Vzorové riešenia 2. kola zimnej série 2013/2014

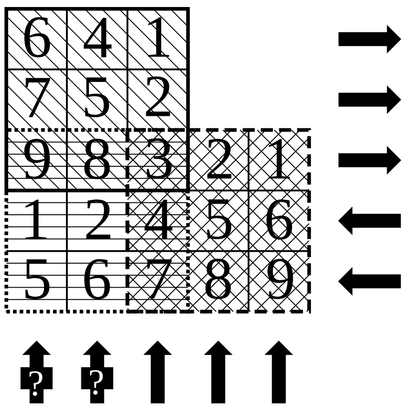
Príklad č. 1 (opravovali Kuchtík, Saška):

Zadanie:

Riešenie: Začneme spodným riadkom. Vidíme podľa šípky, že od päťky smerom doprava musia čísla postupne stúpať, a keďže máme po 9 už len 4 čísla a 4 miesta, vieme jednoznačne povedať, že do políčok doplníme zaradom 6, 7, 8, 9.

Pozrime sa na stĺpec zdola začínajúci sedmičkou. Šípka nám značí, že čísla majú smerom nahor klesať, teda nám ostávajú čísla 6, 5, 4, 3, 2, 1. Z nich sú ale čísla 6 a 5 už použité v spodnom riadku, ktorý prislúcha do toho istého štvorčeka ako nám chýbajúce políčka, a preto tam doplníme čísla 4, 3, 2, 1.

Budeme pokračovať štvorčekom napravo. Chýbajú nám v ňom čísla 1, 2, 5, 6. Šípka v hornom riadku nám hovorí, že v ňom klesajú čísla zľava doprava. Keďže tam máme doplnenú trojku, na pravo od nej nemôže byť nič iné, ako v poradí 2 a 1. Teraz nám ostáva 6 a 5. V tomto riadku nám šípka ukazuje, že čísla sprava doľava klesajú, a preto jednoducho sprava doľava dopíšeme 6 a 5. V tomto riadku ešte ostaňme. Keďže vieme, že čísla klesajú sprava doľava, ostáva nám do tohto riadku na 2 voľné miesta doplniť buď 3, 2, alebo 1. Toto doplnenie sa však týka ľavého spodného štvorčeka, a v ňom už číslo 3 máme. A teda zase, v poradí klesania, doplníme 2 a 1. Ostalo nám v ľavom dolnom štvorčeku doplniť iba 2 ľavé horné políčka, pričom nám chýbajú v tomto štvorčeku 8 a 9. Šípka doprava v tomto riadku nám značí, že čísla budú zľava doprava postupne klesať, a preto v poradí doplníme 9 a 8.



Obr. 1: Doplnený trojštvorec

Ostáva nám horný štvorček na doplnenie. Chýbajú v ňom čísla 4, 5, 6, 7. Šípka v prvom riadku zhora nám hovorí, že čísla musia doprava klesať. To isté platí aj pre druhý riadok zhora. Pre obidva stĺpce zase platí, že čísla musia zdola hore klesať. Z týchto podmienok vyplýva, že najmenšie číslo, teda 4, nesmie byť vľavo, a takisto nesmie byť dole, takže musí byť vpravo hore. Pod ňou číslo 7 byť nemôže, to by odporovalo podmienke klesania hodnoty doprava (naľavo od nej by sme už nemali čo vyššie dať). Číslo 6 tam byť takisto nemôže, lebo v danom stĺpci sa už raz nachádza. A preto pod štvorku dosadíme 5. Ostalo nám 7 a 6 a tie jednoducho doplníme tak, aby zdola hore čísla klesali podľa podmienky, a teda nižšie bude 7 a vyššie 6.

Odpoveď: Doplnený štvorček vidíme na obrázku číslo 1.

Komentár: Riešenia k príkladu, ktorý bol naozaj ľahký a šiel vám, boli prevažne pekné a správne. Stalo sa, že ste nám vysvetlili svoje kroky menej, ako a prečo ste doplnili konkrétne číslo a nie iné, a za to sme museli čo - to strhnúť.

Príklad č. 2 (opravovala Marka):

Zadanie:

Riešenie: Vypíšme si, čo by znamenalo klamstvo jednotlivých mešťanov:

- Marrot $\rightarrow$ párne čísla
- Segree $\rightarrow$ čísla ≤ 13.
- Weagull $\rightarrow 1, 4, 9, 16, 25$
- Trropsek $\rightarrow$ čísla od 1 po 31 okrem $1, 8, 27$
- Zorro $\rightarrow$ čísla > 16

Keď sa na to teraz pozrieme, vidíme, že Zorro a Segree nemôžu súčasne klamať, pretože neexistuje číslo, ktoré by bolo súčasne najviac 13 a viac ako 16. To znamená, že jeden z nich hovorí pravdu. Marrot, Weagull a Trropsek klamú.

Nech pravdu hovorí Segree. Takže sú to čísla väčšie ako 13. Podľa Weagulla to potom môžu byť len čísla 16 a 25. Avšak párne je len číslo 16 (podľa Marrot). Na Trropseka to sedí, ale podľa Zorra to 16 nemôže byť. Takže Segree klame.

Nech teda pravdu hovorí Zorro. Budú to čísla ≤ 16. Podľa Segree ≤ 13, teda od Weagullea nám zostanú len čísla $1, 4, 9$. Z nich je párne len číslo 4, ktoré vyhovuje aj Trropsekovi.

Odpoveď: Kráľ pôjde na obchádzku obchodných miest 4. decembra.

Komentár: Príklad ste zvládli na výbornú, niektorí pracne pomocou vyškrtania všetkých spoločných možností, iní prehľadnými tabuľkami. Ale takmer všetci na plný počet bodov :o)

Príklad č. 3 (opravovali Maťo, Jumaj):

Zadanie:

Riešenie: Všimnime si vetu „Šerm aj priamy útok prešlo dvanásťkrát menej žiakov, ako je počet žiakov, čo neprešli šerm.“ Zo zadania vieme, že tých, čo neprešli šerm, je 36, a preto tých, čo prešli šerm aj priamy útok, je $36/12 = 3$.

Uvedomme si, že tých, čo neprešli streľbu z luku, je $41 - 12 = 29$, pretože všetkých sa ich zúčastnilo 41. Teraz ak sa pozrieme na výrok „Streľbu z luku aj priamy útok neprešlo o šesť žiakov viac, ako je počet žiakov, čo neprešli streľbu.“ To vlastne znamená, že streľbu z luku aj priamy útok neprešlo $29 + 6 = 35$ žiakov, teda streľbu z luku aj priamy útok prešlo $41 - 35 = 6$ žiakov.

Ďalej máme výrok „Streľbu z luku aj šerm prešlo trikrát menej žiakov, ako prešlo aj streľbu z luku aj priamy útok.“ Vieme, že streľbu z luku aj priamy útok prešlo 6 žiakov, z čoho vyplýva, že streľbu z luku aj šerm prešli $6/3 = 2$ žiaci.

Ak vieme, koľko ľudí prešlo aj streľbu z luku aj šerm, môžeme podľa výroku „Priamy útok prešlo štyrikrát viac žiakov, ako je počet žiakov, čo prešli aj streľbu z luku aj šerm“ zistiť, že priamy útok prešlo $4 \cdot 2 = 8$ žiakov.

Teraz môžeme použiť výrok „Všetky tri predmety prešlo o sedem žiakov menej, ako je počet žiakov, čo prešli priamy útok.“ Z neho vyplýva, že všetky tri predmety prešlo $8 - 7 = 1$ žiak. Ešte treba dodať, že šermom prešlo $41 - 36 = 5$ žiakov.

Teraz chceme zistiť, koľko žiakov prešlo aspoň jedným predmetom. Budeme to rátať tak, že si vypočítame, koľko žiakov prešlo daným predmetom a ničím iným a tieto počty sčítame. Musíme si uvedomiť, že žiak, ktorý prešiel všetky tri predmety, musel prejsť každým predmetom, a teda je zahrnutý v celkovom počte žiakov každého z predmetov. To znamená, že ak chceme zistiť, koľko žiakov prešlo aspoň jedným predmetom, tak ak zarátame toho jedného, čo prešiel všetky predmety pre jeden z nich, už ho nebudeme rátať v ostatných dvoch. Toto isté platí aj pre žiakov, ktorí prešli iba dva predmety. Ak teda 1 žiak prešiel všetky predmety, tak keď ho necheme zarátať viackrát, nesmieme ho zarátať ani v tých, čo prešli po dva, ani v tých, čo prešli jedným predmetom. Ak teda odpočítame od počtov žiakov, čo prešli po dva predmety toho jedného, dostaneme počty žiakov, čo prešli iba tie dva predmety a nič iné. Aby sme dostali žiakov, čo prešli iba jedným predmetom, musíme od pôvodných čísel odčítať toho jedného, čo prešiel všetky predmety, a počty žiakov, čo prešli iba dva predmety také, že jeden je ten, ktorý rátame. Takže to bude vyzerať takto $1 + (2 - 1) + (3 - 1) + (6 - 1) + (12 - (6 - 1) - (2 - 1) - 1) + (5 - (3 - 1) - (2 - 1) - 1) + (8 - (6 - 1) - (3 - 1) - 1) = 15$.

Odpoveď: Aspoň jeden test prešlo 15 bojovníkov.

Komentár: Hore ukázané riešenie je len jedno z možných, možnosti sa ale celkom podobali. Veľká časť ste príklad napísali za krásnych 10 bodov, niektorí z vás však počítali počet bojovníkov, čo prešlo, ako súčet tých, čo prešli priamy útok, streľbu z luku a šerm, alebo zabudli niečo pripočítať či odpočítať, prípadne málo zdôvodnili svoj postup. Celkovo vás ale chválime.

Príklad č. 4 (opravovala gabika):

Zadanie:

Riešenie: Príklad sa dá riešiť viacerými spôsobmi, ukážeme si jeden z nich. Zadanie nám hovorí, že a aj b sú dvojciferné čísla menšie ako 50. Najväčší ciferný súčet, aký takéto číslo môže mať je $4 + 9 = 13$. Teda aby a + ciferný súčet $b = b$ + ciferný súčet $a = 53$, musia a aj b byť aspoň 40. O čísle b tiež vieme, že je prvočíslom, to nám dáva iba tri možnosti. Prvočísla medzi 40 a 50 sú 41, 43 a 47. Rozoberme tieto prípady:

- Ak $b = 41$, tak $a = 53$ – ciferný súčet $b = 53 - 4 - 1 = 48$. Skontrolujme, či sú splnené všetky podmienky zo zadania. Podľa toho, ako sme ich našli, vieme, že b je prvočíslo a a + ciferný súčet $b = 53$. $a + b = 48 + 41 = 89$ je prvočíslo. Obe čísla sú dvojciferné a menšie ako 50. b + ciferný súčet $a = 41 + 4 + 8 = 53$. Teda dvojica 48 a 41 spĺňa zadanie.
- Ak $b = 43$, tak $a = 53$ – ciferný súčet $b = 53 - 4 - 3 = 46$. Aj v tomto prípade platí, že $a + b = 46 + 43 = 89$, čo je prvočíslo. b + ciferný súčet $a = 43 + 4 + 6 = 53$. Aj dvojica 46 a 43 vyhovuje.
- Ak $b = 47$, tak $a = 53$ – ciferný súčet $b = 53 - 4 - 7 = 42$. Znova $a + b = 42 + 47 = 89$, čo je prvočíslo. b + ciferný súčet $a = 47 + 4 + 2 = 53$. Aj tretia dvojica je riešením.

Odpoveď: Myslenými číslami a a b môžu byť dvojice 48 a 41, 46 a 43 alebo 42 a 47.

Komentár: Veľa z vás príklad vyriešilo správne. Postupy boli rôzne, väčšina z nich správnych. Najčastejšou chybou bolo, že ak ste skúšali možnosti, tak ste ich neodskúšali všetky a preto ste nenašli všetky riešenia.

Príklad č. 5 (opravovali Zuzka, Maggie):

Zadanie:

Riešenie: Chceme zistiť, koľko najmenej matriošiek musí byť vidno. Začneme teda od najmenšieho možného počtu, teda od jednej. Len jedna matrioška však nemôže byť vidno, pretože už prvá podmienka vyžaduje, aby vľavo od A boli nejaké matriošky a tie by tam nemohli byť, keby boli všetky naskladané do seba a viditeľná by bola len jedna.

Je možné, že by bolo vidno dve? B musí mať vľavo od seba jednu menšiu matriošku, čo je jedine A. A však musí mať vľavo od seba ešte tri väčšie matriošky. Minimálny počet viditeľných matriošiek by musel byť tri.

Vieme dosiahnuť, aby boli viditeľné tri matriošky? Boli by tam spomínané A, B a ešte tri matriošky väčšie od A. Teraz si zoberieme G, ktoré vpravo má mať väčšiu matriošku, čo môže byť len H. Keďže H musí mať vpravo od seba ešte 2 menšie, nemôže byť úplne vpravo, a teda bude v strede, a doň sa dá A. Ďalej D má mať dve menšie vľavo, teda A, B alebo C, a keďže od B vpravo nemôže byť, tak musí byť D úplne vpravo, v ňom bude B, ale nemôže v ňom byť C. C má mať vpravo od seba 4 väčšie. Keby bolo v strede, tak by vpravo mohlo mať len D, E, F. Z toho vyplýva, že C musí byť vľavo. Od F vľavo musí byť jedno väčšie a preto musí byť v strede. Ak by bol vpravo, mal by vľavo od seba H aj G, ktoré sú väčšie a ak by bol vľavo, nemal by žiadne. Teraz je rozostavenie také, ako vidíme v tabuľke 1 (zapísanie matriošiek pod seba znamená, že sú v sebe vložené).

G	H	D
C	F	B
	A	

Tabuľka 1: Rozostavenie pri 3 viditeľných matrioškách

Aby A malo vľavo od seba 3 väčšie, zostávajúce E by muselo byť napravo. Potom by však C nemalo napravo od seba 4 väčšie. Čiže tri matriošky byť nemôžu. 4 matriošky viditeľné však byť môžu. Rozostavené môžu byť tak, ako je znázornené v tabuľke číslo 2, resp. 3.

Keďže sme dokázali, že na 4 matriošky to ide a na menej nie, tak 4 je určite najmenší počet matriošiek, ktoré môže byť vidno.

Odpoveď: Môže byť vidno najmenej 4 matriošky.

G	E	H	D
C		F	B
		A	

Tabuľka 2: Rozostavenie pri 4 viditeľných matrioškách, verzia 1

E	G	H	D
C		F	B
		A	

Tabuľka 3: Rozostavenie pri 4 viditeľných matrioškách, verzia 2

Komentár: Väčšina riešení bohužiaľ nemala zdôvodnené, prečo sú 4 najmenej a preto sa body strhávali. Zároveň treba upozorniť na pozorné čítanie zadania, lebo sa našli aj takí, ktorí si nevšimli, že matriošky sa dajú skladať do seba.

Príklad č. 6 (opravovali Tete, Bendži):

Zadanie:

Riešenie: Príklad mal niekoľko spôsobov riešenia, my si ukážeme jeden. Najprv si vypočítame vek všetkých žien. Každá žena je o 5 rokov mladšia, ako jej muž, takže musí platiť:

$$\text{ženy}+\text{muži} = 151$$
$$2\cdot\ \text{ženy}+3\cdot 5 = 151$$
$$2\cdot\ \text{ženy}+15 = 151$$
$$2\cdot\ \text{ženy} = 136$$
$$\text{ženy} = 68$$

Keďže majú ženy dokopy 68 rokov, tak muži musia mať $151 - 68 = 83$ rokov. Zo zadania vyplývajú 3 možnosti:

1. Pethor a Iwonnwe sú manželia.
2. Pestark a Iwonne sú manželia.
3. Pestark ani Pethor nie sú manželia Iwonne.

Možnosť 1: Zo zadania vieme, že Pethor a Iwonne majú spolu 48 rokov. Ak sú Pethor a Iwonne manželia, potom musí podľa zadania platiť, že Pethor je o 5 rokov starší, ako Iwonne. Takže by muselo platiť:

$$\text{Iwonne}+\text{Pethor} = 48$$
$$\text{Iwonne}+\text{Iwonne}+5 = 48$$
$$2\cdot\ \text{Iwonne} = 43$$
$$\text{Iwonne} = 21,5$$

Keď má Iwonne $21,5$, tak Pethor musí mať o 5 rokov viac, teda $26,5$. Ďalej vieme, že Pestark a Iwonne majú spolu 52 rokov. Teda Pestark má $52-21,5 = 30,5$ rokov. Teraz si vypočítame vek Pelokiho. Vieme, že všetci traja muži majú dohromady 83 rokov. Preto, ak od tohto súčtu odrátame veky Pestarka a Pethora, ktoré sme už vypočítali, dostaneme vek Pelokiho. Je to teda: $83-30,5-26,5 = 26$ rokov. Nasleduje výpočet veku Aletrren. Tá je podľa zadania o rok mladšia, ako Pethor, teda má $26,5 - 1 = 25,5$ rokov.

Ako si môžeme všimnúť, Aletrren je o 5 rokov mladšia, ako Pestark. A to, či sú manželia, sa dá overiť výpočtom veku Jannuy. Postupujeme podobne ako u mužov. Vieme celkový vek žien – 68 a veky Aletrren a Iwonne. Vek Jannuy bude teda rozdiel $68 - 25,5 - 21,5 = 21$.

Jannua je mladšia o 5 rokov len od Pelokiho, posledného muža, ktorý ešte nemá partnerku, čím sa nám potvrdilo aj tvrdenie, že Aletrren je manželka Pestarka.

Možnosť 2: Zo zadania vieme, že Pestark a Iwonne majú spolu 52 rokov. Ak sú Pestark a Iwonne manželia, potom musí platiť, že Pestark je o 5 rokov starší, ako Iwonne. Takže by musela platiť aj rovnica:

$$\text{Iwonne+Pestark} = 52$$
$$\text{Iwonne+Iwonne+5} = 52$$
$$2\cdot \text{Iwonne} = 47$$
$$\text{Iwonne} = 23{,}5$$

Keď má Iwonne $23,5$ rokov, potom Pestark musí mať o 5 rokov viac, teda $28,5$ rokov. Ďalej zo zadania vieme, že Pethor a Iwonne majú spolu 48 rokov. Teda Pethor má $48-23,5=24,5$ rokov. Pethorova manželka by mala mať $19,5$ roka $(24,5-5=19,5)$.

Teraz si vypočítame vek Pelokiho. Máme vek dvoch mužov a celkový súčet vekov 83, teda výsledný Pelokiho vek bude $83-28,5-24,5=30$. Jeho manželka by musela mať 25 rokov $(30-5=25)$. Aletrren je podľa zadania o rok mladšia, ako Pethor, teda má $24,5-1=23,5$ rokov. Lenže ako si môžeme všimnúť, Aletrren nemá manžela, lebo Peloki by mal mať 25 ročnú a Pethor $19,5$ ročnú, no Aletrren má $23,5$. Preto táto možnosť nemá riešenie.

Možnosť 3: Keďže Iwonne nie je manželkou ani Pethora ani Pestarka, tak musí byť manželkou Pelokiho. Pethor potom môže mať za manželku buď Jannuu alebo Aletrra, ale podľa zadania Aletrra je len o rok mladšia od Pethora, a nie o 5. Teda Pethor má za manželku Jannuu a Pestark ma za manželku Aletrren.

Zo zadania ďalej vyplýva, že veky Iwonne a Pethora majú súčet vekov 48 a Pethor má o rok viac, ako Aletrren, teda súčet vekov Iwonne a Aletrren je 47. Pretože súčet vekov žien je 68, vieme z toho vypočítať vek Jannuy pomocou rozdielu $68-47=21$. Jej manžel Pethor má potom o 5 rokov viac, čiže 26. A teraz už zo súčtu vekov Iwonne a Pethora rátame vek Iwonne $(48-26=22)$ a jej manžel Peloki má o 5 rokov viac, čiže 27 rokov.

A nakoniec zo súčtu veku mužov vypočítame vek Pestarka: $83-27-26=30$. Jeho manželka Aletrren má potom znova o 5 rokov menej, teda 25.

Odpoveď: Vysledky sú dva:

1. Pethor $(26,5)$ a Iwonne $(21,5)$, Peloki (26) a Jannua (21), Pestark $(30,5)$ a Aletrren $(25,5)$
2. Pethor (26) a Jannua (21), Peloki (27) a Iwonne (22), Pestark(30) a Aletrren (25)

Komentár: Príklad sme uznali aj ak ste rátali len v množine prirodzených čísel vďaka veľkému počtu riešiteľov, ktorí riešili tento príklad práve týmto spôsobom. No nabúduce sa to už nemusí stať, tak si dávajte pozor pri čítaní zadania.

Príklad č. 7 (opravovali Hanka, Muro):

Zadanie:

Riešenie: Ako prvé si označme pôvodné číslo $\overline{abc}$. Pozrime sa, aké čísla sú vhodné na miesto b. Vieme, že číslo je trojciferné, a teda ak ho obrátime, tak na mieste stoviek bude c a na mieste jednotiek bude a. Keď toto obrátené číslo pričítame k pôvodnému, tak ak $b+b$ (číslo na mieste desiatok sa otočením nemení) bude menej, ako 10, tak na mieste stoviek aj jednotiek tohto súčtu bude $a+c$ a toto číslo bude palindrómom. Preto $b+b$ musí byť bezpodmienečne 10 a viac, teda b musí byť $5,6,7,8$ alebo 9. To je síce pekné, ale toto platí aj pri druhom súčte, keďže číslo má byť stále trojciferné. Teda $b+b$ musí byť 10 a viac a končiť na aspoň 5, teda 15 a viac. A to vyhovuje len pre $b=8$ alebo $b=9$.

Teraz sa pozrime na miesta a a c. Vieme, že číslo po dvoch súčtoch musí byť stále trojciferné, takže číslo na mieste stoviek nesmie presiahnuť 10. Číslo na mieste stoviek je vlastne $a+c+1$, pretože už vieme, že $b+b$ musí byť viac, ako 10, a teda sa nám okrem čísel $a+c$ pričíta ešte jednotka zo súčtu čísel na mieste desiatok. Vieme teda, že $a+c+1<10$, ale toto je ešte iba po prvom sčítaní. Pozrime sa teda, ako bude vyzerať naše číslo po prvom súčte.

Na mieste jednotiek je $a+c$, na mieste desiatok je 6 (ak $b=8$) alebo 8 (ak $b=9$) a na mieste stoviek je $a+c+1$. Ak opäť číslo obrátime a sčítame, potom na mieste stoviek bude $a+c+1+a+c+1$. A tým pádom vieme, že $2a+2c+2<10$, z čoho vidíme, že $a+c<4$. Pôvodné číslo pred otočením aj po otočení cifier musí byť trojciferné, teda a ani c nesmú byť 0. Navyše číslo nesmie byť palindrómom $(a\neq c)$, preto aby nerovnosť $a+c<4$ platila, jedno bude 1 a druhé 2. Zo zadania číslo $\overline{cba}$ musí byť väčšie, ako $\overline{abc}$, teda $c>a$, čiže $a=1$ a $c=2$.

Číslo $\overline{abc}$ je teda 182 alebo 192. Máme už iba 2 možnosti a teda vyskúšať, ktorá je správna, nám nijako neublíži.

$$182 + 281 = 463, 463 + 364 = 827, 827 + 728 = 1555, 1555 + 5551 = 7106$$

7106 však nie je palindrómom a teda táto možnosť je nesprávna.

$$192 + 291 = 483, 483 + 384 = 867, 867 + 768 = 1635, 1635 + 5361 = 6996$$

Hurá, vyšiel nám palindróm a teda máme jediné správne riešenie.
Odpoveď: Pri svojom druhom pokuse Ariadne začínala číslom 192.
Komentár: Väčšina z vás mala príklad správne, mnohí ste body strácali len preto, že nečítate poriadne zadanie, prípadne robíte chyby v sčítavaní. Na takéto veci si treba dať pozor, lebo aj keď uvažujete správne, môžete mať kvôli takýmto hlúpostiam riešenie zle.

Príklad č. 8 (opravoval Zajo):

Zadanie:
Riešenie: Počas riešenia nás budú zaujímať len niektoré body, lebo ostatné nepotrebujeme a nezáleží nám, akej budú farby. Tiež je potrebné vedieť, že obsah trojuholníka vypočítame ako polovicu súčinu jednej z jeho strán a výšky na danú stranu.

Ak by boli tri alebo štyri z vrcholov štvorca rovnakej farby, tvorili by trojuholník s obsahom $50\,\mathrm{m}^2$ a príklad je hotový. Ak nie, tak sú práve dva body jednej a práve dva body druhej farby. Vznikajú nám dve možnosti a to že body rovnakej farby spája strana, alebo uhlopriečka.

Ak ich spája strana, označme si ju AB. Protiľahlú stranu, ktorej okrajové body sú tým pádom inej farby, ako A a B, označme CD, tak, aby BC a AD boli zvyšné dve strany štvorca. Zoberme si stred strany AD a označme ho S. Ak je rovnakej farby, ako A a B, tak trojuholník ABS má obsah $25\,\mathrm{m}^2$. Ak nie, tak je farby ako C a D, a trojuholník CDS má obsah $25\,\mathrm{m}^2$ (obsah je taký, lebo výška bola vždy 5, do polovice strany AD, zatiaľ čo strana vždy 10).

Ak ich spája uhlopriečka štvorca, označme ju AC, a ostatné dva vrcholy štvorca B a D, nech má strany AB, BC, CD a AD. Označme opäť stred strany AD písmenom S. Ak je S farby ako A a C, tak trojuholník ACS má obsah $25\,\mathrm{m}^2$. Ak je farby ako B a D, tak trojuholník BDS má obsah $25\,\mathrm{m}^2$ (obsah je taký, lebo výška bola vždy 10, až k protiľahlej strane BC, zatiaľ čo strana vždy 5, od vrcholu po S).
Odpoveď: Na obvode sa vždy dajú nájsť tri body tvoriace trojuholník daných vlastností.
Komentár: Väčšina mala príklad správne, ostatní ste na to len zle išli.

Príklad č. 9 (opravoval Peťo):

Zadanie:
Riešenie: V prvej etape sme si mali zvoliť postupnosť znakov (ďalej len Z) a hláv (H) tak, aby sme mali väčšiu šancu na výhru, akú má postupnosť štyroch hláv ($HHHH$). Každá postupnosť musí mať svoj začiatok a inak to nie je ani pri $HHHH$. Tá môže buď začať hneď od začiatku alebo po nejakom Z. Z toho vidno, že ak si zvolíme postupnosť $ZHHH$, tak nad $HHHH$ vyhráme vždy, okrem prípadu, kedy $HHHH$ padne rovno na začiatku. A keďže je 16 rôznych postupností, ktoré môžu na začiatku padnúť, ale len jedna z nich je $HHHH$, tak máme šancu 15/16 (15 nám vyhovujúcich postupností, zo 16 možných) na výhru. To, že nejaká postupnosť má väčšiu šancu na výhru ako iná, budeme značiť symbolom $>$, teda v našom prípade $ZHHH > HHHH$.

Z úvah použitých pri hľadaní našej postupnosti v prvej etape sme mohli nadobudnúť dojem, že postupnosti, ktoré sa dajú hodiť tesne pred postupnosťou, proti ktorej hráme, majú väčšiu šancu na výhru, ako daná postupnosť. Poďme to vyskúšať aj pri druhej etape. Postupnosti, ktoré sa môžu objaviť tesne pred $HHHZ$, sú $HHHH$ a $ZHHH$. Vyššie sme ukázali, že $ZHHH > HHHH$, tak sa zameriame na porovnanie $ZHHH$ a $HHHZ$. Na to, aby sa mohla objaviť postupnosť $HHHZ$, musí sa najskôr objaviť HHH. Tá sa môže objaviť buď hneď od začiatku hádzania alebo po nejakom Z. Šanca, že sa objaví na začiatku, a teda že $HHHZ$ vyhrá nad $ZHHH$, je 1/8 (jedna postupnosť HHH z ôsmich možných). Pri zvyšných siedmich postupnostiach sa určite objaví až po nejakom Z a preto pri nich vyhrá $ZHHH$. To bude naša postupnosť v druhej etape.

Porovnávať šance na výhru takýchto rozdielnych postupností priamo je náročné, preto sa pokúsime nájsť nejakú ďalšiu postupnosť, ktorá ich spája. Tú nájdeme tak, že sa pozrieme na postupnosti, ktoré sa môžu vyskytnúť pred niektorou z dvojice $ZZHH$ a $HZZZ$. V tabuľke 4 sú vypísané postupnosti, ktoré sa môžu objaviť pred $ZZHH$ jeden alebo dva hody dozadu.

teraz	**ZZHH**			
jeden hod dozadu	HZZH		ZZZH	
dva hody dozadu	HHZZ	ZHZZ	**HZZZ**	ZZZZ

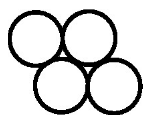
Tabuľka 4: Predchádzajúce postupnosti

Vyššie sme už ukázali, že $ZHHH > HHHZ$, a keďže obe strany mince majú rovnakú šancu padnúť, tak platí aj $HZZZ > ZZZH$. Ak sa nám podarí ukázať, že $ZZZH > ZZHH$, z čoho budeme vedieť, že platí $HZZZ > ZZHH$, budeme si vedieť vybrať postupnosť pre tretiu etapu. Tak poďme na to. Obe postupnosti ($ZZHH$ aj $ZZZH$) začínajú ZZ, preto nám stačí zistiť, ktorá z nich má väčšiu šancu sa vyskytnúť, keď už padlo ZZ. Sú štyri možnosti, aká dvojica môže po tom padnúť: HH, HZ, ZH a ZZ. Ak padne HH, vyhrá $ZZHH$, ak HZ, nevyhrá nikto, ak ZH, vyhrá $ZZZH$ a ak ZZ, tak tiež vyhrá $ZZZH$ (rozmyslite si prečo). Tým sme ukázali, že platí $HZZZ > ZZHH$, teda pre tretiu etapu si vyberieme postupnosť $HZZZ$.
Odpoveď: Pre prvú a druhú etapu si zvolíme postupnosť $ZHHH$ a pre tretiu $HZZZ$. Keďže sme si v každej etape zvolili postupnosť, ktorá má väčšiu šancu na výhru, ako tá, proti ktorej hráme, tak aj na výhru celej hry máme väčšiu šancu.
Komentár: Príklad bol z tých ťažších, čo sa odzrkadlilo aj na počte riešení. Najčastejšia chyba, ktorá sa vyskytla, bola to, že ste z toho, že každá postupnosť má rovnakú šancu padnúť v štyroch hodoch, usúdili, že je jedno, akú postupnosť si zvolíte. To by bolo v poriadku, keby sa zadanie pýtalo, ktorá postupnosť má väčšiu šancu byť hodená v nejakých určitých štyroch hodoch (napr. v 42.–45.). Ale zadanie chcelo, aby ste vybrali postupnosť, ktorá má väčšiu šancu sa objaviť skôr ako zadané postupnosti.

Prémia (opravovali Halucinka, Laco):

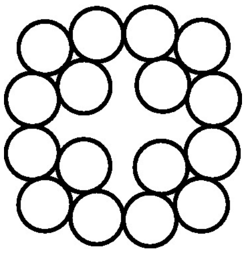
Zadanie:
Riešenie: Nedovolíme si neurobiť na úvod malú reklamu. Jedno skvelé sychravé ráno sme s Hankou a Zuzkou nahrali Riešky-song, našu rieškarsku hymnu! A v eufórii z dobre vykonanej práce sme sa rozhodli nielen spomínať na všetky kraviny, čo sme riešiteľom popísali za našich aktívnych vedúcovských čias, ale rozhodli sme sa to aj znova spraviť! Teda opravovať, kraviny sme samozrejme nepísali (len kreslili).

Väčšine z vás stačilo na vyriešenie úlohy 16 mincí. Riešenie vidíte na obrázku 3. Ak by sme však chceli opísať postup, akým sa riešenie dalo nájsť, tak väčšine pomohlo si utvoriť najprv menšie mincové útvary zo štyroch mincí, ako vidíte na obrázku 2.

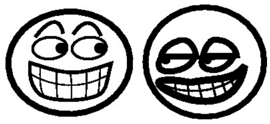


Obr. 2: Mince zoskupené do mincového útvaru

Tieto mincové útvary následne spojíme do jedného veľkého kolieska pozostávajúceho zo štyroch takýchto mincových útvarov, ako vidíte na obrázku 3. Pre rýpavejších podotkneme, že tri mincové jednotky nestačili, pretože by sa dotýkali mince v strede a teda tri mince by sa dotýkali viac ako troch ďalších.
Odpoveď: Vám aj nám sa podarilo zadanie splniť s najmenej 16 mincami.
Komentár: Ako sme veľmi rýchlo zistili, tak 82.05% z tých, čo ste prémiu poslali, ste to mali najlepšie, pár z vás skoro najlepšie, ale každý mal zaujímavú myšlienku. Kreslili ste skvelé obrázky a my sme pri pohľade



Obr. 3: Štyri spojené mincové útvary



Obr. 4: Halucinkin a Lacov reprezentatívny smajlík.

na ne usúdili, že je to jasný hrací plánik, takže sa nezľaknite, ak ste svedkami toho, že na svojom riešení nájdete bitku Halucinkiných euforických smajlíkov proti Lacovým flegmatickým smajlíkom :)