Vzorové riešenia 3. kola zimnej série 2013/2014

Príklad č. 1 (opravovala Lia):

Zadanie:

Riešenie: Na začiatok si vypočítame, koľko sekúnd je medzi 12:00 a 22:39. To je 10 h a 39 min. Čiže 38340 s. Teraz už len treba vypočítať, koľkokrát sa jednotlivé kolieska za daný čas otočia a s akým zvyškom.

Prvé koliesko sa za tento čas otočí 38340 : 15 = 2556 bezo zvyšku. To znamená, že koliesko sa otočí presne 2556-krát a zastane v polohe, v ktorej bolo na začiatku. Tým pádom bude o 22:39 na vrchu kolieska číslo 1.

Druhé koliesko sa za tento čas otočí 38340 : 16 = 2396 so zvyškom 4. To znamená, že koliesko sa otočí 2396-krát celé a potom ešte o štyri zúbky. Keďže po 2396 otočeniach bude hore číslo 1 a druhé koliesko sa točí proti smeru hodinových ručičiek (prvé sa točilo v smere hodinových ručičiek, preto ovplyvnilo toto, aby sa točilo opačne), bude o 22:39 na vrchu druhého kolieska číslo 5.

Tretie koliesko sa od 12:00 do 22:39 otočí 38340 : 17 = 2255 so zvyškom 5. To znamená, že koliesko sa otočí 2255-krát a ešte o päť zúbkov. Toto koliesko sa bude točiť v smere hodinových ručičiek, keďže druhé koliesko sa točilo proti smeru. O 22:39 bude teda na vrchu tretieho kolieska číslo 13.

Odpoveď: O 22:39 budú mať kolieska navrchu čísla 1, 5 a 13.

Komentár: Príklad ste väčšina zvládli pekne. Problémy zväčša nastávali pri uvedomovaní si, ktorým smerom sa má ktoré koliesko otáčať.

Príklad č. 2 (opravoval Kuchtík):

Zadanie:

Riešenie: Ideálne bolo začať zrátaním obsahov všetkých štvorcov, aby sme zistili obsah výsledného, respektíve výsledných obdĺžnikov. Ten je 1056 j^2 (jednotiek štvorcových).

Ďalej pokračujme úvahou, že najväčší štvorec má stranu dlhú 18, a preto je najmenšia možná dĺžka jednej strany výsledného obdĺžnika 18. Tiež sú prípustné dĺžky strán (na základe prirátavania zvyšných dĺžok zo zadania ku dĺžke 18) 19, 22, 25, 26, 27, 28, 32 a 33.

Naspäť sa vrátime k obsahu. Obsah obdĺžnika je výsledkom súčinu jeho 2 strán, a teda $S = a \cdot b$. Keďže obdĺžnik musí mať celočíselné dĺžky strán, zistíme, ktorými dĺžkami z možných je obsah 1056 deliteľný bezo zvyšku. Vyšli nám iba tri celočíselné výsledky, a to keď sme delili číslami 22, 32 a 33. Takže možné dĺžky strán obdĺžnika sú 22×48, 32×33 a 33×32, čo je to isté.

Rýchlo zisťujeme, že obdĺžnik 22×48 nevieme poskladať pre jednoduchý problém. Ku štvorcu s dĺžkou 18 môžeme pridať už len štvorec s dĺžkou 4 a dosiahneme 22 v jednom smere, kde sa nám už nijako nepodarí doplniť medzery.

Nakoniec sme prišli na to, že náš obdĺžnik, ak sa nám ho podarí zložiť, bude len jeden o rozmeroch 32×33.

Strany 32 a 33 dostaneme najjednoduchšie tak, že do rohu posadíme najväčší štvorec 18×18, navrch od neho uložíme 14×14 a doprava 15×15 a snažíme sa doplniť vzniknuté medzery. Podarilo sa nám ich vyplniť iba jedným spôsobom.

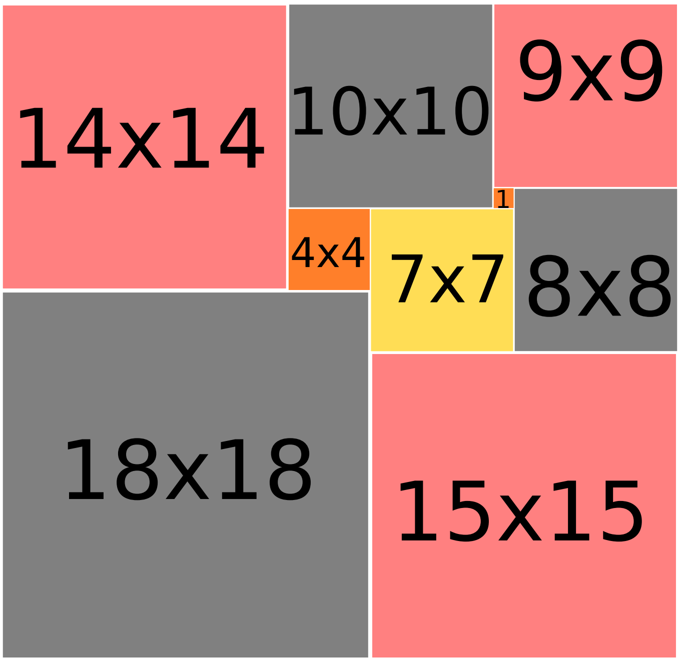
Odpoveď: Výsledná formácia je na obrázku 1.

Komentár: Napriek tomu, že je to druhý príklad, väčšine robil problém. Keď od vás zadanie chce, aby ste zistili, ako sa dá niečo poskladať, alebo tomu podobné, odpoveďou skoro nikdy nie je, že sa to nedá. A tí, ktorým sa to aj podarilo, nemali väčšinou žiaden postup, a preto bol tento príklad dosť chudobne bodovo ohodnotený.

Príklad č. 3 (opravovali Zuzka, Bendži):

Zadanie:

Riešenie: Tento príklad začneme postupne riešiť od krajov a konkrétne začneme 1. osobou vľavo. Vľavo od seba nemá žiadnu inú osobu, takže tam nie je ani žiadny klamár. Napravo od seba má 9 ľudí, o ktorých zatiaľ nevieme, či klamú, alebo nie. Ale zo zadania vieme, že aj keby vpravo nebola žiadna pravdovravná osoba, tak vľavo nikdy nebude viac klamárov ako vpravo pravdovravných. Preto táto osoba klame.



Obr. 1: Poskladaný obdĺžnik

Ďalej budeme pokračovať osobou úplne vpravo. Vpravo nemá vedľa seba nikoho (takže ani žiadneho pravdovravného človeka) a vľavo má už jedného klamára. Z čoho vyplýva, že vraví pravdu.

V ďalšom kroku zistíme, či 2. osoba zľava klame alebo hovorí pravdu. Vieme o nej, že vľavo od nej sedí len 1 klamár a vpravo sedí 1 alebo viac pravdovravných osôb. Vyplýva z toho, že táto osoba klame, lebo určite nemá viac klamárov vľavo, ako pravdovravných vpravo.

Teraz sa poďme pozrieť na druhú osobu sprava. Vieme o nej, že má vpravo 1 pravdovravnú osobu a vľavo 2 alebo viacerých klamárov. Čím spĺňa podmienky, a teda hovorí pravdu, lebo má viac klamárov vľavo ako pravdovravných vpravo. Takýmto spôsobom budeme postupovať, až kým sa nedostaneme do stredu, potom nám už len stačí spočítať klamárov.

Odpoveď: Výsledok bol len jeden, a to, že klamárov bolo presne 5.

Komentár: Príklad ste skoro všetci mali úplne správne, za to vás chválime :)

Príklad č. 4 (opravovala Tete):

Zadanie:

Riešenie: Ako prvé si zoberieme tvrdenie „Dášenka je pravnučkou Márie“. Z toho nám vyplýva, že Dášenka je v 4.(najmladšej) generácii a Mária je v 1.(najstaršej). Teraz sa pozrieme na tvrdenie „Adam Trnka má tri vnučky, najmladšia z nich je Dášenka“. Keďže Dášenka je v 4. generácii, Adam Trnka ako jej dedko (o dve generácie vyššie) bude v 2. generácii. Z prvého tvrdenia o tom, že Ivan Trnka je najstarší z Trnkovcov, nám vyplýva, že musí byť starší ako Adam Trnka (v 2. generácii), teda Ivan je v 1. generácii. Z tohto prvého tvrdenia (Ivan má dve vnúčence: Soňu a Cyrila) vieme tiež povedať, že Soňa a Cyril sú v 3. generácii.

Z tvrdenia „Soňa Krátka je vnučkou Jozefa Slezáka“ nám vyplýva, že Jozef Slezák je z 1. generácie. Taktiež z toho vyplýva, že Soňa má jedného rodiča z rodu Trnkovcov a druhého z rodu Slezákovcov. Tento rodičovský pár má ale priezvisko buď Trnkovci, alebo Slezákovci, podľa toho, z ktorého rodu je manžel.

Soňa Krátka sa teda musela vydať za niekoho s priezviskom Krátky. Pretože Ivan Trnka a Jozef Slezák sú jej dedkovia, nemôžu byť jej manželia (nesedelo by to ale ani priezviskami). Adam je Trnka a nie Krátky, takže tiež nemôže byť jej manžel. Cyril má toho istého dedka, ako Soňa, a teda je buď jej brat, alebo bratranec, a teda tiež nie je jej manžel. Zostáva už len Boris Krátky.

Boris a Soňa majú spolu dve deti, z ktorých jedna je Elenka (tvrdenie „Elenkina sestra má angínu a lieči ju jej otec, lekár Boris Krátky“). Elenka je teda tiež v 4. generácii. Z tvrdenia „otec Gitky je švagrom otca

Eleny“ vieme, že otec Gitky je švagrom Borisa. To znamená, že Gitka je v rovnakej generácii ako Elenka (v 4.), ale tieto dve nie sú sestry. Ďalej vieme z tvrdenia „Boris Krátky je manžel švagrinej Evy Trnkovej“, že Eva Trnková je spolu s manželmi Borisom a Soňou, a Cyrilom v 3. generácii.
Teraz si napíšeme, čo vieme o jednotlivých generáciách:

- V prvej generácii sú Ivan Trnka, Mária a Jozef Slezák.
- V druhej generácii je Adam Trnka.
- V tretej generácii sú manželia Boris Krátky a Soňa Krátka a ešte Eva Trnková a Cyril.
- V štvrtej generácii sú Elenka Krátka (dcéra Sone a Borisa), Dášenka a Gitka (sesternica Elenky).

To je 11 osôb. Dokopy ich má byť 13, takže nám 2 chýbajú – Klára Slezáková a Zuza. Podľa tvrdenia „Zuza je dcérou Kláry Slezákovej“ vieme, že budú v generáciách pod sebou. Kedže v prvej a druhej generácii je viac mužov, ako žien, tak aby tvorili páry, musia byť tieto dve tam.

Klára Slezáková je teda v 1. generácii a podľa priezviska je manželka Jozefa Slezáka. Mária je potom manželka Ivana Trnku a je Trnková. Zuza je v 2. generácii a keďže tam zatiaľ nie je žiadny pár, musí byť manželkou Adama Trnku, aby mali tie deti v 3. generácii rodičov.

Zistili sme, že Soňa a Cyril sú buď sesternica a bratranec, alebo súrodneci. Keďže ale v generácii nad nimi je len jeden pár rodičov, sú títo dvaja súrodenci. Z tvrdenia „Boris Krátky je manžel švagrinej Evy Trnkovej“ a z predchádzajúcich zistení nám vychádza, že Eva Trnková a Cyril sú manželia. Takže Cyril je Trnka. V 4. generácii sú tri dievčatá Elenka, Gitka a Dášenka. Elenka má sestru, ale Gitka to nie je (zistili sme vyššie), takže jej sestra (a druhá dcéra Soni a Borisa) je Dášenka. Z tvrdenia „otec Gitky je švagrom otca Eleny“ zistíme, že Gitka je dcérou Cyrila a Evy.

Odpoveď: Osoby môžeme rozdeliť podľa generácií nasledovne:

- V prvej generácii sú: manželia Ivan Trnka a Mária Trnková (1. pár) a manželia Jozef Slezák a Klára Slezáková (2. pár).
- V druhej generácii sú: manželia Adam Trnka (syn Ivana a Márie) a Zuza Trnková (rod. Slezáková, dcéra Jozefa a Kláry) (3. pár).
- V tretej generácii sú: manželia Cyril Trnka (syn Adama a Zuzy, brat Sone Krátkej) a Eva Trnková (4. pár) a manželia Soňa Krátka (rod. Trnková, dcéra Adama a Zuzy, sestra Cyrila Trnku) a Boris Krátky (5. pár)
- V štvrtej generácii sú: sestry Elenka a Dášenka Krátke (dcéry Borisa a Sone) a Gitka Trnková (dcéra Cyrila a Evy).

Komentár: Príklad ste väčšinou mali správne. Chybu ste často robili pri tom, že ste si povedali, že keď je Ivan Trnka najstarší z Trnkovcov, tak je v 1. generácii. Nemusí to tak byť, napríklad aj Boris Krátky je najstarší z Krátkych a je až v 3. generácii. Rozhodla som sa vám za toto nestrhávať body, ale nabudúce pozor na takéto veci.

Príklad č. 5 (opravoval Zajo):

Zadanie:

Riešenie: Po tom, čo sme sa oboznámili s pravidlami hry, sa skúsme zamyslieť. Prvé, čo nás možno napadne, je, že keď chceme mať čo najväčšiu hodnotu mincí, tak vždy zoberieme tú najväčšiu, čo môžeme. Predtým, než to napíšeme, treba si to overiť. Poľahky si uvedomíme, že to bude pekná hlúposť, napríklad keď mince budú $2-0-15-4$ (pre jednoduchosť budeme príklady uvádzať s malým počtom mincí).

Keďže sme neuspeli, zamyslíme sa, v čom bol problém. Štvorka bola síce väčšia, ako dvojka, ale odkryli sme ňou ešte väčšiu pätnástku, ktorá s nami skoncovala. Zjavne teda bude potrebné sa pozerať nielen na krajné mince, ale dokonca aj na tie za nimi. Tým pádom chceme hrať tak, aby sme odkryli generálovi čo najmenšie hodnoty a zobrali si čo najväčšie. Toto zrealizujeme tým, že si spočítame rozdiely krajných mincí. Budú to $0-2=-2$ a $15-4=11$.

V jednom prípade teda získame o dve viac a v druhom o jedenásť menej, ak by generál ťahal tak, ako predpokladáme. V našom príklade $2-0-15-4$ by sme tým pádom vedeli zobrať pätnástku a vyhrať. Rovnako ako predtým, aj teraz je však potrebné si overiť, či takáto taktika naozaj vždy vyhrá.

Po chvíli hrania sa dostaneme k prípadu, ako je napríklad $2-8-4-8-7-0$. Podľa nás si treba zistiť menší rozdiel krajných mincí, čo je naľavo ($8-2=6; 7-0=7; 6<7$). V nasledujúcom ťahu sa dostaneme do situácie $4-8-7-0$, a keď si vypočítame náš rozdiel, tak $8-4=4; 7-0=7; 4<7$. Nakoniec si potiahneme sedmičku a generál nulu. Vyzerá to sľubne, keď to ale zrátame, zistíme, že sme prehrali 13 : 16.

Mohli sme si všimnúť, že akonáhle bolo mincí viac, ako štyri, nestačilo nám pozerať sa na krajné dve. Z toho si vieme odniesť, že keď sa budeme pozerať na krajné tri, pri viac ako šiestich minciach nám to nepomôže. Preto si musíme všímať všetky mince na stole.

Vieme, že na stole je na začiatku nejaký počet mincí, konkrétne 50. Každý z hráčov zoberie práve polovicu, tj 25. Potrebujeme dosiahnuť, aby našich 25 malo aspoň taký súčet, ako generálových 25. Keď si mince označíme číslami od 1 po 50, práve 25 bude mať párne označenie a práve 25 nepárne.

Na začiatku je na koncoch jedna párna a jedna nepárna minca. Keď si z nich jednu zoberieme, na koncoch ostanú dve mince s rovnakou paritou. Po generálovom ťahu máme opäť na výber z párnej a nepárnej. Takýmto spôsobom by sa dali zobrať buď všetky mince na nepárnych pozíciách alebo mince na párnych pozíciách. Preto pred hrou spočítame súčet mincí na párnych a na nepárnych pozíciách a počas hry budeme brať buď len tie na nepárnych alebo len tie na párnych, podľa toho, ktoré mali väčší súčet.

Nakoniec netreba zabudnúť spomenúť, že tieto súčty sa môžu rovnať. To nám ale nevadí, lebo podľa zadania nám stačí mať rovnako veľa ako generál.

Odpoveď: Kráľ sa bude snažiť potiahnuť všetky mince na párnych alebo na nepárnych pozíciách.

Komentár: Väčšina príklad ľahko zvládla, ale ani tí ostatní neodišli naprázdno.

Príklad č. 6 (opravovali Marka, Muro):

Zadanie:

Riešenie: Ako prvé si označme začiatočné číslo x. Poďme na to odzadu, teda najprv sa pozrime na poslednú operáciu, a to násobenie číslom 15 alebo 16. Keďže sme začali kladným celým číslom a žiadna z operácií nie je delenie, musia byť aj všetky medzivýsledky celé čísla. Teda ak pôjdeme spätne a výsledné číslo 10200 vydelíme 15 alebo 16, mali by sme dostať celé číslo. Tak to teda skúsme:

$$10200/15 = 680$$

$$10200/16 = 637,5$$

Žiaľ $637,5$ celým číslom nie je, a teda posledná operácia bude určite násobenie pätnástimi. Overme pre istotu aj pravidlo o tom, že ak máme násobiť pätnástimi, tak musí byť číslo deliteľné 8. $680/8 = 85$, super, toto nám sedí. Ale mohlo sa stať, že práve túto operáciu vynechal. Skúsme ju teda vynechať:

$$(x \cdot 2 + 6) \cdot 34 \cdot x = 10200 \rightarrow (x \cdot 2 + 6) \cdot x = 300 \rightarrow (x+3) \cdot x = 150$$

A tu si skúsme poradiť s tým, ako zistiť, aké bude x. Zistime teda rozklady čísla 150, lebo vieme, že ho tvorí súčin x a $(x+3)$. Sú to $1 \cdot 150$, $2 \cdot 75$, $3 \cdot 50$, $6 \cdot 25$, $10 \cdot 15$, no a my hľadáme taký rozklad, aby bolo jedno číslo od druhého väčšie o 3. Taký rozklad tu nemáme, čiže x v tomto prípade nemôže byť celým číslom. Poslednú operáciu teda nemohol vynechať. Ideme ďalej. Vynechajme štvrtú operáciu:

$$(x \cdot 2 + 6) \cdot 34 \cdot 15 = 10200 \rightarrow (x \cdot 2 + 6) \cdot 34 = 680 \rightarrow x \cdot 2 + 6 = 20 \rightarrow x \cdot 2 = 14 \rightarrow x = 7$$

Tak tu to máme super, ani netreba nič rozkladať a máme priamo prvý výsledok. Vynechal štvrtú operáciu a začal číslom 7. Teraz vynechajme tretiu operáciu:

$$(x \cdot 2 + 6) \cdot x \cdot 15 = 10200 \rightarrow (x \cdot 2 + 6) \cdot x = 680 \rightarrow (x+3) \cdot x = 340$$

Opäť tu máme problém s x. Poďme teda na tie rozklady. Sú to $1 \cdot 340$, $2 \cdot 170$, $4 \cdot 85$, $5 \cdot 68$, $10 \cdot 34$, $17 \cdot 20$, no a my hľadáme taký rozklad, aby bolo jedno číslo od druhého väčšie o 3 (opäť x násobíme $x+3$). A takúto dvojicu tu máme, a to 17 a 20, čiže x bude 17 a $x+3$ bude 20. Máme tu druhé riešenie. Vynechajme druhú operáciu:

$$x \cdot 2 \cdot 34 \cdot x \cdot 15 = 10200 \rightarrow x \cdot 2 \cdot 34 \cdot x = 680 \rightarrow x \cdot 2 \cdot x = 20 \rightarrow x \cdot x = 10$$

Môžeme ale získať desať keď vynásobíme celé číslo samým sebou? Skúsme to $1 \cdot 1 = 1$ – málo, $2 \cdot 2 = 4$ – málo, $3 \cdot 3 = 9$ – málo, $4 \cdot 4 = 16$ – to je už veľa. Čiže x opäť nemôže byť celé číslo. Poďme teda ďalej. Vynechajme prvú operáciu:

$$(x+6) \cdot 34 \cdot x \cdot 15 = 10200 \rightarrow (x+6) \cdot 34 \cdot x = 680 \rightarrow (x+6) \cdot x = 20$$

Znova rozklady, poďme teda na to: $1 \cdot 20$, $2 \cdot 10$, $4 \cdot 5$. Tentokrát nasobíme x a $x+6$, jeden činiteľ musí teda byť od druhého väčší o 6. Takúto dvojicu tu žiaľ nemáme, čiže x by nemohlo byť celé. Vyskúšali sme už vynechať všetky operácie a teda zistili všetky riešenia.
Odpoveď: Buď vynechal tretiu operáciu a začal číslom 17, alebo vynechal štvrtú operáciu a začal číslom 7.
Komentár: Príklad ste mali väčšinou správne, ale niektorí z vás si poplietli výpočty, alebo nevysvetlili svoj postup dosť jasne. Príklad sa dal riešiť aj pomocou kvadratických rovníc (rovnice s neznámou „na druhú“), ale vzhľadom na to, že väčšina z vás ich zatiaľ riešiť nevie, sme ich vo vzoráku nepoužili.

Príklad č. 7 (opravoval MaťoPaťo):

Zadanie:
Riešenie: Všimnime si najprv bod 12 v zadaní. Uvedomme si, že stred súmernosti obrazca musí byť v strede kružnice, pretože v inom prípade by sa body zobrazovali mimo kružnice. Keďže máme napísané, že stred súmernosti je v priesečníku dvoch spojníc, tak potom musia minimálne dve spojnice prechádzať cez stred, teda byť priemermi. Všetky tri priemery mať nemôžeme, pretože potom by mala každá esencia jednu spojnicu ako priemer a vieme, že Svetlo mať priemer nemôže.

Teraz si všimnime Svetlo a Temnotu. Vieme, že nemôžu byť susedia, sú spojené a nie sú spojené priemerom, pretože Svetlo nemá priemer. Z toho vyplýva, že ak si dáme Svetlo hocikam, tak medzi Svetlom a Temnotou musí byť jeden vrchol a sú spojené. Teraz, keď už máme zasadené Svetlo, si môžeme nakresliť aj tie dva priemery tak, aby Svetlo nemalo priemer.

Vieme, že spojnice idúce zo Svetla, Temnoty a aj zo Vzduchu majú rovnaký uhol. Všimnime si, že Temnota už má dve spojnice a uhol medzi nimi je 30°. Z toho vyplýva, že aj spojnice idúce zo Svetla musia mať 30°, a teda máme jasne dané, ako pôjde tá spojnica, pretože v druhom prípade by to bol priemer kružnice. Teraz už len preklopíme spojnice podľa stredu súmernosti (obrázok 2).

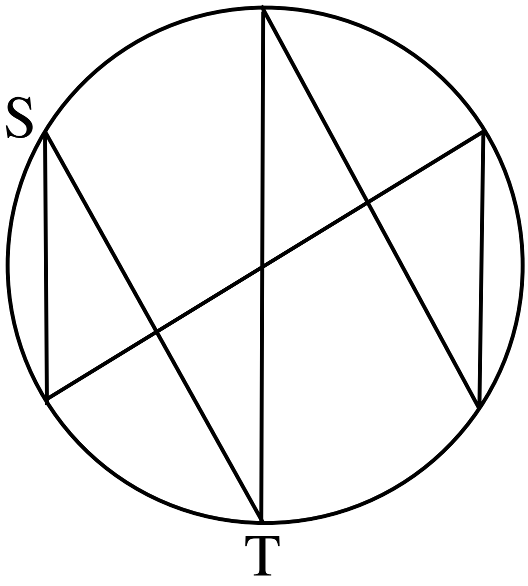
Vieme, že Vzduch nemôže mať spojnicu so svojím susedom, a preto musí byť Vzduch na jedinom ostávajúcom mieste, ktoré nie je spojené so susedom. Keďže Voda má byť spojená aj so Vzduchom aj so Zemou a Vzduch už je spojený s Temnotou, Voda musí byť na druhej spojnici so Vzduchom. Teraz umiestnime Zem na druhú spojnicu s Vodou a Oheň na posledné voľné miesto. Skontrolujeme si, či platia všetky podmienky, a vidíme, že platia.
Odpoveď: Konečné usporiadanie elementov vidíte na obrázku 3.
Komentár: Výsledok ste mali všetci dobrý, ale ak ste robili chyby, tak to bolo hlavne v tom, že ste predpokladali, že niečo platí, aj keď ste to nedokázali.

Príklad č. 8 (opravovala Hanka):

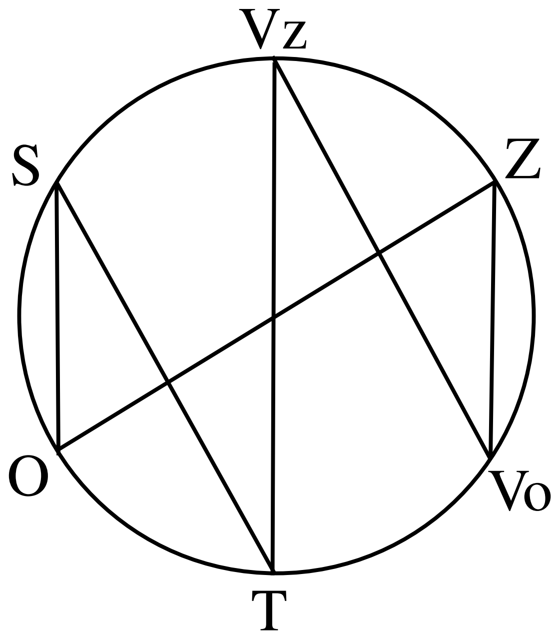
Zadanie:
Riešenie: Tento príklad sa dal riešiť mnohými spôsobmi, čomu nasvedčuje aj fakt, že žiadne dve riešenia nemali rovnaký postup. Tu si však ukážeme len jeden z nich.

Pozrime sa na obrázok 4. Keďže sú strany BD a ED obdĺžnika $ABCD$ na seba kolmé, trojuholník BDF je pravouhlý. $\sphericalangle BFD$ a $\sphericalangle CFX$ sú vrcholové, majú teda rovnakú veľkosť, označme si ju α. Trojuholníky BDF a CFX majú teda oba jeden vnútorný uhol veľkosti 90° (teda pravý) a jeden veľkosti α, určite majú aj tretí vnútorný uhol rovnaký (keďže súčet vnútorných uhlov v trojuholníku je 180°). Trojuholníky BDF a CFX sú si teda navzájom podobné.

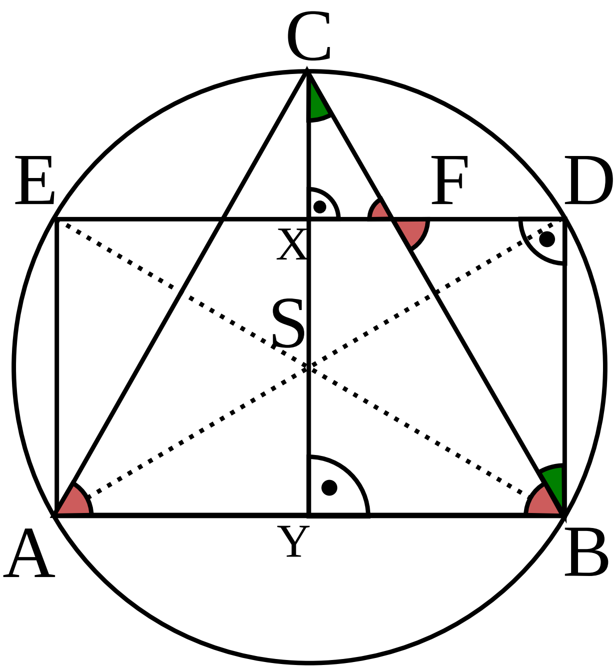
Spustením kolmice z bodu C na stranu AB vznikne trojuholník YBC, ktorý má taktiež jeden vnútorný uhol veľkosti 90° ($\sphericalangle CYB$) a jeden veľkosti α. Je teda tiež podobný trojuholníkom BDF a CFX. Keďže sa bod C nachádza uprostred menšieho oblúka DE, nachádza sa aj uprostred väčšieho oblúka AB (keďže sú strany DE a AB rovnobežné). Kolmica na stranu AB prechádzajúca bodom C teda obe tieto úsečky rozdelí na polovicu (je ich osou). Zároveň je preto priamka, na ktorej táto kolmica leží, osou súmernosti celého obrazca,



Obr. 2: Obrazec rozostavenia elementov



Obr. 3: Konečné rozostavenie elementov



Obr. 4: Doplnený náčrt

Ako sme si vyššie dokázali, trojuholníky BDF a YBC sú si navzájom podobné. Ak teda pre trojuholník BDF platí, že dĺžka úsečky BF je dvakrát väčšia, ako dĺžka úsečky DF, tak aj pre trojuholník YBC platí, že dĺžka úsečky BC je dvakrát väčšia, ako dĺžka úsečky BY. Tým, že úsečka BY je polovicou úcečky AB, sme práve dokázali, že dĺžka úsečky AB a úsečky BC je rovnaká. No a keďže je celý obrazec osovo súmerný, dĺžka úsečky AC je tiež rovnaká – trojuholník ABC je teda rovnostranný. To znamená, že kolmica na stranu AB je vlastne ťažnicou (úsečkou, ktorá spája vrchol trojuholníka so stredom protiľahlej strany) a bod S ťažiskom (priesečníkom ťažníc; keďže pri rovnostrannom trojuholníku je stred opísanej kružnice a ťažisko ten istý bod). Ťažisko vždy leží na ťažnici v dvoch tretinách jej dĺžky od daného vrcholu trojuholníka a rozdeľuje ju v pomere 2 : 1. Úsečka SC je polomerom kružnice, má teda dĺžku 42 mm, a keďže má byť v danom pomere k úsečke SY, dĺžka úsečky SY je presne polovičná, teda 21 mm.

Úsečky AD a BE sú uhlopriečkami obdĺžnika $ABDE$, no zároveň sú priemermi kružnice. Dva rôzne priemery kružnice sa môžu pretnúť len v strede kružnice, bod S je teda zároveň priesečníkom uhlopriečok obdĺžnika $ABDE$. To znamená, že má od strán obdĺžnika AB a DE rovnakú vzdialenosť. Z toho vyplýva, že bod S rozdeľuje úsečku XY na polovicu, teda jej celková dĺžka je $2 \cdot |SY| = 2 \cdot 21\,\mathrm{mm} = 42\,\mathrm{mm}$.

No a napokon, keďže je úsečka CY (a tým pádom aj úsečka XY) kolmá na stranu AB, tak sú úsečky AE, XY a DB navzájom rovnobežné. Body X a Y ležia na stranách obdĺžnika $ABDE$, preto majú tieto úsečky aj rovnakú dĺžku, a síce 42 mm

Odpoveď: Dĺžka strany obdĺžnika AE je 42 mm.

Komentár: Za tento príklad väčšina z vás získala plný počet bodov. Bodíky ste strácali väčšinou len za nedostatočné vysvetlenie predpokladov, o ktoré ste sa vo svojom riešení opierali – brali ste ich ako samozrejmé a očividné a neobťažovali ste sa dokázať, že to je naozaj tak, čo je však chyba a netreba na to zabúdať. Ináč ste sa s tým ale popasovali veľmi pekne a našli ste naozaj veľké množstvo rôznych riešení :)

Príklad č. 9 (opravoval Peťo):

Zadanie:

Riešenie: Príklad budeme riešiť tak, že nájdeme všetky možnosti na to, koľko loptičiek mohlo byť v skupinách. Vieme, že spolu je desať skupín loptičiek. Ak by v každej skupine bola len jedna loptička, tak hneď máme jedno riešenie: V krabici je desať loptičiek a majú hodnoty 110, 112, 113, 114, 115, 116, 117, 118, 120 a 121.

Teraz si treba uvedomiť, že pri vytváraní skupín sme vždy vyberali jednu loptičku, čo je inak povedané to, že sme deväť loptičiek nevybrali. Teda ak by sme robili skupiny deviatich loptičiek a celkovo by bolo desať loptičiek, tak tiež vieme spraviť desať skupín. Každá loptička sa nachádza v deviatich rôznych skupinách, čiže prispieva aj do deviatich súčtov. Preto by súčet všetkých hodnôt skupín loptičiek mal byť deliteľný 9:

$$\frac{110+112+113+114+115+116+117+118+120+121}{9} = \frac{1156}{9} = 128\ zv.\ 4$$

Keďže ale nie je, tak to znamená, že v skupinách nemohlo byť deväť loptičiek.

Ďalšia možnosť je, že by v každej skupine boli dve loptičky. Aby bolo desať skupín, muselo by v krabici byť päť loptičiek. Každá loptička môže byť v dvojici so štyrmi inými. Treba si rozmyslieť, že keď súčet hodnôt skupín vydelíme počtom skupín, v koľkých sa nachádza jedna loptička (teraz sú to štyri), dostaneme súčet hodnôt všetkých loptičiek: 1156 : 4 = 289. Vieme, že súčet dvoch loptičiek s najmenšími hodnotami je 110 a súčet dvoch loptičiek s najväčšími hodnotami je 121. Teda loptička so „strednou“ hodnotou má hodnotu $289 - 110 - 121 = 58$. Súčet loptičky s najmenšou a „strednou“ hodnotou je 112, z čoho vyplýva, že najmenšia loptička má hodnotu 54. Teda loptička s druhou najmenšou hodnotou má hodnotu $110 - 54 = 56$. Obdobne dostaneme, že hodnoty loptičiek s dvoma najväčšími hodnotami sú 59 a 62. Našli sme druhé riešenie: V krabici je päť loptičiek a majú hodnoty 54, 56, 58, 59 a 62.

Teraz sme nevyberali tri loptičky z piatich a vedeli sme spraviť desať skupín, preto ak by sme vyberali trojice loptičiek, tak by sme tiež vedeli spraviť desať skupín. Pozrime sa, či je súčet hodnôt všetkých skupín deliteľný šiestimi, čo je počet skupín, v koľkých sa nachádza tá istá loptička: 1156 : 3 = 385 *zv.* 1. Vidíme, že nie je, preto v skupinách nemohli byť tri loptičky.

Ak by v skupinách mali byť štyri loptičky, počet tých, ktoré sme nevybrali, nemôže byť ani 1, ani 2, ani 3, lebo na takúto možnosť (ak by existovala) by sme prišli už skôr v riešení. Preto by to najmenej mohli byť štyri, čo by znamenalo, že v krabici bolo osem loptičiek. Avšak všetkých štvoríc spravených z ôsmich loptičiek je až 70, čo je veľa. S rastúcim počtom loptičiek rastie aj počet skupín danej veľkosti, ktoré z nich vieme spraviť. Preto už žiadne ďalšie riešenie neexistuje.

Odpoveď: V krabici môže byť buď 10 loptičiek s hodnotami 110, 112, 113, 114, 115, 116, 117, 118, 120 a 121, alebo 5 s hodnotami 54, 56, 58, 59 a 62.

Komentár: Príklad patril medzi tie ťažšie, čo sa odzrkadlilo aj na počte riešení. Najčastejšiou chybou, za čo išli body dole, bolo, že ste nedostatočne vysvetlili, ako ste našli hodnoty loptičiek.

Prémia (opravovala Hanka):

Zadanie:
Riešenie: Najlepšie riešenie, ktoré sa vám podarilo nájsť, vyžadovalo 38 preklopení. Vždy máme jedno miesto na mriežke voľné a naňho preklápame kocku. Pri opise riešenia si teda povieme len smer preklopenia kocky, keďže na dané voľné miesto vieme v danom smere preklopiť len jednu kocku. Kocky vieme preklopiť buď smerom hore (H), dole (D), vpravo (P) alebo vľavo (L). Poradie jednotlivých preklopení je nasledovné:

1. H	9. L	17. P	25. D	33. P
2. P	10. D	18. H	26. D	34. H
3. D	11. P	19. L	27. P	35. L
4. L	12. P	20. L	28. P	36. H
5. D	13. H	21. D	29. H	37. P
6. P	14. H	22. P	30. L	38. D
7. H	15. L	23. H	31. L	
8. L	16. D	24. L	32. D	

Odpoveď: Najmenší počet preklopení je 38.
Komentár: Tento príklad odovzdalo len 13 riešiteľov, z toho len piati mali správne riešenie, no a z toho len dvaja to najlepšie na 38 preklopení. Chyby ste robili väčšinou buď také hlúpe z nepozornosti, že ste sa pomýlili pri písaní poradia preklopení, prípadne ste si neporiadne neprečítali zadanie. Ďalší z vás zas neopísali poriadne postup tak, ako vyžadovalo zadanie, niektorí sa dokonca pokúšali počet preklopení vypočítať – všetci bohužiaľ neúspešne.