
4. Traja K povedali navzájom rovnaké čísla, štvrtý rôzne od nich a piaty rôzne od všetkých:
   - Prví 3 K povedali rovnaké číslo, mohli si zvoliť z 5 čísel. Štvrtý K mohol povedať iba to, čo nepovedali predošlí K, čo sú 4 čísla. Piaty K mohol povedať iba to, čo nepovedali všetci predošlí K, čo sú 3 čísla. Tu sa každá kombinácia opakuje dvakrát (napríklad 11123 a 11132). To je celkovo $\frac{5\cdot4\cdot3}{2} = 30$ možností.
5. Štyria K povedali navzájom rovnaké čísla a piaty rôzne od nich:
   - Prví 4 K povedali rovnaké číslo, mohli si zvoliť z 5 čísel. Piaty K mohol povedať iba to, čo nepovedali predošlí K, čo sú 4 čísla. To je celkovo $5 \cdot 4 = 20$ možností.
6. Traja K povedali navzájom rovnaké čísla, štvrtý a piaty rôzne od nich, no vzájomne rovnaké:
   - Prví 3 K povedali rovnaké číslo, mohli si zvoliť z 5 čísel. Štvrtý a piaty K mohli povedať iba to, čo nepovedali predošlí K, čo sú 4 čísla. To je celkovo $5 \cdot 4 = 20$ možností.
7. Dvaja K povedali navzájom rovnaké čísla, tretí a štvrtý rôzne od nich no vzájomne rovnaké, a 5 rôzne od všetkých:
   - Prví 2 K povedali rovnaké číslo, mohli si zvoliť z 5 čísel. Tretí a štvrtý K mohli povedať iba to, čo nepovedali predošlí K, čo sú 4 čísla. Piaty K mohol povedať iba to, čo nepovedali všetci predošlí K, čo sú 3 čísla. Tu sa každá kombinácia opakuje dvakrát (napríklad 11223 a 22113). To je celkovo $\frac{5\cdot4\cdot3}{2} = 30$ možností.

Celkový počet kombinácií, ktoré mohli povedať 0 P a 5 K, je $5 + 1 + 20 + 30 + 20 + 20 + 30 = 126$.

Odpoveď: Pravdu môže hovoriť 0, 1, 2, 3, 4 alebo 5 mužov. Keď všetci hovoria pravdu, môže počuť 1 päticu. Keď 4 hovoria pravdu, môže počuť 5 pätíc. Keď 3 hovoria pravdu, môže počuť 15 pätíc. Keď 2 hovoria pravdu, môže počuť 35 pätíc. Keď 1 hovorí pravdu, môže počuť 70 pätíc. Keď nikto nehovorí pravdu, môže počuť 126 pätíc.

Komentár: Niektorí z vás nechápu 0 ako prirodzené číslo. 0 sa môže a nemusí chápať ako prirodzené číslo (záleží na zadaní). V našom zadaní však ako prirodzené číslo chápaná je. Niektorí si odvodili vzorec na výpočet počtu kombinácií od vlastností platiacich len pre jeden počet pravdovravných. Veľa z vás vypisovalo všetky možnosti, ale nepopísali ste, podľa čoho ich vypisujete (preto sa často stávalo, že vám niektoré vypadli). Za to sa strhávali bodíky. Ale aj napriek tomu, že bol príklad ťažký, sme dostali pekné riešenia.

Príklad č. 7 (opravovali Marka, Ivo, Maggie):

Zadanie:

Riešenie: Najprv si označíme počet perníkov ako x, čas, za ktorý Linda ozdobí perníky, ako y, a celkový počet perníkov, ktorý hľadáme, ako z. Vieme, že Linda si vypočítala, že stihne ozdobiť x perníkov za y minút. Čarodejnici však povedala, že ozdobí y perníkov za x minút.

Čarodejnica si teda vypočítala, že y perníkov za x minút sa rovná z perníkom za 5 hodín (čo je 300 minút). Lindin výpočet vyzeral takto: x za y sa rovná z za 7 hodín a 12 minút (čo je dokopy 432 minút)

Tieto poznatky sa dajú zhrnúť do 2 rovníc:

$$\frac{x}{y} = \frac{z}{432} \tag{1}$$
$$\frac{y}{x} = \frac{z}{300} \tag{2}$$

Rýchlosť ozdobovania, ktorá sa nemení, sa dá vyjadriť ako $\frac{n}{m}$, kde n je počet perníkov a m je čas. Preto zapisujeme spomínané rovnice v tvare zlomku.

Ďalej riešime rovnice. Vyjadríme si y ako $y = \frac{z \cdot x}{300}$ a dosadíme do prvej rovnice:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{x}{\frac{z\cdot x}{300}}\right) &= \frac{z}{432} \\
\frac{300 \cdot x}{z \cdot x} &= \frac{z}{432} \\
300 \cdot 432 &= z^2 \\
129600 &= z^2 \\
z &= 360
\end{aligned}$$

V rovnici $129600 = z^2$ by sa z mohlo rovnať aj číslu -360, no z máme zadefinované ako kladné číslo, keďže je to počet perníkov.

Odpoveď: Linda ozdobí celkovo 360 perníkov.

Komentár: Tento príklad väčšina z vás zvládla na výbornú. Avšak naskytli sa aj chyby, napríklad že ste málo vysvetlili označenie neznámych alebo vzťah medzi pomermi. Tí, čo len skúšali možnosti, nedostatočne vysvetlili, prečo si vybrali práve tie čísla.

Príklad č. 8 (opravovali Zajo, Ondro):

Zadanie:

Riešenie: Táto úloha ma viacero možných riešení. My si ukážeme jedno z nich pomocou Tálesovej kružnice.

Máme zadané 4 body. Nazvime si ich A, B, C a D. Teraz spojíme dva a dva tak, aby sa nám vzniknuté úsečky nekrížili, a označíme si ich AB a DC. Zostrojíme stredy úsečiek S_1 a S_2. Urobíme dve Tálesove kružnice k_1 a k_2 so stredmi v S_1 a S_2 s dĺžkami $|S_1B|$ a $|S_2C|$. Teraz zostrojíme kolmice na úsečky AB a CD tak, aby prechádzali ich stredmi. Tam, kde nám pretnú kružnice, nám vzniknú 4 body, ktoré si môžeme pomenovať Q_1, Q_2, W_2, W_1, v poradí zdola hore.

Uvedomíme si, že vrcholy štvorca ležia na týchto kružniciach (pretože pri Tálesových kružniciach platí, že ľubovoľný bod spojený s krajnými bodmi priemeru zviera uhol 90°). Vďaka tomu pomocou vety o obvodovom a stredovom uhle vieme zistiť, kde bude ležať uhlopriečka hľadaného štvorca.

Vieme, že stredový uhol bodov B a Q_2 je pravý, teda ich obvodový uhol bude 45°. Keďže aj uhlopriečka so stranou zviera uhol 45° so stranou, na ktorej leží bod B, bod Q_2 bude ležať na uhlopriečke. Obdobne pre bod W_2.

Teraz vieme, že body Q_2 a W_2 ležia na uhlopriečke. Spravíme priamku cez body Q_2 a W_2 a tam, kde nám pretne kružnice k_1 a k_2, sa nachádzajú dva vrcholové body hľadaného štvorca. Teraz už iba dorysujeme strany štvorca pomocou polpriamok, ktoré vychádzajú už z nájdených vrcholov a prechádzajú cez zadané body.

Odpoveď: Áno, dá sa zostrojiť štvorec, ak máme dané 4 body a postup je popísaný v riešení a zobrazený na obrázku 2.

Komentár: Príklad bol tažký, ale niektorí z vás ho zvládli. :) Ostatní ste sa snažili, aj ste na niečo prišli, len ste to nedotiahli do konca.

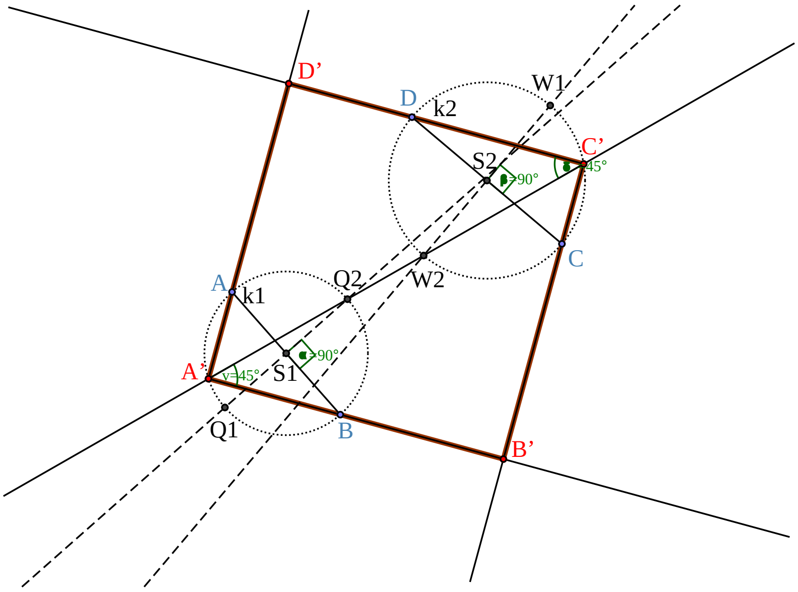
Príklad č. 9 (opravoval Peťo):

Zadanie:

Riešenie: Ako si mnohí z vás všimli, číslo nula má ciferný súčet rovný nule. Preto, ak bude jedným z troch po sebe idúcich čísel, tak určite nedostaneme číslo 981.

Poďme sa však zamysliet nad tým, či by to platilo, ak by čísla mohli byť len prirodzené (t.j. 1, 2, 3, ...). Prvé, čo si treba uvedomiť, je, že kvôli tomu, že čísla sú po sebe idúce, bude práve jedno z čísel deliteľné číslom tri bezo zvyšku, práve jedno so zvyškom jedna a práve jedno so zvyškom dva. Dané tri po sebe idúce čísla si potom vieme zapísať v tvare:

$$3k, \quad 3l + 1 \quad a \quad 3m + 2,$$



Obr. 2: Štvorec

kde k, l a m sú vhodné prirodzené čísla. Napríklad, ak by naše tri po sebe idúce čísla boli 46, 47 a 48, tak by sme ich vedeli zapísať nasledovne:

$$46 = 3 \cdot 15 + 1, \quad 47 = 3 \cdot 15 + 2 \quad a \quad 48 = 3 \cdot 16.$$

Po umocnení dostávame:

$$\begin{aligned}
(3k)^3 &= 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot k \cdot k \cdot k = 27k^3 \\
(3l+1)^3 &= (3l+1) \cdot (3l+1) \cdot (3l+1) = (9l^2 + 6l + 1) \cdot (3l+1) = \\
&= 27l^3 + 27l^2 + 9l + 1 \\
(3m+2)^3 &= (3m+2) \cdot (3m+2) \cdot (3m+2) = (9m^2 + 12m + 4) \cdot (3m+2) = \\
&= 27m^3 + 54m^2 + 36m + 8
\end{aligned}$$

Pri číslach $(3l+1)^3$ a $(3m+2)^3$ vystupuje jednotka a osmička, rovnako ako aj vo výslednom čísle 981. Prirodzená otázka teda znie, ostanú tam, aj keď začneme robiť ciferné súčty? A odpoveď je áno, pretože číslo a jeho ciferný súčet majú rovnaký zvyšok po delení číslom 9. Pre jednoduchosť si ukážeme, že to platí pre štvorciferné číslo $abcd$. Jeho desiatkový rozvoj vyzerá nasledovne

$$\overline{abcd} = 1000 \cdot a + 100 \cdot b + 10 \cdot c + 1 \cdot d$$

Ten ďalej vieme upraviť na

$$\begin{aligned}
\overline{abcd} &= 1000 \cdot a + 100 \cdot b + 10 \cdot c + 1 \cdot d = \\
&= 999 \cdot a + 99 \cdot b + 9 \cdot c + a + b + c + d = \\
&= 9 \cdot (111 \cdot a + 11 \cdot b + 1 \cdot c) + (a + b + c + d)
\end{aligned}$$

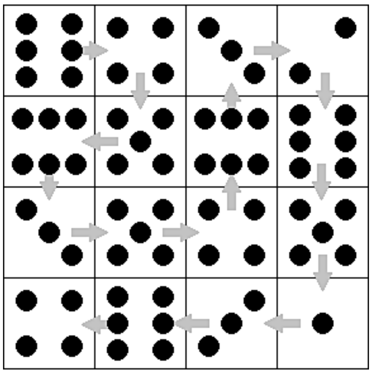
Výraz $9 \cdot (111 \cdot a + 11 \cdot b + 1 \cdot c)$ je deliteľný číslom deväť, preto zvyšok po delení deviatimi čísla $\overline{abcd}$ bude rovnaký ako čísla $(a + b + c + d)$, čo je súčet cifier čísla $\overline{abcd}$. Rovnakým spôsobom by sme to vedeli ukázať pre ľubovoľné číslo.

Z vyššie uvedeného vyplýva, že ciferný sučet ciferného súčtu ciferného súčtu … tretích mocnín troch po sebe idúcich čísel bude rovnaký, ako zvyšok tretích mocnín po delení deviatimi. Číslo $(3l+1)^3$ má zvyšok 1

a číslo $(3m+2)^3$ má zvyšok 2. Číslo $(3k)^3$ má síce zvyšok 0, ale keďže nenulové číslo nemôže mať ciferný súčet nula, tak jeho ciferný sučet ciferného súčtu ciferného súčtu … bude 9. Po usporiadní od najväčšieho po najmenšie teda vždy (ak jedno z nich nebude nula) dostávame číslo 981.
Odpoveď: Neplatí to, ak je jedno z čísel nula. Pre všetky ostatné trojice po sebe idúcich čísel to platí.
Komentár: Väčšina z vás príklad vyriešila, či už poznamenaním, že nula bude mať vždy ciferný súčet len nula, alebo ukázaním, že to platí pre trojice, kde nie je nula.

Prémia (opravovala Zuzka):

Zadanie:
Riešenie: Počet odtlačených bodiek 69 bol najväčší, aký sa vám podarilo dosiahnuť. Ukážem vám jednu z možností, ako dosiahnuť tento počet. Na obrázku 3 je plán s odtlačenými bodkami. Šedé šípky naznačujú, kam sa kocka ďalej z políčka kotúľala.



Obr. 3: Plán s odtlačenými bodkami

Odpoveď: Na pláne sa vám podarilo dostať najviac 69 odtlačených bodiek.
Komentár: Teší ma, že všetci, čo odovzdali riešenie, pochopili zadanie a riešili príkad správne. Preto ste všetci dostali aspoň 1 bod. Za najlepšie riešenie sa dostávalo 6 bodov. Za riešenie s 68 bodkami boli 4 body a za 67 bodiek 3 body. Ak ste mali menej, dostali ste 1 bod.