

Zadania 3. kola letnej série 2014/2015

Termín: 04.05.2015

Naša adresa: Riešky, Mgr. Viera Babišová, Gymnázium Grösslingová, Grösslingová 18, 811 09 Bratislava 1

Elektronické riešenia: <http://riesky.sk/>

Turista? Kdeže, náš Japonec s neobyčajne milou tvárou bol pastier kôz z hôr, no kvôli takmer minutým zásobám sa musel pristaviť v tomto meste počas svojej dlhočíznej cesty.

Príklad č. 5: Skupina pastierov putuje planinou za potravou. Potrava sa nachádza na štyroch miestach, pričom všetky miesta sú od seba vzdialené dva dni ich chôdze, presne toľko, koľko maximálne vydrží stádo nežrať. Na každom mieste nájdú vždy dosť potravy pre všetkých, ale vždy zjedia všetkú potravu na danom mieste. Na mieste A dorastie potrava znova za každých 7 dní, na D aj B za 5 dní.

Za koľko najviac celých dní môže dorásť potrava na mieste C, aby dokázali putovať nekonečne dlho medzi miestami a aby mali vždy dostatok potravy tam, kde prídu? A za koľko najviac by mohla dorásť na C, keby na B dorástla za každých 7 dní?

Minca s pastierom prešla dlhú cestu a dostala sa až do samotného Japonska. Tam sa však mince rozprávali inou rečou. Niežeby si nerozumeli, ale... A takisto mali na sebe úplne iný vzor! A hrávajú sa úplne iné hry!

Príklad č. 8: Máme kocku s hranou 1 meter a mincu s polomerom 0,5 metra. Pretekajú sa. Majú sa dostať zo štartu 5 metrov dopredu a 5 metrov doprava. Minca ide do cieľa po štvrtkružnici so stredom 5 metrov doprava od štartu stálou rýchlosťou tak, že sa valí (otáča sa ako koleso auta). Otočí sa okolo svojej osi za 2 sekundy.

Kocka najprv prejde 5 metrov dopredu až potom 5 metrov doprava (čiže sa nepohybuje zároveň dvoma smermi) tak, že sa preklápa okolo svojej strany. Začiatočnú rýchlosť má 5 preklopení za sekundu v smere dopredu. Po každom preklopení sa môže rozhodnúť, či v smere dopredu-dozađu zrýchli alebo spomalí o 1 preklopenie za sekundu a to isté pre smer doľava-doprava. Po každom preklopení môže zmeniť rýchlosť pre oba smery. Keď prejde tých 5 metrov dopredu, musí zabrzdiť v smere dopredu-dozađu, aby mohla pokračovať v smere doprava, čiže jej rýchlosť v smere dopredu-dozađu bude 0 preklopení za sekundu.

Na začiatku sú kocka aj minca ťažiskom na štarte. Vyhrá ten, kto sa prvý ťažiskom dostane do cieľa. Kto vyhrá?

Títo Japonci museli mať asi všetko iné. Keď minca vykukla z pastierovho vačku, uvidela svetlo sveta. Ulice však vôbec nevyzerali normálne, nie to ešte námestia. To jedno, na ktorom zastali, vyzeralo ako nejaký veľký kvet. Pár detí ho začalo vyfarbovať kriedami.

Príklad č. 6: Mili a Lin sa hrali na námestí tak, že vyfarbovali obrázok kvetu, ktorý bol nakreslený na zemi. Obrázok sa skladal z jednej stredovej kružnice a šiestich okrajových kružníc.

Každá okrajová kružnica má stred na priesečníku stredovej kružnice a dvoch susedných okrajových kružníc, takže stredy okrajových kružníc tvoria pravidelný šesťuholník. Striedajú sa vo vyfarbovaní políčok. Ten, po koho ťahu budú zafarbené 3 také políčka, že prvé susedí stranou s druhým a druhé susedí stranou s tretím, vyhráva. Kto má víťaznú stratégiu a aká je, ak začína Mili?

Na námestí si minca však nevšimla len deti s kriedami. Pastier mincu hodil do klobúka dvoch chlapcov. Boli to dvaja maticí – Liu a Chan, ktorí si dávali hádanky. Ah, áno, minca už vedela, že to budú zas tie matické.

Príklad č. 4: Ak napíšeme za sebou prvých 30 prirodzených čísel, dostaneme 51-ciferné číslo:

$$x = 123456789101112131415161718192021222324252627282930$$

Prirodzené číslo, ktoré je rovnaké po prečítaní sprava aj zľava sa nazýva palindróm. Napríklad čísla 1234321 a 8778 sú palindrómy.

- Zistite, koľko najmenej cifier musíme z čísla x odstrániť, aby sme zvyšné cifry dokázali usporiadať tak, že nám vznikne palindróm. Vysvetlite, prečo neexistuje lepšie riešenie ako to vaše.
- Zistite, koľko najmenej cifier musíme z čísla x odstrániť, aby súčet zvyšných cifier bol 130. Vysvetlite, prečo neexistuje lepšie riešenie ako to vaše.
- Ak napíšeme za sebou prvých 50 prirodzených čísel, dostaneme 91-ciferné číslo:

$$y = 123456789101112 \dots 484950$$

Zistite, koľko najmenej cifier musíme z čísla y odstrániť, aby súčet zvyšných cifier bol 210 a aby sme zvyšné cifry dokázali usporiadať tak, že nám vznikne palindróm. Vysvetlite, prečo neexistuje lepšie riešenie ako to vaše.

Táketo hádanky sa im predsa nemohlo podariť vymyslieť len tak z brucha. Na tom sa určite musela podieľať aj celá rodina, a nie krátky čas.

Príklad č. 3: Chan a jeho sesternica Kim spolu vymýšľali hádanku. Keďže bola Kim chorá, komunikovali len cez telefón, skype alebo chat. Vymýšľali ju od druhej poobede do desiatej večer a len jednu hodinu mali pauzu, kedy sa obaja išli najesť, pričom spolu vôbec nekomunikovali.

Vždy o celej hodine sa rozhodli, čo idú robiť a to potom celú hodinu robili, napríklad: Ak sa o tretej rozhodli, že budú chatovať, tak do štvrtej nerobili nič iné, len chatovali. Cez telefón si vedeli za hodinu vymeniť 40 informácií, cez skype 30 a cez chat 10. Počas celej doby, čo spolu komunikovali, si celkovo vymenili 180 informácií.

Stalo sa, že skypovali hneď po tom, ako telefonovali. Tiež sa stalo, že skypovali hneď po tom, čo chatovali. Prekvapivo nastala aj situácia, že skypovali hneď po tom, čo si hodinu dali pauzu. Koniec koncov sa stalo aj to, že skypovali hneď po tom, čo hodinu skypovali.

Prvé tri hodiny však boli produktívne a niečo robili, vtedy pauzu nemali. Ak telefonovali viac ako 1 hodinu, tak hodiny, kedy telefonovali, boli hneď za sebou. Ak chatovali viac ako 1 hodinu, tak hodiny, kedy chatovali, boli hneď za sebou. Prezradím vám ešte poslednú zákulisnú informáciu. Na vymyslenie hádanky im stačilo vymeniť si 140 informácií, čo zvládli presne do ôsmej. Potom si už len vymieňali informácie charakteru klebiet. Určite, v ktorú hodinu čo robili.

Bola to ťažká hádanka, ale Liu sa nevzdal a uhádol. Na oplátku chcel ohúriť Chana niečím iným.

Príklad č. 2: Liu ukazoval Chanovi magický trik. Chan mal od čísla desaťkrát väčšieho ako jeho vek odčítať deväťnásobok ľubovoľného kladného jednociferného čísla. Vyšlo mu 189. Liu sa chválil, že podľa tohto výsledku vie presne povedať, koľko má Chan rokov. Ak to zvládol Liu, určite to zvládneš aj ty. Koľko mal teda Chan rokov? Ako na to Liu prišiel?

Kým minca počúvala hádanky, ani si neuvedomila, že sa ocitla v rukách Maťa, ktorý ju od matikov vyhral za úhádnutú hádanku. Maťo spolu so Zuzkou a Lámačom na výlete v Japonsku boli kupovať nové kostýmy do Riešok. Čo však vymysleli.

Príklad č. 1: Šatníky Zuzky, Lámača a Maťa sú divné – obsahujú len tričká, nohavice a ponožky. V Zuzkinom pestrom šatníku sa nachádzajú tri tričká – modré, žlté a čierne, ďalej dvojce nohavice – fialové a oranžové a aj štvoro párov ponožiek – s nápismi Mondať, Tuesdať, Wednesdať a Thursdať.

V Lámačovom študentskom šatníku boli nájdené dve tričká – zelené Riešky tričko a červené Riešky tričko, trojo nohavíc – kankalinkové, ružové a okrové s purpurovými medvedíkmi a troje páry ponožiek – s nápismi Fridaj, Saturdaj a Sundaj.

Počet spôsobov, ktorými sa vie Maťo obliecť (dať si na seba jedno tričko, jedny nohavice a jeden pár ponožiek) je rovný rozdielu počtu spôsobov, ktorými sa vie obliecť Zuzka a ktorými Lámač. O Maťovom šatníku ešte vieme, že v ňom má viac ako tri tričká (každé je iné), len jedny nohavice a aspoň jeden pár ponožiek (ak má viac párov, tak žiadne dva nie sú rovnaké).

Zuzka, Lámač a Maťo sú ale poriadni a neobliekajú si ponožky z rôznych párov ponožiek. Koľko kusov oblečenia má Maťo vo svojom šatníku, ak jeden pár ponožiek považujeme za jeden kus oblečenia? Koľkými rôznymi spôsobmi sa vedia ako trojica obliecť?

Minca si užila pobyt v Japonsku, ale začala jej chýbať domovina. Počas spánku si želala, aby sa dostala naspäť. Aj sa stalo – nakoniec sa aj tak dostala späť do banky, mala zaujímavý názov a ešte zaujímavejšie logo, ktoré si Lámač hneď všimol.

Príklad č. 9: Nad priemerom AB je nakreslená polkružnica, ktorej stred nie je vyznačený. Nad polkružnicou je bod C , z ktorého máme zostrojiť kolmicu na AB . Môžeme pracovať len s pravítkom, podľa ktorého sme kresliť len priamky. Podarí sa vám nájsť konštrukciu kolmice?

Aby sa nestratila, Lámač mincu napriek jej vzácnosti vložil na účet.

Príklad č. 7: O Lámačovom bankovom kóde $ABCDEFGHI$ vieme, že:

1. Jeho cifry sú len jednociferné prvočísla, pričom každé jednociferné prvočíslo je v ňom použité aspoň raz a ďalej obsahuje ešte dve iné neprvočíselné cifry (ktoré sa navzájom od seba líšia) a každá z nich je použitá v kóde práve raz.
2. Žiadna cifra v kóde po sebe nenasleduje viackrát.
3. Kód obsahuje cifry 742 idúce tesne za sebou (nie je medzi nimi nič iné) presne v tomto poradí
4. Kód je párne číslo.
5. Súčet $B + I$ vytvorí cifru použitú v kóde.
6. H je prvočíslo.
7. E je minimálne dvojnásobok A .
8. F nie je 5 ani najmenšie prvočíslo.
9. Cifra 3 je použitá v kóde práve dvakrát.
10. Platí: $D \cdot 2 = C$.
11. Súčet cifier susediacich s neprvočíslom je väčší ako dané neprvočíslo.
12. Kód je deliteľný 3.
13. Ak od dvojciferného čísla CG odčítame 1, vzniknuté číslo bude deliteľné 7.

O Zuzkinom bankovom kóde $JKLMNOPQR$ vieme, že:

1. Sú v ňom použité iba cifry menšie ako 6, pričom jedna z cifier menších ako 6 nie je v kóde ani raz.
2. Ciferný súčet kódu je prvočíslo.
3. Platí: $N < P < Q < O$.
4. Súčin všetkých cifier 2 v kóde je o 7 väčší ako súčin všetkých cifier 3 v kóde.
5. Platí: $J - N = K$.
6. Platí: $L - M = N$.
7. Platí: $O = P + J$.
8. Platí: $O - R = L$.
9. Cifry, ktorých je druhý najväčší počet sú iba na niektorých z posledných štyroch pozícií kódu.

Maťo, ktorý vie, kto má aký bankový kód, nám prezradil, že výsledok súčtu

$$ABCDEFGHI + JKLMNOPQR$$

je nepárny palindróm. Aký je Zuzkin bankový kód? Aký je výsledok súčtu oboch bankových kódov?

Poznámka: Bankové kódy sa nezačínajú nulou.

Konečne sa minca dostala medzi svojich. Bola celá bez seba, tak si mince, ktoré precestovali celý svet, začali rozprávať príbehy. Jedna vraj bola raz použitá namiesto šachovej figúrky, ale asi to nebol obyčajný šach.

Prémia: Táto hra sa hrá iba na čiernych políčkach šachovnice 8×8 . Strelec pokrýva políčko, ak na ňom stojí, alebo ak sa na to políčko vie pohnúť v ďalšom ťahu.

Hru hrajú Josh s Franzom, ktorí sa striedajú v ťahoch. Šachovnicu najskôr vyplnia minimálnym počtom strelcov tak, aby všetky čierne políčka boli pokryté. Následne si Josh vyberie jedného strelca. Zvyšných strelcov si zoberie Franz.

Strelec sa môže pohybovať len po diagonálach šachovnice prechádzajúcich cez políčko, na ktorom momentálne stojí (ako v normálnom šachu). Pokiaľ sa strelec pohne na políčko, na ktorom stojí protihráčov strelec, vyhodí ho. Pokiaľ sa hráč môže pohnúť tak, že vyhodí protihráčovho strelca, tak to musí urobiť. Hra sa skončí, keď jeden z hráčov má všetkých svojich strelcov vyhodенých. Franz začína. Nájdite čo najviac možností vyplnenia šachovnice najmenším možným počtom strelcov pred začiatkom hry (nezáleží na otočení šachovnice, čiže symetrické možnosti považujte za totožné). Koľko najviac ťahov môže mať ich hra, ak každý chce vyhrať na čo najmenej ťahov (hrá najlepšie ako vie)?

(Pokyn: V tomto príklade stačí popísať, na ktoré políčka ste umiestnili strelcov v jednotlivých možnostiach a popísať, ako ste ťahali, aby ste sa dostali k najväčšiemu počtu ťahov.)

*** Tento príklad je bodovaný inak ako ostatné. Viac informácií nájdeš v pravidlách. ***

Čo osud chcel, minca dlho na účte neostala. Nakoniec však aj tak skončila na matfyzе v Bratislave. Viedla si tam spokojný život. Choďte sa jej sami spýtať, ešte stále ju tam možno nájdete.