Vzorové riešenia 1. kola letnej série 2014/2015

Príklad č. 1 (opravovala gabika):

Zadanie:

Riešenie: Skákalka sa chce dostať z čísla 2 na číslo 10, a to znamená, že sa potrebuje posunúť o osem čísel pomocou štyroch skokov. Skákalka vie robiť skoky dĺžok 14 a 18. Rozdiel medzi nimi je $18 - 14 = 4$, čiže pomocou dvoch skokov sa vie Skákalka posunúť o štyri čísla doprava alebo doľava.

Ak sa chce posunúť o 4 doprava, tak skočí skok dĺžky 18 doprava a skok dĺžky 14 doľava. Ak, naopak, chce ísť o 4 doľava, tak spraví skok dĺžky 18 doľava a skok dĺžky 14 doprava. Môžeme si tiež všimnúť, že nezáleží na poradí, v akom tieto dva skoky robí.

Skákalka má za cieľ posunúť sa o osem doprava, teda potrebuje dvakrát zopakovať kombináciu, ktorá ju posúva o štyri doprava. Skočí teda dvakrát doprava skok dĺžky 18 a dvakrát doľava skok dĺžky 14.

Skákalka stojí na čísle 2, ktoré je párne. Skákať vie skoky dĺžok 14 a 18, obidve tieto dĺžky sú tiež párne číslo. Vieme, že keď sčítavame alebo odčítavame dve párne čísla, výsledok je vždy párne číslo. Skákalka sa teda nemohla dostať z nepárneho čísla 13 na párne číslo 2 pomocou skokov párnej dĺžky.

Odpoveď: Odpovede na naše otázky teda sú:

a) Skákalka musí skočiť dvakrát doprava skok dlhý 18 a dvakrát doľava skok dlhý 14, na poradí týchto skokov nezáleží.

b) Skákalka klame, nemohla včera stáť na čísle 13.

Komentár: Príklad ste všetci zvládli, jediné, za čo sa strhávali body, bolo, že niektorí z Vás nevysvetlili, prečo Skákalka klamala. Nezabúdajte, že body sú vždy za postup, preto treba zdôvodniť, prečo je čosi tak, ako tvrdíte.

Príklad č. 2 (opravovala Dada):

Zadanie:

Riešenie: „Dobrý obrázok k príkladu nie je nikdy zlý.“ Podľa tohto motta by som začala ja, a teda si nakreslime vrcholy pravidelného šesťuholníka. Chceme ich pospájať čo najviac úsečkami tak, aby nevznikol žiadny obdĺžnik.

Prvým dobrým krokom, ktorý aj väčšina z vás spravila, je zistiť, koľko najviac úsečiek sa mi do takéhoto šesťuholníka zmestí. To sa dá zistiť viacerými spôsobmi. Buď jednoducho, nakresliť a spočítať, alebo si povedať, že z každého vrcholu viem ísť do ďalších piatich (lebo z bodu A viem ísť do B, C, D, E a F), a to je teda dokopy $6 \cdot 5 = 30$. Lenže takýmto štýlom každú úsečku započítam dvakrát (lebo z bodu B viem ísť do A, C, D, E a F, a teda úsečku medzi A a B som zarátala dvakrát), preto je výsledný počet úsečiek $30 : 2 = 15$.

Skúsim teraz ďalší spôsob, ako spočítať počet všetkých úsečiek – začnem kresliť z bodu A. Z toho je možné nakresliť 5 úsečiek. Presunieme sa na bod B. Z neho už úsečka do A vedie, teda už môžme nakresliť iba 4 úsečky (do bodov C, D, E a F), potom z C už len tri, až nakoniec z E už iba jednu do F. Teda počet úsečiek je $5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 15$. Máme super overený výsledok, poďme teda ďalej.

Druhým dobrým nápadom je zistiť, koľko najviac obdĺžnikov by nám mohlo vzniknúť. Tu už bolo aj pár problémov, ale v našom šesťuholníku môžeme vidieť 3 veľké obdĺžniky ($ABDE$, $BCEF$ a $ACDF$) a 6 malých obdĺžnikov (vždy dva z nich vznikli rozpolením jedného veľkého obdĺžnika). To je teda dokopy 9 obdĺžnikov.

Poďme k samotným úsečkám. Všetky obdĺžniky je možné chápať po trojiciach, kde v jednej trojici máme jeden veľký obdĺžnik (napríklad $ABDE$) a dva malé obdĺžniky, ktoré tvoria ten veľký (v našom prípade $ABXY$ a $YXDE$). Prečo je dobré pozerať sa na takéto trojice? Dôležité je, že dve rôzne trojice nemajú žiadne spoločné úsečky (teda žiadny obdĺžnik z prvej trojice nemá spoločnú úsečku s obdĺžnikom z inej trojice). Preto keď odstránim nejakú úsečku v prvej trojici, tak tým nijak neovplyvním iné trojice.

Ktoré úsečky v takejto trojici teda treba vymazať, aby sa „zničili“ všetky obdĺžniky? Ukážme si to na jednej z trojíc. Konkrétne na veľkom obdĺžniku $ABDE$ a dvoch malých v jeho vnútri. Máme na výber tri typy úsečiek. Prvý typ je kratšou stranou obdĺžnika (napríklad AB), druhý potom dlhšiou stranou obdĺžnika (napríklad AE). Tretí je úsečka cez stred veľkého obdĺžnika (napríklad FC). Úsečky, ktoré sú uhlopriečkou veľkého obdĺžnika ani úsečky ako napríklad AC do trojice nepatria. Ak vymažeme prvý typ, zničíme veľký obdĺžnik a jeden z malých. Ak vymažeme tretí typ, zničíme oba malé. Ak ale vymažeme uhlopriečku druhého typu, zničíme oba malé aj veľký. Teda to vyzerá, že nám stačí v každej trojici vymazať jednu úsečku – teda dokopy 3 úsečky.

Trojice sú spolu 3. Ako sme už povedali, odstránením úsečky z niektorej trojice zvyšné dve trojice neovplyvníme, musíme odstrániť minimálne 3. Keďže úsečiek bolo spolu 15, teraz ich bude $15 - 3 = 12$.
Odpoveď: Vieme dokresliť 12 úsečiek.
Komentár: K správnemu riešeniu sa dostala veľmi veľká časť z vás, takže príklad dopadol dobre. Najčastejšou chybou bolo, že ste medzi obdĺžniky nezarátali tie menšie vo vnútri. Zvyšok boli malé chyby v postupe, ale tie sa určite do ďalšieho kola zlepšia, takže sa tešíme na vaše riešenia :)

Príklad č. 3 (opravoval MaťoPaťo):

Zadanie:
Riešenie: Začneme prvou ohradou. Vieme, že tu sú tri zajace so sklopenými ušami a že tu je dvakrát viac hnedých zajacov so sklopenými ušami ako bielych zajacov so sklopenými ušami. Z toho môžeme usúdiť, že tu máme jedného bieleho zajaca so sklopenými ušami a dvoch hnedých zajacov so sklopenými ušami. Keby v ohrade nebol biely zajac so sklopenými ušami, nebol by tam potom ani hnedý so sklopenými ušami. Keďže hnedých so sklopenými ušami je rovnako veľa ako hnedých s obyčajnými, nebol by tam žiaden hnedý zajac. Vieme ale, že 3 zajace majú sklopené uši a teda by museli byť čierne. To by už ale neplatilo, že hnedých zajacov je viac ako zajacov iných farieb. Z toho teda vyplýva, že tam určite bude jeden biely zajac so sklopenými ušami a dvaja hnedí so sklopenými.

Keďže hnedých so sklopenými ušami je rovnako veľa ako hnedých s obyčajnými ušami, budú tam dvaja hnedí s obyčajnými ušami. Čiernych má byť trikrát viac ako bielych. Zatiaľ máme jedného bieleho, takže by sme mali troch čiernych. Keby bol v ohrade ešte nejaký biely zajac s obyčajnými ušami, čiernych zajacov by už bolo šesť, čo je priveľa. Teda tam nebude žiaden biely zajac s obyčajnými ušami a budú tam traja čierni s obyčajnými ušami (zajace so sklopenými ušasmi sú len 3).

Teraz prejdime na druhú ohradu. Vieme, že všetky zajace okrem jedného majú sklopené uši, takže tam zjavne budú minimálne dvaja. Tiež vieme, že v ohrade je dvakrát toľko hnedých so sklopenými ušami ako hnedých s obyčajnými. Keby tam nebol žiaden hnedý zajac s obyčajnými ušami, nebol by tam ani žiaden hnedý so sklopenými. Potom kvôli prvej podmienke by tam nebol ani žiaden čierny. Takže by tam musel byť iba jeden biely zajac s obyčajnými ušami. Avšak povedali sme si, že v ohrade sú aspoň dva zajace, takže určite tam bude aspoň jeden hnedý zajac s obyčajnými ušami. Kvôli štvrtej podmienke presne jeden. Keďže hnedých so sklopenými je dvakrát viac ako hnedých s obyčajnými, budú tam dva hnedé zajace so sklopenými ušami. Spolu máme tri hnedé zajace, takže v ohrade budú kvôli prvej podmienke aj tri čierne. Tieto budú mať sklopené uši, pretože iba jeden v ohrade má obyčajné uši a ten je hnedý. Tak isto v ohrade nebudú ani žiadne biele zajace s obyčajnými ušami. Už nám iba stačí použiť vedomosť, že bielych so sklopenými ušami je toľko isto ako hnedých so sklopenými ušami, a teda dvaja.
Odpoveď: V prvej ohrade je 8 zajacov, z toho dva hnedé s obyčajnými ušami, dva hnedé so sklopenými ušami, jeden biely so sklopenými ušami a traja čierni s obyčajnými ušami. V druhej ohrade je 8 zajacov, z toho dva hnedé so sklopenými ušami, jeden hnedý s obyčajnými ušami, dva biele so sklopenými ušami a tri čierne so sklopenými ušami.
Komentár: Príklad nebol veľmi ťažký a väčšinou ste ho vyriešili dobre. Najčastejšia chyba bola zabúdanie na to, že v prvej ohrade môže byť aj nejaký biely zajac s obyčajnými ušami.

Príklad č. 4 (opravovali Tete, Tomáš):

Zadanie:
Riešenie: Ako prvé si môžeme všimnúť, že číslo $\acute{U}$ na mieste stotisíciek je ovplyvnené len prechodom cez desiatky zo súčtu $S+S+S$. Maximálna hodnota, ktorú tento súčet može dosiahnuť, je $9+9+9+2$ (prechod cez desiatku) $= 29$. Číslo $\acute{U}$ pritom nemôže mať hodnotu nula, lebo je na prvej pozícii v čísle $\acute{U}SE\check{C}KA$. Takže $\acute{U}$ môže mať hodnotu 1 alebo 2.

Teraz sa zamerajme na pozíciu tisíciek. Maximálny súčet, ktorý môže dosiahnuť, je $2+2+2+2=8$ ($3\cdot Ú+$ prechod cez desiatku). Čiže prechod cez desiatku neovplyvňuje súčet na mieste desaťtisíciek. Preto by S v súčte $S+S+S=10\cdot Ú+S$ mohlo byť len číslo 0 alebo 5. Ale rovnako ako číslo $Ú$ aj číslo S sa nachádza na prvej pozícii čísla ($SÚČET$). Preto S môže byť len 5. Vďaka tomu vieme, že $5+5+5=10\cdot 1+5$ a z toho vyplýva, že $Ú=1$.

Znova sa pozrime na pozíciu tisíciek. Súčet, ktorý tu môžme dosiahnuť, je $1+1+1=3$ až $1+1+1+2=5$ ($3\cdot Ú+$ prechod cez desiatky). A teda E má hodnotu 3, 4 alebo 5, lenže $S=5$, takže E bude len 3 alebo 4.

Pozrime sa na pozíciu desiatok, kde maximálny súčet, ktorý vieme dosiahnuť, je $4+4+4+2=14$ ($E=4$). Tu vidíme, že prechod desiatok medzi pozíciou diesiatok a stoviek je najviac 1. Ak sa teraz sústredíme na pozíciu stoviek, tak si môžeme všimnúť, že čísla, ktoré by sme mohli doplniť namiesto $Č$, sú 0 (ak je prechod medzi desiatkami 0), 4 a 9 (ak prechod medzi desiatkami je 2). Keďže my máme prechod najviac 1, tak jediné vhodné číslo je $Č=0$. Čiže prechod medzi desiatkami a stovkami musí byť rovný 0. A teda súčet na mieste desiatok musí byť menší ako 10, a to je len ak $E=3$ a nie je žiadny prechod medzi jednotakmi a desiatkami. Vtedy platí, že $K=9$.

Vieme, že na mieste jednotiek nesmie súčet presiahnuť číslo 10. To dokážeme dosiahnuť hneď v troch prípadoch, a to $1+1+1=3$, $2+2+2=6$ a $3+3+3=9$. No čísla 1, 3 a 9 sme už použili. Preto $T=2$ a $A=6$.

Odpoveď: Výsledok je $51032+51032+51032=153096$.

Komentár: Väčšina z vás mala tento príklad správne, no niektorí ste si neuvedomili, že S a $Č$ sa môžu rovnať aj 4 a 9, čím ste si značne zjednodušili úlohu, a preto ste nemohli dostať plný počet bodov.

Príklad č. 5 (opravoval Peťo):

Zadanie:

Riešenie: Keďže kôpky nie sú rozlíšené inak ako počtom cukríkov, pri riešení preto budeme stav na stole označovať $\{n,m\}$, pričom n bude vždy označovať počet cukríkov na menšej z kôpok. Napríklad na začiatku prvej hry je stav na stole $\{4,6\}$ a na začiatku druhej $\{5,10\}$.

Keďže v každom ťahu musí hráč zobrať aspoň jeden cukrík, tak vždy musí niekto vyhrať. Preto vieme stavy na stole rozdeliť na dve skupiny: *vyhrávajúci*, kedy hráč, ktorý je na ťahu, vie hrať tak, aby určite vyhral, a *prehrávajúci*, kedy vždy prehrá. Ľahko si rozmyslíme, že *vyhrávajúce* stavy budú tie, z ktorých vie hráč na ťahu buď zobrať všetky cukríky na stole, alebo odobrať cukríky tak, aby na stole zostal *prehrávajúci* stav. *Prehrávajúce* stavy budú zasa tie, z ktorých vie hráč na ťahu vytvoriť iba *vyhrávajúce* stavy.

Podľa možných ťahov vieme povedať, že stavy $\{0,n\}$ a $\{n,n\}$ budú *vyhrávajúce*, pretože hráč vie zobrať všetky cukríky zo stola. Podľa úvahy vyššie bude stav, z ktorého vie hráč vytvoriť iba takéto stavy, *prehrávajúci*. Zo stavu $\{1,2\}$ vie hráč spraviť stavy $\{0,1\}$ (ak odoberie dva cukríky v väčšej kôpky, alebo po jednom cukríku z oboch kôpok), $\{1,1\}$ (odobraním jedného cukríka z väčšej kôpky) alebo $\{0,2\}$ (odobraním jedného cukríka z menšej kôpky), ktoré sú všetky *vyhrávajúce*. Teda stav $\{1,2\}$ je *prehrávajúci*. Z toho ďalej vieme povedať, že stavy $\{1,n\}$ ($n>2$), $\{2,n\}$ ($n>2$) a $\{n,n+1\}$ ($n>1$) sú *vyhrávajúce*, pretože z nich hráč vie spraviť stav $\{1,2\}$. Ako sa vieme ľahko presvedčiť, zo stavu $\{3,5\}$ vie hráč spraviť iba *vyhrávajúce* stavy – sú to stavy $\{0,2\}$, $\{0,3\}$, $\{1,3\}$, $\{2,3\}$, $\{0,5\}$, $\{1,5\}$ $\{2,4\}$, $\{3,3\}$, $\{2,5\}$, $\{3,4\}$ – preto je *prehrávajúci*.

Keďže Fedor ako začínajúci hráč vie vytvoriť stav $\{3,5\}$ svojím prvým ťahom (v prvej hre odobraním jedného cukríka z oboch kôpok a v druhej hre odobraním siedmich cukríkov z kôpky s desiatimi), tak obe hry vyhrá, lebo Filip má pred sebou *prehrávajúci* stav a teda nech urobí akýkoľvek ťah, Fedor bude potom v nejakom vyhrávajúcom stave.

Odpoveď: V oboch prípadoch vyhrá Fedor.

Komentár: Príklad ste skoro všetci zvládli vynikajúco. Dve najčastejšie chyby, na ktoré si treba dať pozor, sú nepozorné čítanie zadania – stávalo sa, že ste zabudli, že hráči môžu brať z oboch kôpok naraz – a nedostatočné vysvetlenie postupu riešenia.

Príklad č. 6 (opravovali Tete, Zuzka):

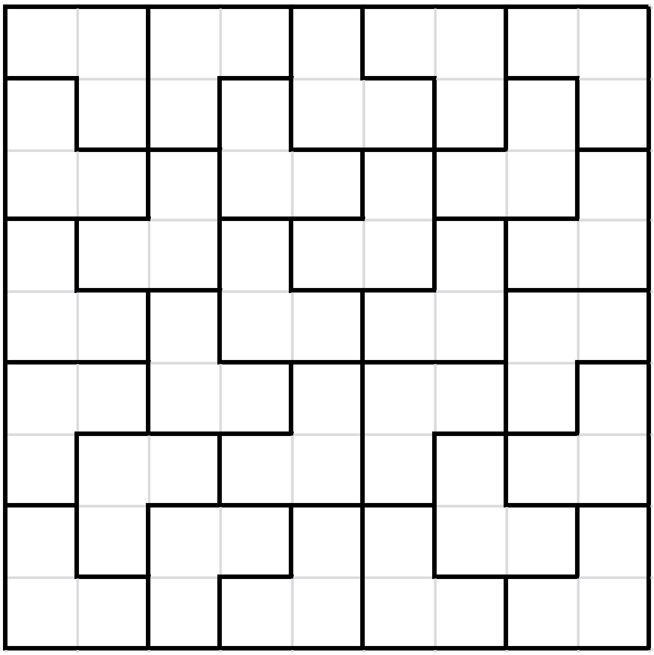
Zadanie:

Riešenie: Zadaný tvar L sa skladá z troch políčok. Preto, aby sme mohli pomocou neho vyskladať nejaký štvorec, musí byť obsah toho štvorca deliteľný tromi, takže aj dĺžka strany štvorca musí byť deliteľná tromi.

Najmenší takýto štvorec je 3×3, ktorý pokryť nevieme, pretože L má najdlhšiu dĺžku strany 2, a teda sa môže dotýkať len jedného rohu. Keďže štvorec má 4 rohy, potrebujeme minimálne 4 dieliky L, ale tie by pokryli 12 políčok a náš štvorec má len 9.

Dva dieliky L vieme spojiť do obdĺžnika 2×3. Zo šiestich takýchto obdĺžnikov vieme poskladať štvorec 6×6. Ak teda máme štvorec so stranou deliteľnou šiestimi, vieme ho zakryť takým spôsobom, že ho vyskladáme zo štvorcov 6×6.

Teraz sa pozrime na štvorec 9×9. Vieme ho vyskladať napríklad spôsobom na obrázku 1. Vieme teda urobiť už aj štvorec 9×9.



Obr. 1: Štvorec 9×9

Teraz ku nemu môžeme pridávať dielik 6×3 z jednej strany (je to polovica štvorca 6×6) tak, aby nám vznikol obdĺžnik 9×15, a potom z druhej strany, aby nám vznikol štvorec 15×15. Takýmto spôsobom sa teda vieme dostať, ku ľubovoľnému štvorcu, ktorého strana je deliteľná tromi, ale nie šiestimi. Tým pádom sme ukázali, že sa vieme dostať, ku ľubovoľnému štvorcu, ktorého strana je väčšia ako 3 a deliteľná tromi.
Odpoveď: Vieme poskladať ľubovoľný štvorec, ktorého strana je väčšia ako 3 a deliteľná tromi.
Komentár: Bohužiaľ sa vám veľmi dobre nedarilo riešiť tento príklad. Nezabudnite, že je veľmi dôležité hovoriť o všetkých možných n, teda nielen dokázať, že pre niektoré to ide, ale aj dokázať, že pre všetky ostatné to nejde. Tiež nie je dobrým dôkazom, ak ukážete, že pre malé n deliteľné tromi to funguje a z toho si bez dôvodu odvodíte, že to platí pre všetky n deliteľné tromi.

Príklad č. 7 (opravovali MaťoPaťo, Ivo):

Zadanie:

Riešenie: Označme si l počet prstov na ľavej ruke a p počet prstov na pravej. Zo zadania vieme, že $1 < p < l$. Z tohto vyplýva, že minimálny počet prstov jedného mimozemšťana je 5, kde $p = 2$ a $l = 3$. Pre 6 prstov je jediné rozdelenie, a to $l = 4$ a $p = 2$. Pre 7 a viac prstov existuje vždy 2 alebo viac rozdelení, lebo keď si zoberieme počet prstov pravej ruky 2 alebo 3, dokážeme k tomu dopočítať adekvátny počet ľavých prstov v súlade s podmienkami v zadaní. Teda $l + p$ je buď 5 alebo 6.

A čo s počtom mimozemšťanov? Keby bol počet mimozemšťanov v tvare $a \cdot b; a, b > 1; a, b \in \mathbb{N}$, (keby nebol prvočíslo) a počet prstov jedného mimozemšťana c, bolo by to to isté, ako keby bolo mimozemšťanov a a prstov $b \cdot c$. Teda počet mimozemšťanov musí byť prvočíslo. Ďalej je problém, keby bolo mimozemšťanov 5 a viac, zaznačme m. Potom by sme pre každý súčin $m \cdot (l+p)$ mohli identifikovať m aj ako celkový počet prstov jedného z nich, lebo počet prstov mimozemšťana je ohraničený iba ako väčší rovný 5 a počet mimozemšťanov väčší ako 1. Napríklad, keby sme mali 7 mimozemšťanov s 5 prstami, rovnaký celkový počet prstov by sme dostali, keby sme mali 5 mimozemšťanov so 7 prstami. Čo sme práve dokázali, má jednu výnimku, pre $m = 5$ a $l + p = 5$ vieme všetko jednoznačne určiť.

Medzi naše možnosti teda patrí táto výnimka a ďalej možnosti pre m medzi 2 a 3, $l + p$ medzi 5 a 6. Keď ich preveríme, zistíme, že nesedí len pre celkový počet prstov 18, teda pre dvoch mimozemšťanov s 9 prstami a 3 mimozemšťanov so 6 prstami.

Odpoveď: Výsledok je v tabuľke 1.

Počet mimozemšťanov	Počet prstov na ľavej ruke	Počet prstov na pravej ruke	Celkový počet prstov
2	3	2	10
2	4	2	12
3	3	2	15
5	3	2	25

Tabuľka 1: Prehľad mimozemšťanov a prstov na rukách

Komentár: Príklad niektorí z vás pochopili inak, ale veľa z vás ho malo výborne vypracovaný.

Príklad č. 8 (opravovali Zajo, Lámač):

Zadanie:

Riešenie: Vieme, že ak majú dva trojuholníky zhodné dve strany a uhol medzi nimi, tak sú podobné. Toto tvrdenie sa tiež volá veta *sus* (strana, uhol, strana) a budeme ho využívať v riešení.

V rovnobežníku platí, že $|AB| = |DC| = a$ a $|BC| = |AD| = b$. Protiľahlé vnútorné uhly v rovnobežníku sú rovnako veľké, teda $|\sphericalangle ADC| = |\sphericalangle ABC|$. Podľa vety *sus* sú trojuholníky ABC a ACD zhodné.

Predeľovacie body K, L, M, N sú v jednej osmine strán rovnobežníka, teda z toho, čo vieme o dĺžkach strán rovnobežníka, vyplýva: $|AN| = |CL|$ a $|AK| = |CM|$. Tým pádom má štvoruholník $AKLC$ polovičný obsah šesťuholníka $AKLCMN$. $S_{AKLC} = \frac{60}{2} = 30\,\mathrm{cm}^2$.

Trojuholníky ACB a KLB sú podobné podľa vety *sus*, s koeficientom $ACB : KLB = 8 : 7$ (Lebo $|LB| = \frac{7}{8}|CB|$, podobne pre $|AB|, |KB|$).

V týchto trojuholníkoch sú preto strany aj výšky v pomere $8 : 7$ (ACB:KLB) Zo vzorca pre obsah trojuholníka vyplýva:

$$S_{ABC} = \frac{a \cdot v_a}{2} \to S_{KBL} = \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{8}a \cdot \frac{7}{8}v_a = \frac{49}{128}a \cdot v_a = \frac{49}{64}S_{ABC}$$

Z tvrdenia, že $S_{AKLC} = 30\,\mathrm{cm}^2$ a $S_{BKL} + S_{AKLC} = S_{ABC}$, dostávame: $S_{ABC} = 30 + \frac{49}{64}S_{ABC}$, $\frac{15}{64}S_{ABC} = 30$, $S_{ABC} = \frac{30 \cdot 64}{15} = 2 \cdot 64 = 128\,\mathrm{cm}^2$

A nakoniec – celý hľadaný obsah rovnobežníka je dvakrát väčší ako S_{ABC}.

Odpoveď: Obsah celého rovnobežníka je $256\,\mathrm{cm}^2$.

Komentár: Príklad ste skoro všetci zvládli ľavou zadnou. Ďalším častým riešením bolo pospájať si protiľahlé predeľovacie body a rozdeliť tým veľký rovnobežník na 64 menších. Obsah nášho 6-uholníka bol tvorený 15-timi takýmito malými rovnobežníkmi (trebalo zdôvodniť prečo), z čoho sme rovno dostali, že obsah jedného je $S = 4\,\mathrm{cm}^2 \to S_{ABCD} = 64 \cdot S = 256\,\mathrm{cm}^2$

Príklad č. 9 (opravovala Zuzka):

Zadanie:

Riešenie: Najskôr si zadáme rozpätie, kde sa súčin hľadaných trojíc čísel môže nachádzať. Vynásobením troch najmenších dvojciferných čísel dostaneme 1000, pri troch najväčších je to 970299. Preto súčin hľadaných trojíc je buď štvorciferný, päťciferný alebo šesťciferný.

Pozrime sa na štvorciferný. Keďže má všetky cifry rovnaké, dá sa zapísať ako $1111 \cdot x$. Prvočíselný rozklad čísla 1111 je $11 \cdot 101$, no keďže je tam trojciferné prvočíslo, nevieme to upraviť na súčin troch dvojciferných čísel. Potrebovali by sme na to totiž rozložiť 101 na súčin dvojciferných alebo jednociferných čísel, čo však nie je možné, keďže je to prvočíslo. Pri päťciferných súčinoch platí to isté. Pvočíselný rozklad čísla 11111 je $41 \cdot 271$, opäť tu máme trojciferné prvočíslo a preto podľa zadania náš súčin nemôže byť ani päťciferný.

Zostali nám už len šesťciferné čísla, ktoré sa dajú zapísať ako $111111 \cdot x$. Začneme len s číslom 111111. Jeho prvočíselný rozklad je $3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 37$. Upravíme si tento súčin na všetky možné trojice dvojciferných čísel, ktorých spoločný súčin je 111111. Číslo 37 nevynásobíme ničím ďalším, lebo hocičím by sme ho vynásobili, vzniklo by nám trojciferné číslo. Nemôžeme násobiť ani jedno z čísel 11 a 13 obidvomi číslami 3 aj 7, lebo by nám vždy vzniklo trojciferné číslo. Preto nám už ostávajú len dve možnosti. Vynásobiť číslo 11 číslom 3 a číslo 13 číslom 7, čím dostávame $33 \cdot 91 \cdot 37$, alebo vynásobiť číslo 11 číslom 7 a číslo 13 číslom 3, čím dostávame $77 \cdot 39 \cdot 37$.

Pri ďalších šesťciferných číslach sa k týmto dvojciferným číslam pridáva aj x. Poďme sa pozrieť na to, čo to x môže byť.

Najskôr si zoberieme prvú trojicu a to $33 \cdot 91 \cdot 37$. Číslo 33 sa dá vynásobiť 2 alebo 3, inými číslami nie, lebo by vzniklo trojciferné číslo. Číslo 91 sa nedá vynásobiť ničím. Číslo 37 sa dá vynásobiť len číslom 2. To značí, že máme 3 možnosti pre prvé číslo, 1 pre druhé a 2 pre tretie. Spolu je to 6 možností, ako ich vieme nakombinovať. Všetky si ich aj vypíšeme, aby sme overili, či niektoré z možností nie sú náhodou rovnaké a či x nie je príliš veľké:

$$33 \cdot 91 \cdot 37 = 111111$$

$$33 \cdot 91 \cdot (37 \cdot 2) = 33 \cdot 91 \cdot 74 = 222222$$

$$(33 \cdot 2) \cdot 91 \cdot 37 = 66 \cdot 91 \cdot 37 = 222222$$

$$(33 \cdot 2) \cdot 91 \cdot (37 \cdot 2) = 66 \cdot 91 \cdot 74 = 444444$$

$$(33 \cdot 3) \cdot 91 \cdot 37 = 99 \cdot 91 \cdot 37 = 333333$$

$$(33 \cdot 3) \cdot 91 \cdot (37 \cdot 2) = 99 \cdot 91 \cdot 74 = 666666$$

Prejdeme k druhej trojici a to $77 \cdot 39 \cdot 37$. Urobíme to isté. Číslo 77 sa nedá vynásobiť ničím. Číslo 39 sa dá vynásomiť číslom 2. Tak isto číslo 37 sa dá vynásobiť len číslom 2. Spolu to robí 4 možnosti a to:

$$77 \cdot 39 \cdot 37 = 111111$$

$$77 \cdot 39 \cdot (37 \cdot 2) = 77 \cdot 39 \cdot 74 = 222222$$

$$77 \cdot (39 \cdot 2) \cdot 37 = 77 \cdot 78 \cdot 37 = 222222$$

$$77 \cdot (39 \cdot 2) \cdot (37 \cdot 2) = 77 \cdot 78 \cdot 74 = 444444$$

To sú všetky možnosti. Dokopy je ich 10.

Odpoveď: Filip mohol chovať 10 rôznych trojíc čísel.

Komentár: Toto bol taký motivačný deviaty príklad na začiatok letnej série, nebol veľmi ťažký. V čom ste však často robili chybu, bolo, že ste si neuvedomili, že keď 111111 násobíte číslom 4, viete ho rozložiť na $2 \cdot 2$. Ešte dodám, že veľa z vás nenapísalo, ako ste z prvočíselného rozkladu robili dvojciferné čísla, čo by sa hodilo aspoň jednou vetou naznačiť, lebo inak nie je isté, či ste došli k všetkým riešeniam.

Prémia (opravovali Luti, Tinka):

Zadanie:

Riešenie: Našou úlohou bolo nájsť čo najväčší možný počet lístkov, ktoré vieme vložiť do kociek, ktoré sa navzájom nedotýkajú. Ako výhodný postup sa ukázalo vkladať papieriky do každého druhého poschodia. Takýto postup nám to dosť zjednoduší, lebo sa nemusíme pozerať na to, či nejaké dve kocky v rámci rôznych poschodí susedia. Ostáva nám sústrediť sa na „susedenie“ na tom istom poschodí. Predstavme si teraz šachovnicovú plochu, čierne políčka nech označujú kocky, do ktorých vložíme lístok a biele, do ktorých nevložíme. Keďže na šachovnici žiadne dve čierne políčka nesusedia stranou, takéto vloženie vyhovuje zadaniu. Takýmto spôsobom vložíme na 1. poschodí $100 : 2 = 50$ lístkov, na druhom žiaden, na treťom $64 : 2 = 32$, na štvrtom žiaden, na piatom $36 : 2 = 18$, na šiestom opäť žiaden, na siedmom $16 : 2 = 8$, na ôsmom žiaden, na deviatom $4 : 2 = 2$ a na úplnom vrchu žiadny. Spolu máme $50 + 32 + 18 + 8 + 2 = 110$ lístkov. Keďže nikto nenašiel lepšie riešenie, považujeme takéto rozloženie za najvhodnejšie.

Odpoveď: Pani môže vložiť do matematického stojana 110 papierikov.

Komentár: Naozaj ste veľmi šikovní, drvivá väčšina našla práve tento spôsob. Tým, ktorým sa to nepodarilo, držíme palce nabudúce :)