Vzorové riešenia 3. kola letnej série 2014/2015

Príklad č. 1 (opravovala gabika):

Zadanie:

Riešenie: Na začiatok si počty tričiek, nohavíc a ponožiek, ktoré vieme zo zadania, zapíšeme do prehľadnej tabuľky 1. Počet spôsobov, koľkými sa vie osoba obliecť, zrátame ako súčin počtu možných volieb trička, počtu možných nohavíc a počtu možných volieb ponožiek. Znamená to, že Zuzka sa vie obliecť $3 \times 2 \times 4 = 24$ spôsobmi a Lámač $2 \times 3 \times 3 = 18$. Keďže počet spôsobov, koľkými sa vie obliecť Maťo, je rovný rozdielu počtov spôsobov, koľkými sa vie obliecť Zuzka a koľkými Lámač, Maťo sa vie obliecť $24 - 18 = 6$ spôsobmi.

	Trička	Nohavice	Ponožky
Zuzka	3	2	4
Lámač	2	3	3
Maťo	viac ako 3	1	aspoň 1

Tabuľka 1: Počty oblečenia

Maťo má jedny nohavice a aspoň jedny ponožky. Počet spôsobov, koľkými sa vie obliecť, nemôže byť menší ako počet tričiek, ktoré má vo svojom šatníku. Znamená to, že Maťo môže mať štyri, päť alebo šesť tričiek. Pre čísla 4 a 5 by sme nikdy nemohli dostať súčin 6 (počet spôsobov, koľkými sa Maťo vie obliecť), teda Maťo musí mať práve 6 tričiek, jedny nohavice a jedny ponožky. To je spolu osem kusov oblečenia.

Počet spôsobov, koľkými sa vedia naši traja vedúci obliecť, je rovný súčinu počtu spôsobov, koľkými sa vie obliecť Zuzka, počtu Lámačových možností a počtu Maťových možností. Teda $24 \times 18 \times 6 = 2592$.

Odpoveď: Maťo má vo svojom šatníku osem kusov oblečenia a vedúci sa vedia obliecť 2592 spôsobmi.

Komentár: Príklad nebol ťažký a zvládli ste ho veľmi dobre, patrí vám teda pochvala :)

Príklad č. 2 (opravovala Dada):

Zadanie:

Riešenie: Prvá vec, čo si na tomto príklade všimneme, je, že desaťnásobok niekoho veku končí na 0. Preto aj desaťnásobok Chanovho veku končí na 0. Teda sme od čísla končiaceho na 0 odpočítali nejaké číslo a dostali sme 189. Z toho vieme, že odpočítavané číslo končilo na jednotku.

My ale o odpočítavanom čísle vieme oveľa viac! Vieme, že je to deväťnásobok jednociferného kladného čísla. Poďme sa teda pozrieť na tieto násobky, či tam taký nájdeme: $0, 9, 18, 27, 36, 45, 54, 63, 72, 81$. Všimneme si, že na cifru 1 končí jedine 81.

Teda desaťnásobok Chanovho veku je rovný $189 + 81 = 270$, a preto má Chan 27 rokov.

Vieme si ale všimnúť ešte niečo oveľa lepšie. Vo vyššie vypísaných násobkoch čísla 9 vidíme, že každý končí na inú cifru, a zároveň, že medzi poslednými ciframi je každé číslo od 0 do 9 práve raz.

Z toho vieme povedať, že aj keby nevyšlo práve číslo 189, ale hocijaké iné, Liu si vie vždy vybrať práve jeden vhodný násobok 9, aby ich súčet končil na 0, a tak vždy uhádnuť vek.

Odpoveď: Chan má 27 rokov.

Komentár: Príklad ste takmer všetci mali správne, teda chválim :). Niektorí z vás ma potešili a dokonca ukázali aj ako Liu robí magický trik pre hocijaký vek (ako sme uviedli aj vo vzoráku).

Príklad č. 3 (opravovali Tete, Dada):

Zadanie:

Riešenie: Komunikovali od druhej do desiatej, to je práve 8 hodín, ktoré treba vyplniť činnosťami. Zo zadania si vypíšeme nasledovné podmienky:

1. Aspoň raz sa stalo, že po hodine telefonovania skypovali.
2. Aspoň raz sa stalo, že po hodine chatovania skypovali.
3. Aspoň raz sa stalo, že po hodine voľna skypovali.
4. Aspoň raz sa stalo, že po hodine skypovania skypovali.

5. Prvé tri hodiny pracovali, nemali voľno.
6. Práve jednu hodinu mali voľno.
7. Ak chatovali viac ako hodinu, tak chatovali vkuse.

Vieme, že sa teda v ich konverzácii ocitli kombinácie činností:

- Telefonovanie a skype,
- voľno a skype,
- chat a skype.

To vypĺňa 6 z 8 hodín práce (zatiaľ nevieme, v akom poradí sú). Za tento čas si vymenili $40+30+10+30+0+30=140$ informácií. Zostáva nám zvyšných 40 informácií, ktoré môžu byť zložené z dvoch činností, a to

- skype a chat, alebo
- telefón a voľno.

No podľa podmienky (6) oddychovali len 1 hodinu, a tú sme už započítali vyššie, čiže ostáva prvá z možností – skype a chat. Teda ich komunikácia pozostávala z jedného telefonovania, dvoch chatov, jedného voľna a štyroch skypov.

Teraz sa pozrieme na poradie týchto činností. V zadaní máme napísané, že za posledné dve hodiny si vymenili $180-140=40$ informácií. Tie znova vieme dosiahnuť, ako

- telefón a voľno, alebo
- skype a chat.

Povedzme, že posledné dve hodiny telefonovali a mali voľno. No vieme, že telefonovanie aj voľno sa udialo práve raz, preto skypovanie musí nasledovať za každým z nich (aby boli splnené podmienky (1) a (3)). Posledné dve hodiny teda museli chatovať a skypovať.

Keďže chatovali dve hodiny a vieme, že jednu z posledných dvoch hodín určite chatovali. Tak podľa pravidla (7) vieme, že poslednými tromi činnosťami museli byť dva chaty a jeden skype. Aby sme splnili podmienku (7) a zároveň aby skypovanie bolo jednou z posledných dvoch činností, tak posledné tri činnosti boli nutne v takomto poradí: chat, chat, skype. Čím sme splnili podmienky (7) a (2).

Zostáva nám určiť prvých 5 hodín. Máme k dispozícii kombinácie činností

- voľno a skype,
- telefonovanie a skype,
- jeden skype.

Z podmienky (5) vyplýva, že prvú z týchto možností (voľno a skype) musíme umiestniť na štvrtú a piatu hodinu.

Nesplnili sme ešte podmienky (1) a (4) a ostala nám druhá (telefonovanie a skype) a tretia (jeden skype) možnosť. Existuje len jedno poradie prvých troch činností, kedy sú splnené obe ostávajúce podmienky, a to je nasledovné: telefonovanie, skype, skype.

Odpoveď: Poradie činností pri vymýšľaní hádanky bolo nasledovné: telefonovanie, skype, skype, voľno, skype, chat, chat, skype.

Komentár: Príklad bol z vašej strany pekne zvládnutý. Občas sa stalo, že ste nerozlíšili pojem „vždy po telefonóvaní skypovali“ a „stalo sa, že po telefónovaní skypovali“. Videli sme však aj mnoho 10 bodových riešení, ktorým nebolo čo vytknúť.

Príklad č. 4 (opravovali ViRPo, Ivo):

Zadanie:

Riešenie: Pre palindróm platí, že n-tá cifra zľava aj zprava sú rovnaké, a teda pokiaľ to nie je tá istá cifra, tak tvoria pár. Čiže palindróm tvorí niekoľko týchto párov a niekedy osamotená cifra, ktorá potom musí byť v strede. To je ale skvelé zistenie, lebo teraz vieme, že nepárne množstvo bude maximálne jedného druhu cifier.

(a) V čísle x sa nachádza jednotka a dvojka 13-krát, trojka 4-krát a ostatné cifry 3-krát. Aby sme dostali palindróm, musíme odobrať aspoň 8 cifier, aby iba jedného druhu cifier bolo nepárne množstvo. Ak by

sme odobrali menej ako 8 cifier, vždy by tam boli aspoň dva druhy s nepárnym množstvom. Jedinou podmienkou pre odobraté cifry je, že neodoberám cifru, ktorá je tam párny počet krát.

(b) Ciferný súčet čísla x je 168. Aby som dostal ciferný súčet 130, musím vyškrtnúť cifry, ktorých súčet je 38. Budem postupovať spôsobom, že odoberám najväčšie cifry, lebo majú najväčšiu efektivitu v znižovaní ciferného súčtu. 3 deviatky dávajú súčet iba 27, a tak k nim musím pridať ešte minimálne dve cifry so súčtom 11, keďže cifra 11 neexistuje. Menej sa nedá, lebo vtedy by bol priemer odobratia jednou cifrou väčší ako 9 a teda aspoň jedna odobratá cifra by musela byť väčšia ako 9.

(c) Najprv sa zameriame na to, aby bolo číslo palindrómom. Rovnako ako pred tým odoberieme jednu z každej cifry, ktorá sa v čísle nachádza nepárny počet krát. Jedna môže ostať aj v nepárnom množstve, v palindróme bude v strede. Potrebujeme čo najmenším počtom odobratí znížiť ciferný súčet o čo najviac. Oplatí sa nám teda vynechať najmenšie číslo, teda nulu, nepárny počet krát. Ciferný súčet je 330. Keď podľa toho, čo sme predchvílou zistili, odstránime z každej cifry okrem nuly a päťky po jednej (lebo päťka je tu 6-krát, čo je párny počet), znížime tento ciferný súčet o 40 odobraním 8 cifier. Aby sme sa dostali na ciferný súčet 210, budeme znova odstraňovať najprv čo najväčšie cifry a aby sme z nich vedeli stále spraviť palindróm, budeme vždy odstraňovať po párocch. Ak by nám to po párocch nevyšlo, zameníme nevyškrtnutú nulu za inú cifru, ale uvidíme, či to budeme potrebovať spraviť. Ak odoberieme všetky 4 deviatky a 4 osmičky, znížime tým ciferný súčet o 68, teda nám tento súčet treba znížiť ešte o 12. To nevieme spraviť lepšie, než tak, že odoberieme 2 šestky. Keďže sme postupne vždy odoberali najväčšie číslo, neexistuje iný, lepší spôsob, ako znížiť ciferný súčet o 120. Dohromady sme teda odobrali 18 cifier.

Odpoveď: Odpovede teda sú:

(a) 8
(b) 5
(c) 18

Komentár: Príklad mala väčšina z vás dobre. Najviac ste strácali body kvôli nesprávnemu sčítavaniu ciferného súčtu.

Príklad č. 5 (opravoval Zajo):

Zadanie:

Komentár: Začnem komentárom, keďže bodový priemer 49 riešení bol 4.327 (na porovnanie príklad 4 mal priemer 8.9, príklad 6 – 5.7 a príklad 7 – 8.8). Niekde zrejme nastala chyba a viacerých z vás to stálo niekoľko bodov. Venujme sa tomu, o čo išlo. Cieľom nie je nikomu vynadať, to vôbec, práve naopak, ak tento kus textu prečítate, môže vám to pomôcť v riešení matematických úloh či už ďalší rok v Rieškach, ale aj kdekoľkvek inde, kde sa riešia príklady olympiádnou formou (v skratke – aj s postupom).

Často sa stane, že niekoľko riešiteľov napíše iba výsledok. Vzhľadom na charakter príkladov to je veľmi málo oproti celému riešeniu a teda podľa príkladu dostávajú $0-2$ bodov. Teraz sa ale k tomuto uchýlilo viacero riešiteľov, často aj skúsených. Príčinu by sme mohli hľadať v tom, že samotné nájdenie riešenia alebo aj oboch správnych, vyžaduje celkom dosť práce a vysvetlenie ich fungovania už je nejaká časť postupu.

Uvedomme si ale, čo takéto riešenie znamená. Existuje obrovské množstvo spôsobov, ako mohli pastieri cestovať, aké bolo C a ako na to prísť. Riešiteľ ukáže jeden z nich, prehlási ho za najlepší a koniec. Keď si to takto povieme, môže to znieť až smiešne.

Pri takýchto úlohách musíme totiž okrem toho, že naša možnosť je najlepšia, prehlásiť aj o ostatných, že sú horšie. Inými slovami dokázať, že naša je najlepšia. A dokazovať sa dá rôzne. Možno najjednoduchšie (z myšlienkového hľadiska, nie vždy z materiálneho) je vypísať všetky možnosti. V takomto prípade sa musí jednať o všetky. Nie len niektoré, lebo potom sme neprehlásili nič o chýbajúcich a naše riešenie je nedostatočné.

Iným spôsobom je použitie ohraničenia, čo sa dalo veľmi pekne využiť napríklad v tomto príklade, ale rovnako sa to využíva aspoň na jednom príklade v skoro každom kole. V skratke si preto vysvetlime, o čo ide.

Keď hľadáme nejaké maximum alebo minimum, napríklad pre dorastanie miesta C, tak na začiatku nevieme o ňom nič. Môže to byť ľubovoľné číslo. Oplatí sa nám teda nejako si určiť hranice, medze, v ktorých

sa bude nachádzať. Napríklad to nebude nekonečno, lebo ostatné tri body nám nestačia, ale maximum bude aspoň štyri, lebo pre neho existuje nejaká možná cesta. Také ohraničenie nám ale stále nepomáha, preto urobíme nejaké lepšie, hovoríme mu „silnejšie“.

Než si prečítate vzorák, skúste dokázať, že maximum dorastania C v možnosti A nebude viac ako 14. Poradím vám, aby ste sa skúsili pozrieť na to, koľko miest treba navštíviť medzi dvomi návštevami toho istého, resp. čo sa bude diať medzi dvomi C.

Týmto by sme urobili tzv. horné ohraničenie, teda že maximum bude číslo menšie ako 14. Z druhej strany už netreba vymýšlať ohraničenie, stačí nájsť nejaký spôsob dosiahnutia maxima z toho intervalu, ktorý nám ostal. Ostal nám interval od 4 po 12 (o 2 menej ako 14). Ak pre 12 nájdeme jednu možnosť cestovania, už sme vyhrali a príklad je vyriešený, pretože tým pádom je 12 naozaj možné dosiahnuť a viac nejde, keďže je to maximum.

Podobne to môže v iných úlohách fungovať aj z opačnej strany použitím minima. Dôležité však je, že nemôžeme použiť názorný príklad z oboch strán (zhora aj zdola). Aspoň z jednej strany musíme nájsť ohraničenie a zdôvodniť, prečo hľadaná hodnota nebude za danou hranicou.

Ak tomu stále neveríte, že sa to celé oplatí, tak vám radím, skúste to, aspoň raz. Body vám odpovedia :) A teraz poďme na vzorák samotného príkladu.

Riešenie: Vieme, že pastieri putujú vždy párny počet dní, preto dorazíme na každé miesto v párny deň. Uvedomme si preto, že nezáleží na tom, či niekde dorastá potrava 5 alebo 6, resp. 121 alebo 122 dní, lebo pastieri tam dorazia až v ten párny deň. Preto vieme, že obidva výsledky budú párne.

Keď miesto dorastá raz za 5 dní, vyplýva z toho, že pastieri musia medzi tým, ako tam znova prídu, navštíviť ďalšie 2 miesta. Pri 7 dňoch ďalšie 3 miesta.

Hľadáme najväčšie možné C. Zjavne to nebude môcť byť nekonečno, lebo na ostatných troch miestach nevieme chodiť dokola. Po chvíli skúšania zistíme, že ide vytvoriť cyklus dlhý 8, 10, dokonca 12 dní. Vtedy už tušíme, že to bude riešenie a stačí to len dokázať.

Viac ako 12 je 13, čo je to isté ako 14 dní. Ak by C dorastalo raz za 14 dní, musíme medzitým navštíviť 6 iných miest. Medzi dvomi A musíme navštíviť 3 rôzne miesta, preto v tomto cykle bude A najviac dvakrát. Ak by tam bolo dvakrát (v cykle medzi dvomi C), musí byť medzera medzi jednotlivými A vyplnená pomocou B a D. To však zjavne nejde, navštívime jedno z tejto dvojice, potom druhé a na tretí ťah nemáme kam ísť, keďže ani B ani D by nestihlo dorásť.

A bude preto v cykle medzi dvomi C najviac raz. Ale ak je tam 6 miest a jedno z nich je A, tak buď medzi predchádzajúcim C a našim A budú opäť aspoň tri miesta alebo medzi našim A a ďalším C budú aspoň tri miesta. Dôjdeme teda k rovnakému problému, danú medzeru nevyplníme len pomocou B a D. Ak by v cykle nebolo žiadne A, tak nastane obdobný problém.

Tým sme dokázali, že cyklus nebude mať dĺžku 14 alebo viac, stačí teda riešenie zakončiť príkladom cyklu dĺžky 12 a máme dokázané, že to je najviac. Takým cyklom je napríklad $C-B-D-A-B-D(-C-B-D\dots)$.

Ak B dorastá raz za 7 dní, použijeme pohľad z trochu inej strany. C zjavne môže byť 8. V tom prípade by sme chodili dokola $A-B-C-D(-A-B\dots)$. Čo ak by ale malo byť väčšie (teda 10)?

Opäť v cykle medzi dvomi C musia pastieri navštíviť 4 miesta. Z rovnakého dôvodu ako minule nemôžu byť dve z nich A alebo B (sú 7-dňové a medzi dvojicou by museli byť tri iné miesta, čo zjavne nevieme urobiť). Preto v ňom budú práve jedno A, jedno B a dve D. Na to ostáva jediná možnosť, kedy majú dve D medzi sebou dve mestá, a to cyklus $C-D-A-B-D(-C-\dots)$.

V tomto bode niektorí z vás skončili a došlo k strate bodov. Háčik totiž nastane, keď budeme tento cyklus chcieť zopakovať druhýkrát. V $C-D-A-B-D-C-D-A\dots$ vidíme, že C je obklopené dvomi D. Po prvom zožratí však D nestihne dorásť, kým tam prídeme znovu. V druhej časti budeme musieť zvoliť cestu začínajúcu A alebo B. My sme už ale dokázali, že taká cesta nebude dlhá 10, takže C navštívime skôr, ako raz za 10 dní.

Preto je maximum v tomto prípade 8 a príklad takého cestovania sme už našli.

Odpoveď: Ak B dorastá za 5 dní, C môže dorastať najviac za 12 dní. Ak B za 7, tak C môže dorastať najviac za 8 dní.

Príklad č. 6 (opravovala Zuzka):

Zadanie:

Riešenie: Jedným z problémov, s ktorými som sa stretla pri riešení a opravovaní tohto príkladu, bolo, či sú Mili a Lin dievčatá alebo chlapci a teda či o nich mám hovoriť v ženskom alebo mužskom rode. Rozhodla som sa, že o nich budem hovoriť v strednom rode.

Na začiatok je potrebné si všimnúť, že plán hry je stredovo súmerný a každé políčko má svoju dvojicu, ktorá je jeho zobrazením cez stred. Tiež si treba uvedomiť, že ak majú dve políčka spoločnú stranu, tak aj ich dvojice majú spoločnú stranu.

Ako sa dá vyhrať, máme napísané v zadaní. Ako sa však dá prehrať? Predsa tým, že vyfarbíme políčko, ktoré je o 1, alebo o 2 vzdialené od už vyfarbeného políčka. Náš súper následne vie k danému vyfarbenému políčku a k nami vyfarbenému políčku pridať ďalšie tak, aby vyhral. Hráči sa teda snažia vyhnúť vyfarbeniu takýchto „nebezpečných“ políčok. Vždy, keď niekto zafarbí jedno políčko, niekoľko ďalších, ktoré sú od daného políčka vzdialené o 1 alebo 2, sa stanú „nebezpečnými“. Zároveň sa nikdy nebezpečnou nestane dvojica daného políčka, pretože každé políčko je od svojej dvojice vzdialené o 6 (jasne sa to dá vidieť z obrázka plánu).

Výherná statégia existuje pre druhého hráča v poradí, a teda pre Lin. Stačí, ak bude vždy vyfarbovať dvojicu políčka, ktoré zafarbí Mili. Vysvetlím, prečo to funguje. Keď Lin zafarbí dvojicu políčka, ktoré zafarbilo Mili, políčka, ktoré týmto urobilo „nebezpečnými“, sú dvojicami políčok, ktoré „nebezpečnými“ urobilo Mili. Takže v jednom kole sa jedna dvojica políčok vyfarbí, niekoľko sa stane „nebezpečnými“ a s ostatnými dvojicami sa nič nestane. Nikdy nebude existovať dvojica, kde by jedno políčko bolo „nebezpečné“ a druhé nie. Preto vždy, keď Mili zafarbí políčko, ktoré nie je nebezpečné, tak Lin môže bez obáv zafarbiť dvojicu tohto políčka, lebo tá určite tiež nie je „nebezpečná“.

Ak Mili zafarbí „nebezpečné“ políčko, Lin vie zafarbením políčka hneď vyhrať. To vyplýva z definície „nebezpečných“ políčok. Keďže každým kolom sa počet políčok, ktoré nie sú zafarbené ani „nebezpečné“, znižuje, skôr či neskôr nastane situácia, pri ktorej Mili už nebude môcť zafarbiť iné políčko, ako niektoré „nebezpečné“ a teda Lin v ďalšom ťahu vyhrá.

Mili proti tejto stratégii nemá čo urobiť, keďže začína a teda v jeho prvom ťahu nemôže ono opakovať po Lin. Zdôvodnili sme si, prečo vždy Mili ako prvá vyfarbí „nebezpečné“ políčko.

Odpoveď: Výhernú stratégiu má Lin a je popísaná v riešení.

Komentár: Bohužiaľ ste viacerí nepochopili, že Mili a Lin zafarbujú rovnakou farbou, alebo teda nezáleží na tom, kto zafarbil ktoré políčka. Verzia, kde každé chce dostať sebou zafarbené tri políčka za sebou, je priveľmi jednoduchá, takže veľa bodov som vám za to nemohla dať. Niekedy je dobré myslieť na to, že ak sa vám príklad zdá veľmi jednoduchý, asi ste ho nepochopili správne ;) Tiež vás chcem upozorniť na to, že ak popisujete výhernú stratégiu jedného hráča, jemu môžete presne diktovať, čo má robiť. Avšak musíte rátať s tým, že protihráč môže hrať akokoľvek a dokonca vôbec nemusí hrať najlepšie, ako vie.

Príklad č. 7 (opravovali Marka, Ondro):

Zadanie:

Riešenie: Začneme s jednoduchším Zuzkiným kódom. Z bodu číslo 1 vyplýva, že v tomto kóde použijeme práve štyri cifry z 0 až 5 a žiadne iné.

Z bodu číslo 4 vyplýva rovnica $3^m + 7 = 2^n$. Vieme, že m je prirodzené číslo menšie ako 6, takže nám stačí postupne dosadiť čísla od 1 do 5. Jediné m, pre ktoré je výraz $3^m + 7$ rovný mocnine čísla 2, je 2. Neznáma n vyjde rovná 4. Počet cifier 3 je preto 2 a počet cifier 2 je 4.

Teraz už máme určených 6 cifier z deviatich. Vieme, že ešte musíme použiť 3 rôzne iné cifry z $0, 1, 4, 5$. Pozrime sa na bod 2. Súčet cifier, o ktorých zatiaľ vieme, je $2 + 2 + 2 + 2 + 3 + 3 = 14$. Súčet ďalších troch cifier môže byť najmenej $0 + 1 + 4 = 5$ a najviac $1 + 4 + 5 = 10$. Výsledný ciferný súčet bude preto na intervale od 19 do 24. Keďže má byť prvočíselný, do úvahy spadajú čísla 19 a 23. Na dosiahnutie ciferného súčtu 19 potrebujeme, aby súčet troch ešte chýbajúcich cifier bol 5, čo vieme dostať len ciframi $0, 1$ a 4. Na ciferný súčet 23 potrebujeme doplniť cifry $0, 4$ a 5. Z tohoto nám vyplýva, že sa tam určite nachádza 0 a 4. Zostáva nám už len zistiť, či tam bude 1 alebo 5.

Z bodu 9 vyplýva, že obe cifry 3 sú na posledných štyroch miestach $OPQR$, pretože 3 je druhá najpočetnejšia cifra. O OPQ vieme, že sú od seba rôzne z bodu 3. Tým pádom sa R rovná 3, lebo na miestach

OPQ môže byť iba jedna cifra 3. Teraz sa pozrime na nerovnicu $N < P < Q < O$ z bodu 3. O môže byť od 3 do 5, Q od 2 do 4, P od 1 do 3 a N od 0 do 2.

Z rovnice $O - R = L$ z bodu 8 vieme povedať, že L môže byť len 0, 1 alebo 2. Keby sa L rovnalo 0, tak by sa podľa bodu 6 museli rovnať $-M$ a N, čo sa nám nemôže stať, keďže rátame len s prirodzenými číslami. Keby L bolo 1, tak by aj M muselo byť 1, a to nemôže nastať, lebo môžeme mať iba jednu cifru 1. Zostáva nám možnosť, že L je 2, a teda O je 5.

Teraz už vieme, že cifry sú 0, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 4, 5.

Aby sme splnili bod 9, P alebo Q musí byť 3. Ak by Q bolo 3, P by muselo byť 2 (keďže cifru 1 v kóde nemáme). Zoberieme si rovnicu $O = P + J$ z bodu 7. J by podla nej muselo byť 3, čo však nemôže, keďže cifry 3 už máme zabraté. P teda musí byť tou cifrou, ktorá sa rovná 3. Z rovnice $O = P + J$ vieme, že J je 2. Keďže O je 5, P je 3 a musí platiť $P < Q < O$, tak Q je 4.

N môže byť buď 2 alebo 0, aby platilo $N < P < Q < O$. Ak by N bolo 2, tak by podľa bodu 6 muselo platiť, že M je 0. Podľa bodu 5 by však aj K muselo byť 0, no cifra 0 sa má v kóde vyskytovať len raz. N preto musí byť 0. Ostatné cifry sa už môžu rovnať len 2. Zuzkin kód je: 222205343.

Teraz kód Lámača. Z bodu 1 vieme, že sú tam použité cifry $2, 3, 5, 7$. Ďalej podľa bodu 3 kód obsahuje aj cifru 4 a podľa bodu 9 je tam ešte jedna cifra 3. O ostávajúcich troch cifrách vieme, že dve sú prvočísla a jedno neprvočíslo. Pokračujme bodom 3. Postupne si poposúvajme 742 po kóde.

ABC Nevychádza, lebo podľa bodu 7 by E malo byť minimálne 14, čo nemôže, lebo je jednociferné.

BCD Aby platil bod 13, G môže byť len 3, pretože $CG - 1 = 43 - 1 = 42$, čo je deliteľné siedmimi. S inými ciframi by to neplatilo. I musí byť párne, keďže celý kód má byť párny podľa bodu 4. Musí platiť $B + I < 10$ z bodu 5, takže I môže byť buď 0 alebo 2. Skúsme možnosť, kde I je 0, čiže bude druhou neprvočíselnou cifrou a všetky ostatné musia byť prvočísla. Podľa bodu 2 nemôžu nasledovať dve rovnaké cifry za sebou, a teda keďže G je 3, tak F ani H nemôžu byť 3. Zostávajú už len A a E, ktoré môžu byť 3. Ak by bola na E, tak A by musela byť buď 0 alebo 1, aby bol splnený bod 7, no to nemôže byť. Zostáva nám, že A je 3 a E je 7, keďže musí byť prvočíslom a zároveň minimálne dvojnásobkom A podľa bodu 7. Za F však nevieme nič dosadiť, keďže má byť prvočíslom, no podľa bodu 8 nemôže byť rovné 2 ani 5 a podľa bodu 2 nemôže byť rovné 3 ani 7. Iné prvočísla nie sú dostupné.

Zostáva možnosť, že I je 2. Podľa bodu 5 sa v kóde musí nachádzať cifra 9, čo bude druhá neprvočíselná cifra. Znova platí, že A je 3, a to z rovnakého dôvodu ako v predchádzajúcom prípade. Kód teraz vyzerá takto: $3742EF3H2$. E môže byť buď 7 alebo 9, aby platil bod 7. Keby E bolo 9, tak by podľa bodu 11 muselo F byť buď 8 alebo 9, čo ale nemôže byť, lebo by bolo ďalším neprvočíslom. Takže E je 7. Podľa bodu 6 je H prvočíslom, takže bude rovné 5 a pre F zostala cifra 9. Takže Lámačov kód je: 374279352. Treba ešte overiť aj zvyšné možnosti pre umiestnenie 742 v kóde.

CDE Nevychádza rovnica v bode 10.

DEF Nevychádza kvôli bodu 8, podľa ktorého sa F nesmie rovnať 2.

EFG Podľa bodu 13 môže byť CG 22 alebo 92. Aby však bol splnený bod 10, C môže byť len 2, a teda D bude 1. Musíme ešte umiestniť dve cifry 3. Tie môžu byť na A, B a H. Aby bol splnený bod 2, iba jedna z cifier A a B môže byť 3, a teda H bude 3. Podľa bodu 11 to môže byť len A. Teraz je tu ale problém s cifrou 5, ktorú nemôžeme dať ani na I (to musí byť párne) ani na B, takže táto možnosť nám vypadáva.

FGH Do rovnice z bodu 13 vyhovuje iba 64, takže C je 6 a podľa bodu 10 je D rovné 3. Teraz ale kvôli bodu 4 nemáme čo dať za I. Nemôže to byť ani 2, lebo by boli dve 2 za sebou, ani iné párne číslo, lebo by sme dostali tretie neprvočíslo. Táto možnosť nevyhovuje.

GHI Nevychádza kvôli bodu 6, keďže H nemôže byť neprvočíslo.

Teraz môžeme sčítať oba kódy: $374279352 + 222205343 = 596484695$
Je to nepárny palindróm.

Odpoveď: Zuzkin kód je 222205343 a palindróm je 596484695.

Komentár: Viacerí ste postupovali aj tak, že ste najprv zistili Zuzkin kód a potom pomocou súčtu, ktorý mal byť palindrómom, ste prišli aj na Lámača, čo je tiež správny postup. Skoro všeci ste sa dopracovali k správnemu výsledku a ľahko zarobili 10 bodov, stačilo len napísať podrobný postup. :)

Príklad č. 8 (opravovali Jumaj, Lámač):

Zadanie:

Riešenie: Ťažisko mince sa na začiatku nachádza nad štartom. Kedže minca je okrúhla, ťažiskom bude stred mince. Na konci sa nachádza jej ťažisko nad cieľom, čiže stačí zistiť, koľko trval pohyb tohto ťažiska. Minca sa valí ako kruh s polomerom $r = 0,5$ metra, ktorého obvod o bude: $o = 2\pi \cdot r$, teda $o = \pi$.

Aby sa minca dostala do cieľa, pohybuje sa po štvrťkružnici s polomerom 5 metrov. Obvod štvrťkružnice je štvrtina z obvodu kružnice s tým istým polomerom, preto prejde dráhu s: $s = \frac{2\pi \cdot 5}{4}$, teda $s = \frac{5}{2} \cdot \pi$.

Kým sa minca dostane do cieľa, otočí sa toľkokrát, koľkokrát je jej obvod o menší ako prejdená dráha s. Počet jej otáčiek p bude:

$$p = \frac{s}{o}$$
$$p = \frac{\frac{5}{2} \cdot \pi}{\pi}$$
$$p = \frac{5}{2}$$

Jedna otáčka, čiže otočenie okolo svojej osi, jej trvá 2 sekundy. Kým sa otočí $\frac{5}{2}$-krát, bude jej to trvať 5 sekúnd. Minca sa teda do cieľa dostane za 5 sekúnd.

Kocka má hranu dlhú 1 meter. Preto prejde 5 metrov dopredu piatimi preklopeniami. Ťažisko kocky je na začiatku jej preklápania na štarte a na konci v cieli. Preklopením sa jej ťažisko pohne o jeden meter. Po preklopení sa vie rozhodnúť, či spomalí, poprípade zrýchli, len o jedno preklopenie za sekundu. Kedže na začiatku má rýchlosť v smere dopredu-dozadu 5 preklopení za sekundu a po piatich preklopeniach ju má mať nulovú, musí po každom preklopení spomaliť o jedno preklopenie za sekundu. Kocka bude mať po celý pohyb dopredu nulovú rýchlosť v smere vpravo-vľavo, kedže inak by sa nehýbala len dopredu. Po poslednom preklopení musí zrýchliť na jedno preklopenie za sekundu v smere vpravo-vľavo, inak by sa už odtiaľ nepohla. Kedže sa už len chce čo najrýchlejšie dostať do cieľa, bude po každom preklopení čo najviac zrýchlovať v smere vpravo-vľavo. Po každom preklopení zrýchli o jedno preklopenie za sekundu. Jej rýchlosť v smere dopredu-dozadu bude nulová. Keď sa hýbe rýchlosťou x preklopení za sekundu, jedno preklopenie spraví za $\frac{1}{x}$ sekundy. Celkový čas preklápania kocky do cieľa bude:

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{4} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \tag{1}$$
$$= 2 \cdot (\frac{12}{60} + \frac{15}{60} + \frac{20}{60} + \frac{30}{60} + \frac{60}{60}) \tag{2}$$
$$= \frac{137}{30} \tag{3}$$

Kocka sa do cieľa dostane za $\frac{137}{30}$ sekundy. Kedže $\frac{137}{30} < 5$, kocka bude v cieli skôr ako minca.

Odpoveď: Vyhrá kocka.

Komentár: Príklad bol ľahký, skoro všetci ste dostali 10 bodov. Chyby nastali v zlom pochopení pohybu kocky alebo ste neúplne vysvetlili postup. Pohyb mince sa dal pochopiť aj ako jej krúženie po štvrťkružnici v rovine, kedy by vyhrala minca.

Príklad č. 9 (opravoval Tomáš):

Zadanie:

Riešenie: Prvý krok je spojiť body A a B s bodom C, čím vzniknú dva priesečníky s polkružnicou. Označme si priesečník úsečky AC a polkružnice ako X. A priesečník úsečky BC a polkružnice ako Y. Ďalším krokom je vytvorenie úsečiek AY a BX, priesečník týchto dvoch úsečiek si označme ako O.

Použijeme Tálesovu vetu, ktorá hovorí, že ak máme body A,B,Z na kružnici, pričom úsečka AB je priemer kružnice, tak uhol AZB je vždy pravý. Podľa tejto vety vieme, že uhly AXB a AYB sú oba pravé. To znamená, že úsečky AY a BX sú výškami $\triangle ABC$.

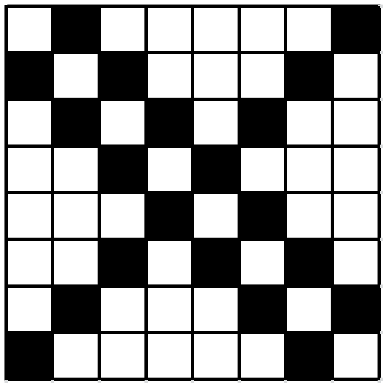
Teraz si už len stačí uvedomiť, že všetky výšky trojuholníka sa pretínajú v jednom bode, a to v ortocentre. Pre nás je to bod O, kde sa už pretínajú dve výšky. Poslená vec je viesť priamku cez body O a C, čím vznikne posledná výška a zároveň hľadaná kolmica na stranu AB vedúca cez C.
Odpoveď: Takáto kolmica sa dá skonštruovať.
Komentár: Väčšina z vás mala tento príklad dobre. Najčastejšou chybou bolo, že ste neodôvodnili, prečo by mali byť uhly pri priesečníkoch s polkružnicou pravé a prečo vedie kolmica cez priesečník AY a BX.

Prémia (opravoval MaťoPaťo):

Zadanie:
Riešenie: V prvej časti prémie ste mali nájsť čo najviac spôsobov, ako pokryť celú šachovnicu čo najmenej strelcami. Počet týchto strelcov je 4. Najväčší počet možností, ktoré ste našli, je 58. Nižšie sú vypísané ako pozície na šachovnici, kde $A1$ je čierne políčko.

1. D2, D4, D6, D8
2. C5, D2, D8, E5
3. C3, D6, D8, E3
4. B8, D2, D4, E7
5. A7, D2, D6, F6
6. A5, D4, D6, G5
7. D2, D4, D6, E7
8. C5, D2, E5, E7
9. C3, D6, E3, E7
10. C7, D2, D4, E7
11. B6, D2, D6, F6
12. B4, D4, D6, G5
13. D2, D4, D6, F6
14. C5, D2, E5, F6
15. C3, D6, E3, F6
16. D2, D4, E5, E7
17. C5, D2, D6, F6
18. C3, D4, D6, G5
19. D2, D4, D6, G5
20. C5, D2, E5, G5
21. C3, D6, E3, G5
22. D2, D6, E3, F6
23. D4, D6, E1, G5
24. D2, D4, D6, H4
25. C5, D2, E5, H4
26. C3, D6, E3, H4
27. D2, D4, E7, G3
28. D2, D6, F2, F6
29. D2, D4, E7, H2
30. D2, D6, F6, G1
31. A1, C1, E1, G1
32. A7, C3, D6, G5
33. C3, C5, D8, F4
34. A7, B4, E5, G5
35. A7, B4, F4, F6
36. A7, C3, E7, F4
37. B4, C5, E5, G5
38. B6, C3, D6, G5
39. C3, C5, E7, F4
40. B4, B6, E5, G5
41. B4, B6, F4, F6
42. B6, C3, E7, F4
43. C3, C5, E5, G5
44. C3, C5, D6, G5
45. C3, C5, F4, F6
46. B4, D4, E5, G5
47. B4, C5, F4, F6
48. C3, E7, F2, F4
49. C5, E1, E5, G5
50. C3, D6, F2, G5
51. B4, E3, E5, G5
52. B4, F2, F4, F6
53. C3, E7, F4, G1
54. C3, D6, G1, G5
55. C3, C5, F4, H4
56. B4, E5, F2, G5
57. B4, F4, F6, G1
58. B4, E5, G1, G5

Čo sa týka druhej úlohy, ako najlepšiu ste našli taktiku, ktorou vyhrá Franz vždy na maximálne 5 ťahov. Pozrime sa na tieto diagonály šachovnice. Všetky tri sú dlhšie ako 4 políčka, takže ani jedna z nich nemôže byť pokrytá takým spôsobom, že na nej neleží ani jeden strelec. Všetky tri z týchto diagonál nemôžu byť pokryté len jedným strelcom, a preto na nich budú ležať vždy aspoň dvaja. Teraz je teda jedno, akého strelca si Josh vyberie, Franz bude mať vždy aspoň jedného strelca na jednej z týchto diagonál. Názorne zobrazené je to na obrázku 1.



Obr. 1: vyznačené diagonály na šachovnici

1. ťah: Franz má aspoň jedného strelca na vyznačených diagonálach. Na tieto diagonály sa dá dostať z ľubovoľného políčka na šachovnici. V tomto kroku posunie Franz jedného zo svojich strelcov tak, aby mal na

jednej z vyznačených diagonál dvoch.
2. ťah: Josh ťahá tak, aby nebol vyhodený.
3. ťah: Ako som už povedal, na vyznačené diagonály sa dá dostať z ľubovoľného čierného políčka na šachovnici. Z toho vyplýva, že teraz môže Franz ponúknuť jedného z dvoch strelcov na vyznačenej diagonále Joshovi.
4. ťah: Josh musí strelca vyhodiť.
5. ťah: Franz má ešte druhého strelca na vyznačenej diagonále a teda vyhráva tým, že vyhodí Joshovho strelca.
Odpoveď: Našli ste 58 rôznych rozmiestnení strelcov na šachovnici. Ak hrajú obaja čo najlepšie, tak bude hra trvať maximálne 5 ťahov.
Komentár: Príklad ste skoro všetci pochopili, len ma mrzelo, že ste viacerí našli len jedno rozmiestnenie a na tom skúmali, koľko maximálne ťahov môže mať hra.