

Zadania 1. kola letnej série 2014/2015

Termín: 09.03.2015

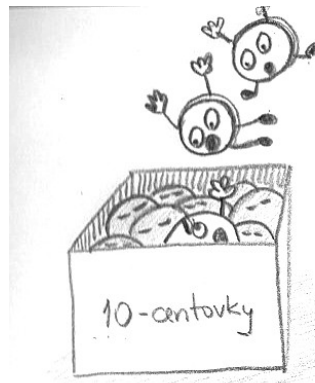
Naša adresa: Riešky, Mgr. Viera Babišová, Gymnázium Grösslingová, Grösslingová 18, 811 09 Bratislava 1

Elektronické riešenia: <http://riesky.sk/>

Uvažovali ste niekedy nad tým, ako vyzerá život obyčajnej mince? Myslím si, že nie. Väčšina z vás teraz premýšľa, načo by nám to bolo. Veď je to len minca, len akýsi kúsok kovu. Akoby mohla žiť?

Ak to berieme doslovne, tak máte pravdu. Minca ozaj nežije, nespína totiž podmienky na to, aby bola živá. Napríklad nevykonáva metabolizmus, nerastie, nerozmnožuje sa, a ani nie je zložená z buniek. Avšak predsalen má svoj život, možno nie celkom život, ale príbeh určite. Dosť bolo teda filozofovania a pozrime sa na príbeh desaťcentovky, ktorá sa možno ocitla aj vo vašom vrecku a ani o tom neviete.

Všetko sa to začalo v Kremnickej mincovni. Na kúsok zlatistej hmoty vyrazili hodnotu mince a slovenský znak. Následne ju neľútostne hodili do škatule k ostatným. „Au! S trochou úcty by to nešlo?“ zlostne si zakričala desaťcentovka. Odpoveď dostala vo forme jej dvojčky, ktorá na ňu spadla a trafila ju rovno do hlavy. A keby len jedna! Hneď za ňou letela ďalšia, ďalšia a ešte ďalšia! Desaťcentovka si začala obzerať vzory, ktoré mala na sebe tá posledná vyrazená.



Príklad č. 2: Na bruchu mala vyrazených 6 bodiek, ktoré boli umiestnené tak, že by mohli tvoriť vrcholy pravidelného šesťuholníka. Koľko najviac úsečiek medzi týmito bodmi vie dokresliť, aby jej nevznikol žiadny obdĺžnik?

Počas dlhej cesty do banky sa zhovárala s ostatnými mincami v balíčku. Boli ich stovky a každá sa sťažovala na zaobchádzanie v mincovni. „Aspoň nie som jediná.“ zamrmlala si desaťcentovka viac-menej pre seba. Debate sa už viac nevenovala. Obzerala si balíček, v ktorom bola zabalená. Na kuse papiera bol akýsi obrázok. Nevedela, čo znamená, no fascinoval ju.

Príklad č. 8: Rovnobežník $ABCD$ má každú stranu rozdelenú na osem rovnako dlhých častí bodmi, ktoré nazvime predeľovacie. Nazvime najbližší predeľovací bod k bodu A na strane AB písmenom K , a na strane AD písmenom N . Podobne nazvime najbližší predeľovací bod k bodu C na strane CB písmenom L a na strane CD písmenom M . Šesťuholník $AKLCMN$ má obsah 60 cm^2 . Zistite obsah rovnobežníka $ABCD$.

Ani si neuvedomila, ako čas rýchlo beží a zrazu sa balíček, v ktorom si spokojne ležala, otvoril. Pozerala na ňu akási pani v tmavomodrej vestičke s neurčitým výrazom na tvári. Hodila vrecko desaťcentoviek na stôl a pokračovala v rozbaľovaní zásielky. Keď si desaťcentovka konečne narovnala všetky končatiny, uvidela podobne vyzerajúcu pani ukladať reklamné letáčky do podivne vyzerajúceho stojanu.

Prémia: Pani v banke ukladá reklamné letáčky do stojanu. Tento stojan je taký špeciálny – matematický. Môžeme si ho predstaviť ako štvorbokú pyramídu s 10 poschodiami zloženú z kociek. Na dolnom poschodí je 100 kociek. Poschodie má tvar štvorca 10×10 . Každý štvorec kociek 2×2 má nad sebou na ďalšom poschodí kocku. Takto tvorí 5 kociek malú pyramídku. Ak sa na ňu pozrieme zhora, horná kocka je presne v strede štvorca tvoreného 4 dolnými.

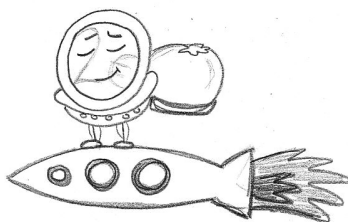
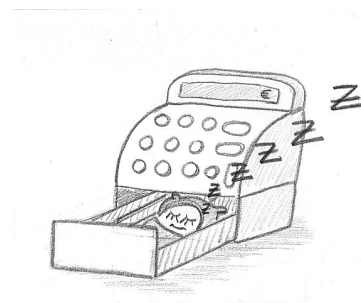
Druhé poschodie zdola je tvorené 81 kockami v štvorci 9×9 , pričom každá kocka tvorí už spomenutú malú pyramídku so 4 kockami o poschodie nižšie.

Tretie poschodie má 64 kociek v štvorci 8×8 , pričom každá kocka znovu tvorí pyramídku s kockami o poschodie nižšie.

Štvrté poschodie má 49 kociek, ktoré sú rovnako usporiadané, a tak ďalej. Do každej kocky sa zmestí jeden letáček. Koľko najviac letáčikov môže pani vyložiť, ak žiadne dva nemôže dať do susedných kociek? Kocka susedí s kockou, ak sa dotýkajú časťou steny alebo celou stenou. Teda každá kocka susedí najviac so 4 kockami o poschodie dole, so 4 kockami na rovnakom poschodí a so 4 kockami o poschodie hore. (Pokyn: Napíšte počet letáčikov a nakreslite ich rozmiestnenie (najlepšie jednotlivé poschodia osobitne). K prémii postup písať nemusíte.)

*** Tento príklad je bodovaný inak ako ostatné. Viac informácií nájdeš v pravidlách. ***

Svetlo sveta si dlho neužila, čoskoro ju nasypali do pokladnice a zatemnili jej výhľad. Desaťcentovka to považovala za vhodnú situáciu na spánok. Sladko spinkala, keď tu zrazu sa jej niečo teplé dotklo. Pokladnička v banke ju chytila medzi prsty, hodila na kôpku zvyšných mincí a posunula príjemne vyzerajúcemu pánovi. Tento pán si ju vložil do peňaženky, kde boli ostatné mince oveľa zhovorčivejšie a príjemnejšie naladené, ako ktorákoľvek minca, s ktorou sa dovtedy stretla. Búrliivo si medzi sebou vymieňali zážitky. Jeden z nich bol naozaj zaujímavý. Dvojeurová minca cestovala až do vesmíru, alebo to aspoň tvrdila. Strela tam mimozemšťanov, o ktorých nám hneď vymyslela aj hádanku.



Príklad č. 7: V miestnosti je niekoľko mimozemšťanov (viac ako jeden). Všetci majú na rukách rovnaký počet prstov (na každej viac ako jeden), ale iný na pravej a iný na ľavej, pričom na ľavej ruke ich majú viac. Ak by som ti prezradil celkový počet prstov v miestnosti, so stopercentnou istotou by si vedel/a jednoznačne určiť počet mimozemšťanov a ich počet prstov na pravej aj na ľavej ruke. Koľko môže byť v miestnosti mimozemšťanov a koľko prstov môžu mať na rukách?

Príbehy sa počúvali nesmierne dobre a čas plynul rýchlo, keď sa zrazu peňaženka otvorila. Pán zopár mincí vybral a podal predavačke v obchode. Bola medzi nimi aj desaťcentovka, ktorá sa tešila na ďalšie dobrodružstvo. Znovu ju zavreli do pokladne, no tentokrát nezaspala, pretože túžobne očakávala, kedy ju znovu vyberú a bude môcť zažiť niečo nové. Jej chvíľa prišla. Pokladnička na ňu siahla, no vypadla jej spomedzi prstov a zakotúľala sa pod stoličku. Bola tam špina, ale desaťcentovka si všimla akési malé zvieratko. Vyzeralo ako blcha a skákalo po malinkých kamienkoch, ktoré boli popadané po zemi.



Príklad č. 1: Blcha Skákalka skáče po vodorovnej číselnej osi. Vie robiť iba skoky dvoch dĺžok, a to 14 a 18. Tieto skoky vie robiť buď doprava alebo doľava. Práve stojí na čísle 2.

- Nájdí spôsob, ako má skákať, aby sa štyrmi skokmi dostala na číslo 10.
- Tvrdí, že včera bola na čísle 13. Hovorí pravdu alebo klame? Zdôvodni.

S blchou sa rozprávala snáď celé hodiny, až kým ju pokladnička znova nezdvihla a nehodila naspäť do pokladne. Tam svoj príbeh rozpovedala ostatným minciam. Onedlho sa dostala do rúk mladému dievčaťu.

Tentokrát neputovala do peňaženky, ale do vrecka na bunde. Bunda príjemne voňala a desaťcentovka by tam najradšej ostala celú večnosť, avšak čo svet nechcel, dievča sa rozbehlo, desaťcentovka začala nadskakovať, až nakoniec vypadla na tvrdý vydláždený chodník.

Príklad č. 6: Časť chodníka vyzerá ako štvorcová sieť $n \times n$. Pre ktoré prirodzené n ju vieme vyplniť dielikmi v tvare „L“ ako na obrázku 1, ktoré zakrývajú vždy tri políčka?



Obr. 1: Dielik

Prechádzalo okolo nej množstvo ľudí, až ju nakoniec zdvihol malý chlapec. Držal ju v zovretí a usmieval sa na ňu štrbavým úsmevom. Schoval si ju do vrecka, akoby to bol najväčší poklad a utekal naspäť za mamou. V jeho vrečku sa desaťcentovka stretla s cukríkom. Ten jej rozpovedal príbeh, ako sa k chlapcovi dostal.

Príklad č. 5: Bratia Filip a Fedor dostali od mamy jedno balenie cukríkov. Nechceli sa oň však deliť, preto ich vysypali na stôl na dve kôpky a zahrali si nasledovnú hru: Postupne odoberajú z kôpok cukríky a dávajú ich späť do balenia. Ten z nich, ktorý je na ťahu, má dve možnosti. Buď zoberie ľubovoľný počet cukríkov z jednej kôpky, alebo zoberie cukríky z oboch kôpok naraz, pričom z oboch kôpok ich zoberie rovnako veľa. Ten z nich, ktorý zoberie zo stola posledné cukríky, vyhráva, a získa tak celé balenie cukríkov. Kto z nich vyhrá, ak začne Fedor, a na jednej kôpke sú 4 cukríky a na druhej 6? A ako to bude, ak ich tam bude 5 v jednej a 10 v druhej? Obaja hrajú najlepšie, ako vedia.

Minca sa dozvedela, že chlapec sa volá Filip. Keď teda Filip prišiel domov, vytiahol mincu z vrecka a položil ju na svoj stôl. Nevediac, že ho desaťcentovka stále sleduje, siahol do tašky a vytiahol zošit z matematiky. Mal tam napísaný príklad, no nevedel si s ním dať rady. Pomôžete mu?

Príklad č. 4: Nahraďte rovnaké písmená rovnakými číslicami a rôzne písmená rôznymi tak, aby rovnosť sedela:

$$SÚČET + SÚČET + SÚČET = ÚSEČKA$$

Keď si desaťcentovka pokojne polihovala na stole, ešte nevedela, že Filip býva na obrovskej farme, kde je plno zvierat. Najviac sa jej páčil výbeh so zajacmi. Boli to také malé, krásne zajačiky, že by o nich celý deň básnila.

Príklad č. 3: Predstavme si, že zajace môžu byť len nasledovných farieb: biele, čierne a hnedé. Tiež môžu mať buď obyčajné, alebo sklopené uši. Koľko zajacov akého druhu bude potom v ohrade, ak sú všetky nasledovné tvrdenia pravdivé?

1. Je tu viac hnedých zajacov ako zajacov inej farby.
2. Počet hnedých zajacov so sklopenými ušami sa rovná počtu hnedých zajacov s obyčajnými ušami.
3. Tri zajace majú sklopené uši.
4. Je tu dvakrát viac hnedých zajacov so sklopenými ušami ako bielych zajacov so sklopenými ušami.
5. Čiernych je trikrát viac ako bielych.

Koľko zajacov akého druhu bude potom v druhej ohrade, ak sú všetky nasledovné tvrdenia pravdivé?

1. Počet čiernych sa rovná počtu hnedých.

2. V ohrade je dvakrát toľko hnedých zajacov so sklopenými ušami ako hnedých s obyčajnými ušami.
3. Hnedých so sklopenými ušami je rovnako ako bielych so sklopenými ušami.
4. Všetky okrem jedného majú sklopené uši.

A veru u Filipa nechovali len zajace, ale aj čísla v zošite matematiky. Nepýtajte sa, ako je to možné, či prečo to robia. Je to jednoducho tak. Možno je to zvláštne, no nie priveľmi. Majú totiž prísne podmienky, aké čísla môžu chovať. Tak teda dosť rečí a poďme sa pozrieť do spomínaného zošita.

Príklad č. 9: Filip vo svojom zošite matematiky choval trojice dvojčiferných čísel. Ale nie len tak hocijaké. Keď totiž urobil súčin všetkých troch čísel z ľubovoľnej trojice, dostal číslo, ktoré malo všetky cifry rovnaké. Najviac koľko rôznych trojíc mohol Filip chovať?

Desaťcentovka sa nestíhala čudovať, čo všetko sa vo svete ľudí deje. Nerobila si z toho ťažkú hlavu, len si všetko pozorne prezerala a snažila zapamätať. Pobyť na farme u Filipa sa skončil v cukrárni, kam Filip veľmi rád chodil.