Vzorové riešenia 2. kola letnej série 2014/2015

Príklad č. 1 (opravovala Gabika):

Zadanie:

Riešenie: Ako prvé zistíme, ktoré cifry sa môžu a ktoré nemôžu v kóde nachádzať. Podľa bodu dva v ňom nemôžu byť prvočísla. Prvočíslo je číslo, ktoré má práve dvoch deliteľov – jednotku a samého seba. Jednocifernými prvočíslami sú $2, 3, 5$ a 7, ktoré v kóde nebudú. Podľa prvého bodu v kóde nebude ani nula, teda nám ostali cifry $1, 4, 6, 8, 9$.

Vieme tiež, že cifry sa v kóde neopakujú, teda každá z týchto cifier bude v kóde práve raz. Podľa bodu štyri kód nie je deliteľný dvomi, preto posledná cifra kódu musí byť nepárna, takže 1 alebo 9. Šiesty bod nám hovorí, že posledné dvojčíslie je deliteľné siedmimi. Vypíšeme si teda všetky dvojciferné čísla deliteľné siedmimi. Sú to $07, 14, 21, 28, 35, 42, 49, 56, 63, 70, 77, 84, 91, 98$.

Spomedzi nich nás zaujímajú iba tie, ktoré obsahujú iba neprvočíselné cifry a končia na jednotku alebo deviatku. Také sú len dve, 49 a 91. Podľa bodu päť musí byť štvrtá cifra kódu menšia ako prvá a prvá cifra menšia ako druhá. To znamená, že posledným dvojčíslím nemôže byť 91, pretože 9 je najväčšou z cifier. Znamená to, že na konci kódu musí byť 49. Ostávajú nám cifry $1, 6$ a 8. Podľa piateho bodu vieme, že cifra 1 nemôže byť na prvej ani druhej pozícii, lebo je menšia ako cifra 4, a podľa toho istého bodu určíme, že prvou cifrou musí byť 6 a druhou 8.

Odpoveď: Zuzke poradíme, že Zajov kód je 68149.

Komentár: Príklad nebol ťažký, no mnohí z vás stratili bodíky na chybách, ktorým by sa dalo ľahko vyhnúť. Viacerí ste si nevšimli, že z cifier $1, 4, 6, 8, 9$ sa dá poskladať aj číslo 91, ktoré je deliteľné siedmimi.

Príklad č. 2 (opravovala Dada):

Zadanie:

Riešenie: V prvej časti úlohy budeme chcieť nájsť do trojice kaziet takú, aby čo najviackrát skončili všetky tri naraz. Preto by sme najprv mohli zistiť, kedy skončia naraz prvé dve. To ste všetci úspešne zvládli, dokonca rôznymi spôsobmi. Môžeme vypisovať, kedy skončí 24-minútová, kedy 40-minútová a zistiť, ktoré časy sa nám zhodujú, alebo môžeme hľadať najmenší spoločný násobok.

Oboma spôsobmi nám vyjde číslo 120. Z toho vyplýva, že každú 120-tu minútu skončia obe kazety naraz. Chceme teda, aby naša hľadaná kazeta tiež skončila v každej 120-tej minúte. Otázka je, ktoré kazety končia v 120-tej minúte, teda násobkom ktorých čísel je číslo 120. Sú to presne delitele čísla 120, konkrétne $1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 20, 24, 30, 40, 60$ a 120. Z tých vyberieme kazety, ktoré vlastní vnuk. Dostaneme kazety $3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 20, 24, 30$ a 40.

Druhá časť úlohy bola o trošku komplikovanejšia. Budeme chcieť, aby čo najmenejkrát skončili aspoň dve kazety. Na úvod treba povedať, že to je nová úloha, a teda môžeme používať opäť všetky kazety, ktoré má vnuk vo svojej zbierke (v niektorých riešeniach sa totiž vyskytla presne táto chyba).

Poďme sa pozrieť na to, koľkokrát skončia naraz naše dve kazety, 24-minútová a 40-minútová. Vypočítali sme, že je to každú 120-tu minútu, konkrétne v minúte $120, 240, 360, 480, 600, 720, 840$ a 960. To je presne 8-krát, z čoho vyplýva, že menej ako 8 týchto skončení nebude.

Naším cieľom teraz bude nájsť takú kazetu, ktorá neskončí s jednou z našich ani raz za 1000 minút, alebo skončí presne vtedy, keď aj ony dve naraz. To v prvom prípade znamená nájsť číslo, ktorého najmenší spoločný násobok s 24 je väčší ako 1000, a aj najmenší spoločný násobok s 40 je väčší ako 1000. Tejto podmienke po preskúšaní vyhovuje jedine číslo 43.

V druhom prípade sú to čísla, ktorých najmenší spoločný násobok s 24 a 40 je presne 120. V rozklade na prvočísla $24 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$ a $40 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5$. Teda ak má mať spoločný násobok s oboma 120, musí obsahovať prvočísla 3 a 5. Preto tejto podmienke vyhovujú násobky čísla 15, konkrétne 15, 30 a 45.

Odpoveď: Na to, aby dohrali všetky tri kazety naraz čo najviackrát, si má starenka požičať jednu z kaziet s dĺžkou $3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 15, 20, 24, 30,$ alebo 40 minút. Ak chce, aby sa čo najmenejkrát stalo, že naraz skončia aspoň dve, sú to kazety z dĺžkami $15, 30, 43,$ alebo 45 minút.

Komentár: Prvá časť príkladu bola pomerne jednoduchá a väčšina z vás ju zvládla veľmi dobre. Najviac chýb bolo v druhej časti, kde ste niektorí pozabúdali buď na číslo 43, alebo na trojicu $15, 30$ a 45. Iných nedorozumení bolo veľmi málo :)

Príklad č. 3 (opravoval MaťoPaťo):

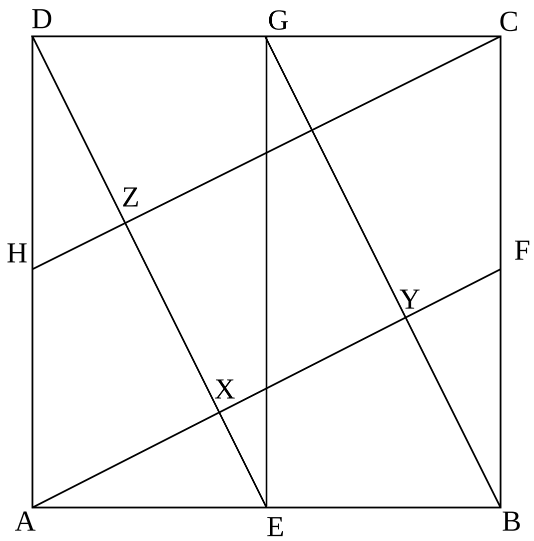
Zadanie:

Riešenie: V tomto príklade sme mali zistiť, v akom pomere je sedemuholník $AEGDHZX$ a štvoruholník $\diamond XYGD$. Ako prvé si všimnime, že štvorec $\square ABCD$ máme rozdelený na štyri zhodné pravouhlé trojuholníky $\triangle AED$, $\triangle DGE$, $\triangle EBG$ a $\triangle GBC$. Zhodné znamená, že sú rovnaké. To platí preto, že ich odvesny (strany pravouholého trojuholníka, medzi ktorými je pravý uhol) majú vždy dĺžku strany štvorca $\square ABCD$ a polovicu strany štvorca $\square ABCD$. Obdĺžnik $\square AEGD$ sa skladá z dvoch takýchto trojuholníkov a takisto sa z dvoch takýchto istých trojuholníkov skladá aj štvoruholník $\diamond DEBG$. Teda oba útvary majú obsah rovný polovici obsahu štvorca $\square ABCD$.

Teraz si všimnime, že obdĺžnik $\square AEGD$ sa dá rozdeliť na sedemuholník $AEGDHZX$ a štvoruholník $\diamond AXZH$. Štvoruholník $\diamond DEBG$ sa dá rozdeliť na štvoruholníky $\diamond XYGD$ a $\diamond EBYX$. Poďme sa pozrieť na štvoruholníky $\diamond AXZH$ a $\diamond EBYX$. Uhly $\measuredangle ADE$ a $\measuredangle BAF$ sú rovnaké, pretože obe úsečky DE aj AF sú spojnice vrchola štvorca $\square ABCD$ so stredom protiľahlej strany. Toto platí aj pre úsečky BG a CH.

Ako si môžeme všimnúť, uhly $\measuredangle DZH$ a $\measuredangle AXE$ sú pravé. To si môžeme predstaviť tak, že máme dve na seba kolmé úsečky strany štvorca a obe otočíme v jednom smere o rovnaký uhol. Budú teda stále kolmé.

Úsečka DH je rovnako dlhá ako úsečka AE a pravý uhol trojuholníkov $\triangle DHZ$ a $\triangle AEX$ leží oproti tejto úsečke. Teda trojuholníky $\triangle DHZ$ a $\triangle AEX$ budú zhodné. Rovnakým postupom môžeme prísť k tomu, že aj trojuholníky $\triangle DAX$ a $\triangle ABY$ budú zhodné. Keďže sú zhodné, tak musia mať aj rovnaký obsah. Takže ak od obsahu trojuholníka $\triangle DAX$ odčítame obsah trojuholníka $\triangle DHZ$, dostaneme obsah štvoruholníka $\diamond AXZH$. Keď urobíme to isté pre trojuholníky $\triangle ABY$ a $\triangle AEX$ (sú rovnako veľké ako $\triangle DAX$ a $\triangle DHZ$), dostaneme obsah štvoruholníka $\diamond EBYX$, ktorý bude rovnako veľký ako obsah štvoruholníka $\diamond AXZH$. A keďže $\diamond AEGD$ a $\diamond DEBG$ majú rovnaký obsah a od oboch odpočítame obsahy štvoruholníkov $\diamond AXZH$ a $\diamond EBYX$, ktoré sú rovnaké, tak výsledný obsah sedemuholníka $AEGDHZX$ bude rovnako veľký ako obsah štvoruholníka $\diamond XYGD$.



Obr. 1: Štvorec $\square ABCD$

Odpoveď: Pomer sedemuholníka a štvoruholníka je $1 : 1$.

Komentár: Príklad nebol ťažký, ale veľa z vás predpokladalo, že niektoré trojuholníky sú rovnaké, bez toho, aby ste to zdôvodnili. Veľakrát stačilo napísať, že sú rovanké, pretože celý útvar je rovnaký, nech sa na neho pozrieme z ľubovoľnej strany štvorca $\square ABCD$. To preto, pretože sme robili to isté s každým vrcholom a stranou štvorca $\square ABCD$.

Príklad č. 4 (opravoval Tomáš):

Zadanie:

Riešenie: Prvá vec, ktorú si uvedomíme pri riešení tohto príkladu, je, že máme 6 po sebe idúcich čísel. Takže máme 5 dvojíc čísel, za ktoré môžeme stratiť bod.

Zoberme si ktorúkoľvek stranu. Vieme o nej povedať, že existujú štyri strany, ktorých sa dotýka, a jedna strana, ktorá je protiľahlá. Teda ak máme dve po sebe idúce čísla, tak jediný spôsob, ako za ne nestratiť bod, je, že ich umiestnime do týchto navzájom protiľahlých strán. Na kocke sú tri páry takýchto protiľahlých strán.

Z toho vyplýva, že najmenej môžeme stratiť dva body. K tomuto číslu sme prišli tak, že sme od počtu dvojíc odrátali počet protiľahlých strán. Teraz nám už len zostáva ukázať aspoň jednu možnosť, pri ktorej to platí. A to je napríklad taká, že dvojice čísel, čo budú ležať na protiľahlých stranách, sú 1 s 2, 3 so 4 a 5 s 6. Ak dodržíme, že budú presne takéto dvojice ležať oproti sebe, tak vždy stratíme len 2 body, a teda minimálny počet bodov.

Odpoveď: Najmenej môžeme stratiť 2 body.

Komentár: Príklad zjavne nebol ťažký, keďže všetci mali správny výsledok. No väčšina z vás len ukázala možnosť, kedy platí, že stratíme len 2 body, ale nedokázali ste, že to tak musí byť. Nezabúdajte, body sú za postup, preto musíte vždy dokázať to, čo tvrdíte.

Príklad č. 5 (opravovali Danka, DadaB.):

Zadanie:

Riešenie: Tento príklad sa dal riešiť mnohými spôsobmi. Mohli ste začať z rôznych koncov. Ukážeme si jeden z tých najjednoduchších. Začneme tým, že si do tabuľky vypíšeme všetky ženy a doplníme k nim fakty, ktoré vyplývajú priamo zo zadania (tab. číslo 1).

Žena	Muž	Priezvisko	Zamestnanie	Farba	Dopravný prostriedok	Priniesli knihu	Požičali si knihu
Danka		Orieškatí	cukrová vata				
Zuzka	Peťo			jadeitová			
Hanka	Phil	Ušatí		mahagónová			
Dada		Vlasatí	parašutisti		ferrari		
Tete	Jumaj						Dievčatko z k. d.
Tinka	Zajo		kaderníci				
Gabika		Okatí		pepermintová			
Uľa					škodovka	Dievčatko z k. d.	

Tabuľka 1: Úvodné vyplnenie tabuľky

Ako vidíme, jediné priezvisko, ktoré nemá priradené povolanie a ani krstné mená, sú Nosatí. Z toho vyplýva, že Nosatí sú Tinka so Zajom. Ďalej vieme povedať, že z nespárovaných mužov (Maťo, Tomáško, ViRPo a Kuchtík) bude Gabikin manžel ViRPo, pretože ostatní už majú priradenú obľúbenú farbu a nemajú miesto pre Gabikinu pepermintovú.

- 14. Gabika a ViRPo Okatí jazdia na Žiguli, majú radi pepermintovú a priniesli knihu „Hry o život – Skúška ohňom“.

Máme ešte dva páry, ktoré nemajú priradenú prácu. Vieme, že odborníci na infinitezimálny počet jazdia na bicykli[18.], a teda to nemôžu byť Okatí, lebo tí jazdia na Žiguli. Z toho vyplýva, že Okatí musia vlasniť intergalaktickú palacinkáreň, keďže je to posledná možnosť, ktorá sa navyše viaže len s požičanou knihou a tá práve Okatým chýbala.

- 18. Hanka a Phil Ušatí sú odborníci na infinitezimálny počet, jazdia na bicykli a obľubujú kráľovskú mahagónovú.
- 17. Gabika a ViRPo Okatí vlastnia intergalaktickú palacinkáreň, jazdia na Žiguli, majú radi pepermintovú, priniesli knihu „Hry o život – Skúška ohňom“ a požičali si knihu „Hra o tróny – Tanec s drakmi“.

Ďalej vieme povedať, že Uľa nebude Prerátaná, pretože vtedy by si knihu požičala od Okatých, nie Nosatých[20]. Knihu si nemohla požičať ani sama od seba, takže nebude ani Nosatá. Navyše nemôže byť ani Neprerátaná, lebo by nastal spor v prinesených knihách[10]. Ostalo nám teda jediné možné priezvisko a s ním sa dozvedáme aj zamestnanie.

- 22. Uľa je Spapaná, jazdí na Škodovke, je obchodníčka s koláčmi a priniesla knihu „Dievčatko z Krajiny Drakov – Mezzarthys“.

Tete a Jumaj nemôžu byť Prerátaní, lebo by znova nastal spor v požičanej knihe[11]. Z toho sme zistili, že Tete a Jumaj musia byť Neprerátaní a Zuzke s Peťom ostalo priezvisko Prerátaní. S tým sa dozvedáme aj ďalšie informácie:

- 11. Prerátaní sú Zuzka s Peťom, sú moderátori šou Riešky majú talent, majú radi tlmenú jadeitovú a požičali si knihu „Hry o život – Skúška ohňom“.
- 10. Tete s Jumajom sú Neprerátaní, chovajú jednorožce, priniesli knihu „Temné Hmoty – Magický nôž“ a požičali si knihu „Dievčatko z Krajiny Drakov – Mezzarthys“.

Údaje môžete vidieť zapísané v tabuľke č. 2.

Žena	Muž	Priezvisko	Zamestnanie	Farba	Dopravný prostriedok	Priniesli knihu	Požičali si knihu
Danka		Orieškatí	cukrová vata				
Zuzka	Peťo	Prerátaní	moderátori RMT	tlmená jadeitová			Hry o život
Hanka	Phil	Ušatí	odborníci na i. p.	mahagónová	bicykel		
Dada		Vlasatí	parašutisti		ferrari		
Tete	Jumaj	Neprerátaní	chovajú jednorožce			Temné hmoty	Dievčatko z k. d.
Tinka	Zajo	Nosatí	kaderníci				
Gabika	ViRPo	Okatí	intergal. palacinkáreň	pepermintová	žiguli	Hry o život	Hra o tróny
Uľa		Spapaní	obchod s koláčmi		škodovka	Dievčatko z k. d.	

Tabuľka 2: Priebežne vyplnená tabuľka

Tvrdenie „Knihu „Elyonova krajina – Desiate mesto“ priniesla dvojica, ktorá jazdí na BMV a miluje vznešenú karmínovú.“[2] musí byť o Zajovi a Tinke, pretože všetky zatiaľ slobodné ženy dostanú spolu s manželom aj farbu, Tete s Jumajom už majú priradenú prinesenú knihu a ostatné páry už auto priradené majú. Ďalej vieme povedať, že Zuzka nejazdí na trabante[9], lebo by si musela požičať inú knihu a nikto okrem Tete nemôže chodiť pešibusom[16], lebo všetci ostatní, ktorým chýba auto, už majú priradenú farbu. Čo všetko nám z toho vyplynulo:

- 2. Tinka a Zajo priniesli knihu „Elyonova krajina – Desiate mesto“, jazdia na BMV a milujú vznešenú karmínovú.
- 20. Uľa si požičala knihu „Elyonova krajina – Desiate mesto“.
- 16. Tete s Jumajom chodia pešibusom a majú radi odvážnu balklažánovú.
- 23. Zuzka jazdí na Mercedese a teda priniesla knihu „Pán prsteňov – Dve veže“.
- 9. Danka jazdí na Trabante a požičala si knihu „Kroniky Narnie – Lev, šatník a čarodejnica“

Zapíšeme to do tabuľky 3.

Žena	Muž	Priezvisko	Zamestnanie	Farba	Dopravný prostriedok	Priniesli knihu	Požičali si knihu
Danka		Orieškatí	cukrová vata		trabant		Narnia
Zuzka	Peťo	Prerátaní	moderátori RMT	tlmená jadeitová	mercedes	Pán prsteňov	Hry o život
Hanka	Phil	Ušatí	odborníci na i. p.	mahagónová	bicykel		
Dada		Vlasatí	parašutisti		ferrari		
Tete	Jumaj	Neprerátaní	chovajú jednorožce	baklažánová	pešibus	Temné hmoty	Dievčatko z k. d.
Tinka	Zajo	Nosatí	kaderníci	karmínová	BMW	Elyonova kr.	
Gabika	ViRPo	Okatí	intergal. palacinkáreň	pepermintová	žiguli	Hry o život	Hra o tróny
Uľa		Spapaní	obchod s koláčmi		škodovka	Dievčatko z k. d.	Elyonova kr.

Tabuľka 3: Doplnená tabuľka

Teraz si môžeme priradiť zvyšných chlapov. Kuchtík[21.] ide len k Dade, pretože ako jediná ešte nevie, akú knihu si požičala. Maťo[7.] bude s Dankou, pretože Uľa už má pridelenú prinesenú knihu. Uli teda ostal Tomáško.

- 21. Kuchtík je Dadin muž, majú radi sviežu okrovú a požičali si knihu „Pán prsteňov – Dve veže“.
- 7. Maťo je Dankin muž, majú radi ľadovo lesklú farbu a priniesli knihu „Harry Potter a Fénixov rád“.
- 12. Tomáško je Ulin muž a majú radi romantickú olivovú farbu.

Ako už vidíme, jediná dvojica, ktorá nemá vyplnené ani jedno políčko s knihami, sú Hanka a Phil.

- 15. Hanka s Philom priniesli knihu „Hra o tróny – Tanec s drakmi“ a požičali si knihu „Harry Potter a Fénixov rád“.

Nakoniec si zistíme, ktoré knihy boli prinesené, ale zatiaľ nevieme, kto si ich požičal, a naopak. Zostali nám jedine požičaná kniha „Temné hmoty – Magický nôž“ a prinesená „Kroniky Narnie – Lev, šatník a čarodejnica“. Doplníme ich do dvoch prázdnych políčok a tabuľka je kompletná.

Odpoveď: Výsledok môžete vidieť v tabuľke č. 4.

Komentár: Príklad ste zvládli veľmi dobre, veľa riešení bolo bezchybných a teda aj desaťbodových. Najväčším problémom bolo, že ste nám iba nakreslili tabuľku s výsledkom, avšak to, čo my od vás potrebujeme, sú vaše myšlienky, a teda sme vám za takéto riešenie nemohli dať veľa bodov.

Príklad č. 6 (opravoval Zajo):

Zadanie:

Riešenie: Príklad dokážeme sporom. Predpokladajme teda, že žiadne tri družstvá neodohrali svoje vzájomné zápasy v jeden deň. Keďže hráme zápasy každý proti každému, každé družstvo odohrá práve 5 zápasov. Onačme si družstvá A, B, C, D, E a F. Družstvo A určite odohrá v niektorý z dvoch dní aspoň 3 zápasy (inak nevieme jeho 5 zápasov rozdeliť na dva dni). Nech ich hrá s družstvami B, C, D.

Tým pádom sa zápasy BC, CD, BD neodohrajú v prvý deň, lebo by vznikli postupne trojice ABC, ACD, alebo ABD. Takže tieto tri zápasy sa budú musieť odohrať v iný (ten druhý) deň.

A keďže v druhý deň by sa museli odohrať dané tri zápasy BC, CD, BD, dostávame hľadaný spor, pretože by vznikla trojica BCD.

Odpoveď: Trojica, ktorá odohrá svoje vzájomné zápasy v jeden deň, určite bude existovať.

Žena	Muž	Priezvisko	Zamestnanie	Farba	Dopravný prostriedok	Priniesli knihu	Požičali si knihu
Danka	Maťo	Orieškatí	cukrová vata	ľad. lesklá	trabant	Harry Potter	Narnia
Zuzka	Peťo	Prerátaní	moderátori RMT	tlmená jadeitová	mercedes	Pán prsteňov	Hry o život
Hanka	Phil	Ušatí	odborníci na i. p.	mahagónová	bicykel	Hra o tróny	Harry Potter
Dada	Kuchtík	Vlasatí	parašutisti	okrová	ferrari	Narnia	Pán prsteňov
Tete	Jumaj	Neprerátaní	chovajú jednorožce	baklažánová	pešibus	Temné hmoty	Dievčatko z k. d.
Tinka	Zajo	Nosatí	kaderníci	karmínová	BMW	Elyonova kr.	Temné hmoty
Gabika	ViRPo	Okatí	intergal. palacinkáreň	pepermintová	žiguli	Hry o život	Hra o tróny
Uľa	Tomáško	Spapaní	obchod s koláčmi	olivová	škodovka	Dievčatko z k. d.	Elyonova kr.

Tabuľka 4: Výsledná tabuľka

Komentár: Zo zaujímavosti sa môžete zamyslieť nad tým, či by nestačilo menej zápasov ako každý s každým, aby taká trojica existovala (ktoré sme pri dôkaze nepoužili?). S príkladom ste sa popasovali rôznorodo, práve zápasy navyše umožnili aj kopu iných dôkazov. Častou chybou bolo ale nedostatočné odôvodnenie – to, že niečo nefunguje pre jeden prípad, nehovorí často nič o ostatných.

Príklad č. 7 (opravovala Zuzka):

Zadanie:

Riešenie: V príklade máme dokázať, že medzi súčtami čísel v riadkoch, stĺpcoch a diagonálach tabuľky sú aspoň tri s rovnakými hodnotami. Dokážeme to sporom. Znamená to dôkaz, že opačný výrok od tohto neplatí, teda výrok: „V tabuľke sú z každej hodnoty súčtu maximálne dve“ vyvrátime.

Môžeme dostať 9 rôznych súčtov a to $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$. V tabuľke máme 8 riadkov, 8 stĺpcov a 2 diagonály, čo je spolu 18 línií. Aby sa žiadna hodnota súčtu nevyskytovala viackrát ako dva, musí byť v tabuľke z každého súčtu práve po dvoch.

Začnime dopĺňaním súčtu 0, čo sú samé čísla 0 v línii. Nemôžeme ho dať do diagonály, lebo súčet 8, čo sú samé čísla 1 v línii, by sme mohli dať už len do druhej diagonály a nikam inam, no my ho potrebujeme dať do dvoch línií. Súčet 0 dáme teda do riadku. Keďže tabuľka je štvorec, riadky a stĺpce sa môžu medzi sebou vymieňať, a teda nezáleží na tom, či dáme súčet 0 do riadku alebo stĺpca.

Súčet 8 ďalej nemôžeme dať do diagonály ani do stĺpca, takže pôjde do riadku. To isté platí pre druhý súčet 8. Teraz keď sú tam, tak ani druhý súčet 0 nevieme dať inam, ako do ďalšieho riadku.

V každej diagonále aj stĺpci sú teraz dve čísla 0 a dve čísla 1. Teda tam môžu byť už len súčty 2 až 6. Súčtom 1 a 7 nezostáva nič iné, ako byť v riadkoch. Teraz už máme zaplnené všetky riadky. Súčet 1 dostaneme zo siedmich čísel 0 a z jedného čísla 1. Súčet 7 dostaneme zo siedmich čísel 1 a z jedného čísla 0.

Akokoľvek budú čísla v riadkoch so súčtom 1 rozmiestnené, vždy aspoň v šiestich stĺpcoch týchto dvoch riadkov budú čísla 0. Tieto stĺpce majú zatiaľ všetky súčet 2. To isté platí pre súčty 7, len sa tam menia čísla 0 za 1 a naopak. Preto, aj keď pridáme čísla do riadkov so súčtami 7, zo šiestich stĺpcov, ktoré zatiaľ mali rovnaký súčet, sa nám môžu zmeniť maximálne dva. Ďalšie štyri budú mať súčet 4. Toto však porušuje základnú podmienku, a to tú, že každý súčet sa vyskytuje v tabuľke dvakrát. Preto vieme tvrdiť, že aspoň jeden súčet sa tam vyskytne aspoň trikrát.

Komentár: Tento príklad bol dobrý na precvičenie si dokazovania. Pre niekoho, kto sa s tým stretol prvýkrát, to môže byť ťažké, ale snáď ste sa niečo naučili. Bohužiaľ, ak ste nepoužili správny princíp dokazovania, tak ste dokazovali väčšinou len na konkrétnych príkladoch, čo nenazbieralo veľa bodov.

Príklad č. 8 (opravovali Tete, Lámač):

Zadanie:

Riešenie: Poďme si najskôr povedať, čomu sa rovná vzniknuté štvorciferné číslo. Keďže číslo e stojí pred a, musíme ho vynásobiť 100, pretože jeho cifra na mieste jednotiek sa nachádza na mieste stoviek novovzniknutého čísla. K tomuto číslu potom pripočítame číslo a. Číslo $100 \cdot e + a$ sa teda rovná násobku všetkých troch čísel, čo zapíšeme rovnicou:

$$100 \cdot e + a = a \cdot e \cdot i$$

Rovnicu predelíme e, dostávame:

$$100 + \frac{a}{e} = a \cdot i$$

Keď je jeden z dvoch sčítancov prirodzené číslo a zároveň aj ich súčet je prirodzené číslo, tak aj druhý sčítanec musí byť prirodzené číslo. Kedže 100 aj $a \cdot i$ sú prirodzené čísla, tak aj $\frac{a}{e}$ musí byť prirodzené číslo. Preto $e \mid a$ (čítaj: „e delí a“, rozumej: „a je deliteľné e“), čiže a vieme zapísať aj ako $a = x \cdot e$, kde x je prirodzené číslo. Teraz si predelíme pôvodnú rovnicu $x = \frac{a}{e}$, a dostávame:

$$\frac{100 \cdot e}{e \cdot x} + 1 = e \cdot i$$

$$\frac{100}{x} + 1 = e \cdot i$$

Kedže 1 aj $e \cdot i$ sú prirodzené čísla, tak aj $\frac{100}{x}$ musí byť prirodzené číslo. Preto $x \mid 100$, čo môžme zapísať ako $x \mid 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5$. Kedže a aj e sú dvojciferné čísla, tak zo vzťahu $a = x \cdot e$ je jasné, že $x < 10$, inak by muselo byť a aspoň trojciferné číslo. Kedže $a > e$, tak $x \neq 1$. Jediné x spĺňajúce dané podmienky sú $x \in \{2, 4, 5\}$.

Ak $x = 2$, tak pôvodnú rovnicu vieme zapísať a upraviť na:

$$100 \cdot e + 2 \cdot e = 2 \cdot e \cdot e \cdot i$$

$$3 \cdot 17 = 51 = e \cdot i$$

Kedže e musí byť dvojciferné číslo, tak máme iba dve možnosti, čomu sa môže rovnať e, a to $e = 51$ a $e = 17$. V možnosti $e = 51$ zo vzťahu $a = x \cdot e = 2 \cdot e = 102$ dostávame spor, pretože a má byť dvojciferné, takže táto možnosť je nesprávna. V možnosti $e = 17$ zo vzťahov $a = x \cdot e = 2 \cdot e = 34$ a $3 \cdot 17 = e \cdot i$ dostávame $i = 3$, čo je prvé z hľadaných riešení.

Ak $x = 4$, tak pôvodnú rovnicu vieme zapísať a upraviť na:

$$100 \cdot e + 4 \cdot e = 4 \cdot e \cdot e \cdot i$$

$$2 \cdot 13 = e \cdot i$$

Kedže e musí byť dvojciferné číslo, tak máme iba dve možnosti, čomu sa rovná e, a to $e = 26$ a $e = 13$. V možnosti $e = 26$ zo vzťahu $a = x \cdot e = 4 \cdot 26 = 104$, dostávame spor, pretože e a má byť dvojciferné, takže táto možnosť je nesprávna. V možnosti $e = 13$ zo vzťahov $a = x \cdot e = 4 \cdot 13 = 52$ a $2 \cdot 13 = e \cdot i$ dostávame $i = 2$, čo je druhé z hľadaných riešení.

Ak $x = 5$, tak pôvodnú rovnicu vieme zapísať a upraviť na:

$$100 \cdot e + 5 \cdot e = 5 \cdot e \cdot e \cdot i$$

$$3 \cdot 7 = e \cdot i$$

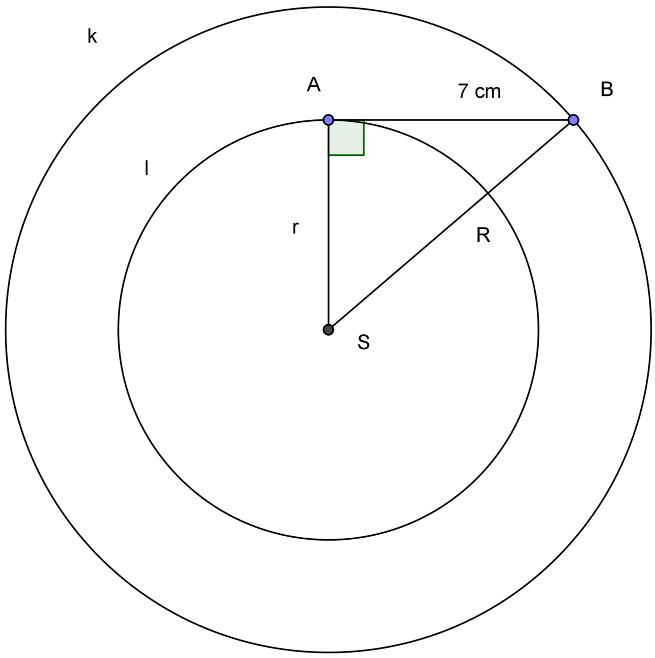
Kedže e musí byť dvojciferné číslo, tak máme iba jednu možnosť čomu sa rovná e, a to $e = 21$. Zo vzťahu $a = x \cdot e$ dostávame $a = 105$, čo však opäť nie je dvojciferné číslo a teda táto možnosť je nesprávna.
Odpoveď: Existujú dve riešenia:

1. $a = 34$, $e = 17$, $i = 3$
2. $a = 52$, $e = 13$, $i = 2$

Komentár: Príklad nebol ťažký, len sa stačilo trocha viac zamyslieť. Dostali sme iba 18 riešení, čo bolo oproti ostatným príkladom vcelku málo. Celkovo sme za príklad riešiteľom rozdali 126 bodov, čiže priemerne riešiteľ dostal 7 bodov. Z toho sa dá usúdiť, že ste príklad pekne zvládli. :)
Bodovanie: Body sme strhávali hlavne za nedostatočné vysvetlenia, napríklad prečo sa x nemôže rovnať ničomu inému, neprejdenie všetkých možností pre e, alebo nesprávne pochopenie zadania.

Príklad č. 9 (opravovali Jumaj, Filip, Ľubo):

Zadanie:
Riešenie: Kedže máme riešiť úlohu konštrukčného typu, mohlo by nám pomôcť zostrojiť si obrázok, aby sme sa vedeli v úlohe lepšie orientovať. Tak ho môžete vidieť na obrázku 2.



Obr. 2: Nákres

Máme vypočítať obsah medzikružia kružnice **k** a kružnice **l**. Vieme, že obsah kruhu je

$$S = \pi \cdot r^2$$

Teda obsah väčšieho kruhu si vieme napísať ako $S_k = \pi \cdot R^2$ a obsah menšieho kruhu zase $S_l = \pi \cdot r^2$. Z obrázku vidíme, že obsah medzikružia vieme ľahko vypočítať ako rozdiel obsahov S_k a S_l. Teda:

$$S_m = S_k - S_l \Rightarrow S_m = \pi \cdot R^2 - \pi \cdot r^2 \Rightarrow S_m = \pi \cdot (R^2 - r^2)$$

R ani r však nepoznáme, takže si ich musíme ešte nejakým spôsobom zistiť. Ponúka sa nám použiť Pytagorovu vetu na $\triangle ABS$, keďže vieme, že dotyčnica je kolmá na polomer.

$$R^2 = r^2 + 7^2 \Rightarrow R^2 - r^2 = 49$$

Toto nám už len stačí dosadiť do predošlého vzťahu a dostávame správny výsledok:

$$S_m = 49 \cdot \pi$$

Odpoveď: Obsah medzikružia je $49 \cdot \pi$.
Komentár: Príklad bol pomerne jednoduchý a mnohí z vás ho vyriešili správne.

Prémia (opravovali MaťoPaťo, Ivo):

Zadanie:
Riešenie: Najprv sa pozrime na to, kde budú kvapkať kvapky najčastejšie. Adepti na tento post sú prvočíselný kvapeľ a trojkový kvapeľ, medzi ktorými je iba osmičkový kvapeľ. Preto by bolo výhodné pohybovať sa medzi týmito dvoma kvapľami pri kvapnutí osmičkového kvapľa a zároveň vtedy, kedy by sme nezmeškali inú výhodnú sekvenciu kvapiek.

Našťastie sedmičkový, šestkový, päťkový a štvorkový kvapeľ nie sú ideálne, keďže kvapkajú s malou frekvenciou. Bez nich získavame kvapky v 7., 8. a 9. sekunde a v 15., 16. a 17. sekunde. Počas sekúnd, kedy nezískavame kvapky, sa snažíme zostať na prvočíselnom kvapli, lebo na trojkovom toľko kvapiek nepadá, a zároveň nemá výhodných susedov, ktorí by mu túto nevýhodu kompenzovali. Predsalen na šestkovom kvapli kvapne kvapka vtedy, keď aj na trojkovom. To nám síce poskytuje cestovaciu výhodu na päťkový a sedmičkový kvapeľ, no potom už nevyužívame trojkový kvapeľ, ktorý je na zbieranie výhodný.

Teraz si napíšeme posúvanie škriatka po kvapľoch. Keď mu padne kvapka, tak daný kvapeľ hrubo vyznačíme.
Odpoveď: Škriatok sa posúval nasledovne: 8**PP**P**P**P**P83**8**P**P**P**8**38P**P**P5**PP**P8**. Škriatkovi potrvá zozbieranie 15 kvapiek najmenej 24 sekúnd.
Komentár: Niektorým z vás sme strhli zopár bodov za to, že ste neprečítali zadanie poriadne a riešili ste preto trochu inú úlohu. Či už ste uvažovali o nepretržitom pohybovaní škriatka, čo riešenie mierne skomplikovalo, alebo ste si ju uľahčili a číslo 1 ste pokladali za prvočíslo.