Vzorové riešenia 2. kola letnej série 2013/2014

Príklad č. 1 (opravoval MaťoPaťo):

Zadanie:

Riešenie: Ako prvé si zistíme, aké všetky cifry môžu byť na prvom a poslednom mieste. Vieme, že 0 tam byť nemôže, takže najmenšie možné je 1. Najväčšie možné bude 4, pretože pre číslo 5 a väčšie by bol súčet na okrajových číslach 10 a viac, a teda by už nemohla platiť druhá podmienka. Teraz nájdeme pre všetky možné okrajové čísla od 1 do 4 stredné čísla tak, aby bol súčet všetkých cifier 10 a druhá cifra bola menšia, ako tretia.

Začneme cifrou 1. Súčet cifier v strede musí byť 8, takže možnosti sú: 1081, 1171, 1261, 1351, ale 1441 už nemôže byť PIN kód, pretože sa 2. a 3. cifra sa rovnajú.

Pokračujeme s dvojkou na okrajoch. Súčet cifier v strede musí byť 6: 2062, 2152, 2242, ale 2332 už nemôže byť PIN kód, pretože 2. a 3. cifra sa rovnajú.

Pokračujeme s trojkou na okrajoch. Súčet cifier v strede musí byť 4: 3043, 3133, ale 3223 už nemôže byť PIN kód, pretože 2. a 3. cifra sa rovnajú.

Pokračujeme so štvorkou na okrajoch. Súčet cifier v strede musí byť 2: 4024, ale 4114 už nemôže byť PIN kód, pretože 2. a 3. cifra sa rovnajú.

Toto sú teda všetky možnosti PIN kódu a je ich 10.

Odpoveď: Puk potrebuje maximálne 10 pokusov na uhádnutie PIN kódu.

Komentár: Príklad ste takmer všetci vyriešili bezchybne, takže vás chválim.

Príklad č. 2 (opravoval Luti):

Zadanie:

Riešenie: Ahojte :) Ako začať, dlho som to nerobil. Najprv by som pochválil skvelý postreh s úsečkami, ale predpokladali sme priamky, nevadí. Takže máme priamky, stíhate? :)

Teraz sa musím pozrieť, koľko je najmenej častí, ktoré môžeme dostať. To dostávame v prípade, ak sa čiary nepretnú, teda majú 0 priesečníkov. Dôvody sú jednoduché. Každá čiara rozdelí časť štvorca na 2 časti, takže pokiaľ čiara nepretne inú čiaru, štvorec sa rozdelí na o jednu časť viac. Teda ak sme najprv mali celý štvorec, po jednej čiare máme 2 časti, po druhej čiare, ktorá nepretla prvú, máme $2 + 1$ časti a nakoniec po tretej čiare nepretínajúcej predchádzajúce máme dokopy 4 časti.

Ďalej sa pozrime na najväčší počet častí, ktoré vieme dostať. Konkrétne na maximálny počet priesečníkov, ktoré môžu 3 čiary vytvoriť. Sú to práve 3 priesečníky. Čo nám to ale hovorí? Prvá čiara nám rozdelí štvorec na 2 časti. Druhá nám ho vie rozdeliť na 4 časti, ak pretne prvú čiaru. Tretia, a teda posledná čiara, nám vie prejsť cez maximálne 3 časti zo štvorca a tým pádom ich rozdeliť, teda z 3 pretnutých častí vznikne 6. Spolu s jednou, ktorá pretnutá nebola, je dokopy 7 častí.

Teraz nám ostáva určiť, ako dostaneme 5 a 6 častí. Pôjdeme podľa počtu priesečníkov. Môžeme ich mať buď 0, 1, 2 alebo 3. Možnosti 0 a 3 sme už prebrali. Nech je teraz priesečník 1. Vtedy sa nám pretnú ľubovolné 2 čiary a tretia nepretne žiadnu z nich. Dostaneme tak 5 častí, lebo čiara, ktorá nepretla žiadnú inú, nám rozdelí štvorec na 2 časti. Druhá čiara tiež ešte nepretne prvú. Máme 3 časti. Posledná tretia čiara však už pretne jednu z čiar a tým pádom rozdelí až dve časti o ďalšie 2. Dokopy máme $1 + 1 + 1 + 2 = 5$. Podobný postup nastáva pre 2 priesečníky, teda prvá čiara rozdelí štvorec na dve časti, teda pridá 1 časť, ďalšia ju pretne a rozdelí obidve, teda pridá 2. a ďalšia pretne práve jednu z čiar a rozdelí dve časti, teda pridá 2. $1 + 1 + 2 + 2 = 6$. Vznikne 6 častí.

Odpoveď: Na vyfarbenie môžeme použiť $4, 5, 6$ alebo 7 rôznych farieb.

Komentár: Takmer všetci ste úspešne našli správne riešenie. Gratulujem. Body ste stratili vtedy, keď ste nezdôvodnili, prečo sa nedá použiť viac, respektíve menej farieb.

Príklad č. 3 (opravovala Tinka):

Zadanie:

Riešenie: Žabka v rybníku si skáče po kameňoch 1 až 7 podľa určitých pravidiel. Všetky pravidlá sa odvíjajú buď od miesta, kde práve sedí, alebo dokonca od miesta, kde sedela pred minútou. Najzložitejšou je podmienka, ktorá do jej rozhodovania zahŕňa aj čas. Tá káže žabe, aby z kameňa číslo 5 skočila na 6, ak na ňom sedí v minúte nekončiacej na cifru 0 alebo 5 a v opačnom prípade, aby sa ďalšiu minútu zdržala na kameni 5 a potom skočila na 3. Táto podmienka sa dá interpretovať ako deliteľnosť danej minúty piatimi so zvyškom alebo bezo zvyšku.

Chceme zistiť, kde bude žabka sedieť v 123. minúte. Mohli by sme si to vypísať, ale na to sme príliš leniví, takže si to skrátime radšej uvažovaním. V prvej minúte je na kameni 1. Odtiaľ vždy skočí na kameň 5. Keďže 2. minúta nie je deliteľná piatimi, tak sa pohne na kameň 6. Ďalej skočí na 2, odtiaľ na 3, lebo prišla zo šestky. Z kameňa 3 ide vždy na kameň číslo 4 a odtiaľ vždy na kameň 2. Z dvojky skočí na 7, lebo na 2 neprišla z kameňa 6. Zatiaľ je jej cesta: $1- > 5- > 6- > 2- > 3- > 4- > 2- > 7$. V ôsmej minúte teda sedí na kameni 7.

Teraz sa vráti na prvý kameň a v ďalšej minúte, desiatej, preskočí na kameň 5. Keďže táto minúta je deliteľná piatimi, tak tu pobudne o minútu dlhšie a potom ide na trojku. Odtiaľ podobne ako minule na $4, 2$ a 7. Teda pokračovanie je: $\ldots - > 1- > 5- > 5- > 3- > 4- > 2- > 7$. Tu sa nachádza v 15. minúte.

Keď si takto vypíšeme ďalších pár skokov, hneď si všimneme, že ide o tú istú cestu, ktorou prešla za prvých 15 minút. Teda predpokladajme, že ide o cyklus skokov: $1- > 5- > 6- > 2- > 3- > 4- > 2- > 7- > 1- > 5- > 5- > 3- > 4- > 2- > 7$, ktorý sa opakuje. Ak osemkrát zopakuje túto periódu, tak v 120. minúte bude sedieť na kameni 7. V 121. bude na 1, v 122. na 5 a nakoniec v 123. na 6.

Ostáva nám iba odôvodniť náš predpoklad. Všetky čísla sa opakujú stále rovnako, jediný problém, ktorý môže nastať, je s časovými okamihmi, kedy žaba sedí na kameni 5. Ak sa na to ale lepšie pozrieme, v prvej perióde skočí žaba na kameň 5 na začiatku 2. a 10. minúty, teda prvá nie je deliteľná piatimi a druhá je. Ak k druhej minúte pripočítame ľubovoľný násobok periódy 15 minút, tak táto minúta bude stále končiť buď na 2, alebo na 7, teda nikdy nie na číslo deliteľné piatimi. Po druhé, ak k desiatej minúte pripočítame ľubovoľný násobok 15, dostaneme zakaždým číslo končiace 0 alebo 5. Nakoľko sa zachová aj to, že žaba v každej perióde sedí najprv na kameni 5 v čase, ktorý nie je deliteľný piatimi, a potom na tom istom kameni v čas, ktorý je deliteľný piatimi, nič už neprekáža našej teórii o 15-minútovej perióde.

Odpoveď: V 123. minúte sedí žaba na kameni číslo 6.

Komentár: Príklad ste takmer všetci zvládli výborne. Jediné, čo chýbalo k dokonalosti väčšiny riešení, bolo vysvetlenie, prečo sa cyklus skákania po 15 minútach opakuje.

Príklad č. 4 (opravovala Gabika):

Zadanie:

Riešenie: Na mape máme 5 letovísk. Ľubovoľné z nich môžeme spojiť s najviac štyrmi ostatnými letoviskami. Počty úsečiek, ktoré môžu vychádzať z ľubovoľného bodu (letoviska), sú teda $0, 1, 2, 3$ a 4. To je presne päť možností. Požadujeme, aby z každého bodu vychádzal iný počet úsečiek, teda musíme použiť všetky tieto počty. Znamená to, že musíme mať letovisko, z ktorého vychádzajú 4 úsečky a zároveň aj letovisko, z ktorého vychádza 0 úsečiek. Tieto dve informácie si ale navzájom odporujú. Letovisko, z ktorého vychádzajú 4 úsečky, musí byť spojené s každým z ostatných letovísk. To znamená, že nemôže existovať letovisko, ktoré nie je spojené so žiadnym ďalším. Pukovi sa teda nemôže podariť splniť tieto podmienky.

Pozrime sa na prípad, keď pridáme 3 letoviská, teda budeme mať spolu 8 letovísk. Tento prípad je rovnaký, ako predchádzajúci. Z jedného letoviska môže vychádzať $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ alebo 7 úsečiek. To je osem rôznych možností, potrebujeme teda všetky. Letovisko, z ktorého vychádza 7 úsečiek, musí byť spojené so všetkými ostatnými na mape. Nemôže teda zároveň existovať letovisko, z ktorého vychádza 0 úsečiek.

Odpoveď: Pukovi sa to ani v jednom prípade nemôže podariť.

Komentár: Príklad ste skoro všetci zvládli veľmi pekne, za čo vám patrí pochvala. Mnohí z vás si všimli aj to, že Pukovi by sa nepodarilo splniť tieto podmienky pri ľubovoľnom počte letovísk.

Príklad č. 5 (opravovala Zuzka):

Zadanie:

Riešenie: Pre prehľadné riešenie je dobré robiť si tabuľku. Ako prvé si do tabuľky zapíšeme fakty, ktoré sú zo zadania celkom jasné. Z 1. výroku vieme, že tretia osoba v rade pozerá Zúfalé manželky, následne z 8. výroku vieme, že táto osoba cestuje do Afriky a ďalej z 4. výroku vieme, že druhá v rade je Rachael. Z

2. výroku vieme, že Bob je prvý v rade. Zo 14. výroku vieme, že štvrtý v rade cestuje do Anglicka, a z 9. výroku vieme, že 14-ročná osoba je piata v rade. Zatiaľ vyzerá tabuľka ako tabuľka 1.

poradie	1.	2.	3.	4.	5.
meno	Bob	Rachael			
účes					
vek					14
seriál			Zúfalé manželky		
býva v					
cestuje do			Afrika	Anglicko	

Tabuľka 1: Ľudia v rade na lístky 1

Podľa 17. výroku má afro účes prvá alebo tretia osoba, a teda podľa 16. výroku pozerá Priateľov druhá alebo štvrtá osoba. Z 11. a 19. výroku vyplýva, že osoba pozerajúca Priateľov má dlhé vlasy a cestuje do Talianska. Keďže o štvrtej osobe už vieme, že cestuje do Anglicka, tak práve druhá osoba musí pozerať Priateľov, mať dlhé vlasy a cestovať do Talianska. Z 15. výroku vieme, že štvrtá osoba pozeráva NCIS.

Zo seriálov nám zostali Simpsonovci a Kosti na prvú a piatu osobu. Podľa 10. výroku pozeráva Kosti Amy a preto osoba pozerávajúca Kosti nemôže byť prvá, lebo prvý je Bob. Piata osoba bude teda Amy pozerajúca Kosti. Bob pozerá Simpsonovcov. Z 3. výroku vieme, že druhá osoba býva v mládežníckom hosteli a následne z 18. výroku vieme, že táto osoba je 21-ročná. Teraz vyzerá tabuľka ako tabuľka 2.

poradie	1.	2.	3.	4.	5.
meno	Bob	Rachael			Amy
účes		dlhé vlasy			
vek		21			14
seriál	Simpsonovci	Priatelia	Zúfalé manželky	NCIS	Kosti
býva v		mládežnícky hostel			
cestuje do		Taliansko	Afrika	Anglicko	

Tabuľka 2: Ľudia v rade na lístky 2

Z 5. a 12. výroku vieme, že Keeley má 52 rokov a býva v dedine. Z 6. vieme, že Eilish nie je holohlavá, preto podľa 13. výroku nemôže mať 46 rokov a teda má 81. 46 rokov teda musí mať Bob a je holohlavý.

Ak by Eilish bola 4. osoba, neplatil by 22. výrok, a teda Eilish musí byť tretia. Rovné vlasy podľa 22. výroku musí mať Amy a podľa 7 výroku cestuje do Austrálie. Z destinácií zostáva Francúzsko, do ktorého cestuje Bob. Z mien zostáva Keeley, ktorá je teda štvrtá. Ako sme už zistili predtým, Keeley má 52 rokov a býva na dedine, Eilish má 81 rokov a býva na farme. Podľa 21. výroku vieme, že v mestečku býva Bob, a preto v meste býva zostávajúca Amy. Afro účes podľa 17. výroku musí mať Eilish, teda Keeley má kučeravé vlasy.

Odpoveď: Výsledky sú zapísané v tabuľke 3.

poradie	1.	2.	3.	4.	5.
meno	Bob	Rachael	Eilish	Keeley	Amy
účes	holohlavý	dlhé vlasy	afro	kučeravé vlasy	rovné vlasy
vek	46	21	81	52	14
seriál	Simpsonovci	Priatelia	Zúfalé manželky	NCIS	Kosti
býva v	mestečko	mládežnícky hostel	farma	dedina	mesto
cestuje do	Francúzsko	Taliansko	Afrika	Anglicko	Austrália

Tabuľka 3: Ľudia v rade na lístky 3

Komentár: S príkladmi, ako je tento, ste sa už možno stretli, hovorí sa im zebry alebo einsteinovky. Skoro všetci ste mali správny výsledok, ten sa dá veľmi jednoducho skontrolovať. Nie všetci ste však mali vysvetlený celý postup. Nestačí totiž len povedať, že ste postupne logicky doplňovali do tabuľky, tie kroky niekedy nie sú také jednoduché. Tiež keď neviete, či na jednom mieste v tabuľke bude vec A alebo B a skúsite tam doplniť A, treba odskúšať aj doplnenie B.

Príklad č. 6 (opravovali Kuchtík, Lucy, Muro):

Zadanie:

Riešenie: Skúsme sa na príklad pozrieť inak, napríklad odzadu. Vieme, že ak odpíšeme poslednú jednotku, resp. dvojku, tak sme vyhrali. Označme si teda číslo 1 a 2 ako vyhrávajúce. Vyhrávajúce číslo bude také, z ktorého môžem buď vyhrať, alebo posunúť súperovi prehrávajúce číslo. Naopak, prehrávajúce číslo bude také, z ktorého môžem posunúť súperovi iba vyhrávajúce číslo. Budeme teraz postupne označovať nepárne čísla od 1 do 15 ako vyhrávajúce alebo prehrávajúce. Iba nepárne preto, lebo párne musíme vždy pred ťahom deliť, pokiaľ nám neostane nepárne, teda v každom ťahu budeme určite zmenšovať nepárne číslo.

- 1 už máme. Poďme na 3. Či z trojky uberieme 1 alebo 2, vždy nám vyjde vyhrávajúce číslo 1, 3 teda bude číslo prehrávajúce.
- Z 5 môžeme odobrať 2 a súperovi posunúť 3, čo je číslo prehrávajúce, 5 preto bude vyhrávajúce.
- Zo 7 môžeme odobrať 1 a tak posunúť súperovi prehrávajúcu trojku ($7 - 1 = 6$, $6/2 = 3$), 7 bude potom vyhrávajúce. Alfonz teda vie určite vyhrať, a to tak, že Pukovi posunie 3. Ale to je iba prvá časť príkladu, poďme ďalej.
- Ak z 9 odoberieme 1, posunieme výhernú 1 ($9 - 1 = 8$, $8/2 = 4$, $4/2 = 2$, $2/2 = 1$) a ak odoberieme 2, tak posunieme vyhrávajúcu 7, takže 9 je prehrávajúce.
- Z 11 môžeme odobrať 2 a súperovi posunúť 9, čo je číslo prehrávajúce, preto 11 bude vyhrávajúce.
- Z 13 môžeme odobrať 1 a tak súperovi posunúť prehrávajúcu trojku ($13 - 1 = 12$, $12/2 = 6$, $6/2 = 3$), teda 13 bude vyhrávajúce.
- Ak z 15 odoberieme 1, posunieme výhernú 7 ($15 - 1 = 14$, $14/2 = 7$), a ak odoberieme 2, tak posunieme vyhrávajúcu 13, takže 15 je prehrávajúce. To znamená, že Alfonz nechce ísť prvý, pretože by musel potom Pukovi posunúť vyhrávajúce 13 alebo 7.

Odpoveď: Pri 7 by mal Alfonz odobrať 1 a potom už len vyhrať. Pri 15 by mal Alfonz nechať ísť prvého Puka a potom mu posúvať vždy prehrávajúce čísla.

Komentár: Príklad väčšina z vás hravo zvládla, hoci nie takýmto spôsobom. Iba zopár chýb z nepozornosti, na ktoré si treba dávať pozor.

Príklad č. 7 (opravovali Zajo, Jumaj, Maggie):

Zadanie:

Riešenie: Trojuholníková sieť sa skladá z veľa malých rovnostranných trojuholníčkov, teda aj náš veľký trojuholník je z nich zostavený. To znamená, že musí byť tiež rovnostranný a zároveň, keďže každý takýto trojuholníček je zložený z 3 zápaliek, 99 zápaliek zo zadania predstavuje 33 trojuholníčkov.

Na zväčšenie strany veľkého trojuholníka o 1 musíme vždy pridať o 1 väčší počet trojuholníčkov, ako je strana trojuholníka, ku ktorému pridávame. Je to preto, že keď si veľký trojuholník rozložíme na stĺpce (napríklad trojuholník so stranou 1 má jeden stĺpec s 1 trojuholníkom, trojuholník so stranou 2 má 2 stĺpce, jeden stĺpec s 1 trojuholníkom a druhý s 2, tretí má naviac ešte jeden, dokopy teda 3, atď.), každý trojuholník so stranou o 1 väčšou má o jeden stĺpec viac, pričom na ňom má o 1 trojuholník viac.

Z toho už vidíme prvé riešenie, ak chceme zväčšiť stranu trojuholníka len o 1 (pridáme 1 stĺpec), aby sme na to minuli 33 trojuholníkov, musí mať prvotný trojuholník stranu 32. Keďže však môžeme pridať aj viac stĺpcov, riešení bude viac. Ak chceme pridať dva stĺpce, tak 33 trojuholníkov musíme rozložiť do takých dvoch stĺpcov, aby jeden z nich mal o jeden trojuholníček viac, ako druhý. Takže hľadáme dve po sebe idúce čísla, ktorých súčet je 33. Označme menšie z nich n, potom $n + n + 1 = 2 \cdot n + 1 = 33$, teda $n = 16$. 16 je strana o 1 väčšieho trojuholníka, prvotný trojuholník má preto stranu 15.

Poďme ďalej, už to bude podobné. Ak chceme pridať tri stĺpce, tak 33 musí byť súčet troch po sebe idúcich čísel, teda pri rovnakom označení, ako minule: $n+n+1+n+2 = 3 \cdot n+3 = 33$, teda $n = 10$. Strana prvotného trojuholníka bude o 1 menšia, takže ďalšie riešenie je 9. Pri štyroch stĺpcoch má byť obdobne

$n+n+1+n+2+n+3 = 4 \cdot n+6 = 33$. V tomto prípade n nevychádza celé číslo a keďže naše trojuholníky môžu mať stranu len z celého počtu zápaliek, táto možnosť je nesprávna. Pri piatich stĺpcoch je naša rovnica $n+n+1+n+2+n+3+n+4 = 5 \cdot n+10 = 33$. Tu n znova nevychádza celé číslo a preto je táto možnosť tiež nesprávna. Pridávanie šiestich stĺpcov dáva rovnicu $6 \cdot n + 15 = 33$, n vychádza pekne $n = 3$, teda prvotný trojuholník má stranu 2. Sedem stĺpcov dáva $7 \cdot n + 21 = 33$. Znova je n necelé a ďalšie riešenie nemáme. Osem stĺpcov dáva $8 \cdot n + 28 = 33$. Tu už vychádza n menšie ako 1, strana prvotného trojuholníka by mala byť preto záporná, takže prvotný trojuholník by musel byť zložený zo záporného počtu zápaliek, čo nejde.

Určite ste si všimli, že s rastúcim počtom pridaných stĺpcov sa hodnota n zmenšuje. Je to preto, že ak sa nám podarí k trojuholníku s nejakou dĺžkou strany pridať 99 zápaliek v niekoľkých stĺpcoch, na pridanie viacerých stĺpcov k tomuto trojuholníku minieme potom určite viac, ako 99 zápaliek. Ak teda chceme pridať viac stĺpcov, musíme zvoliť menší prvotný trojuholník. Z toho vyplýva, že na pridanie ešte viac stĺpcov, ako 8, by sme museli zvoliť ešte menší prvotný trojuholník, takže náš prvotný trojuholník by musel mať už vždy zápornú veľkosť strany, čo nemôže. Teda ďalej už skušať nemusíme, lebo žiadne ďalšie riešenia už nenájdeme.

Odpoveď: Riešenia sú štyri: 32, 15, 9 a 2.

Komentár: Celkom dosť z vás našlo všetky riešenia, no viacerí ste buď nedostatočne vysvetlili svoj postup, alebo nezvdôvodnili, že ste našli všetky, alebo obidve, teda sme vám museli strhnúť body. Celkovo ste sa ale s príkladom popasovali vcelku dobre.

Príklad č. 8 (opravovali Tete, Bendži):

Zadanie:

Riešenie: Pri tomto príklade nám stačilo ukázať len mechanizmus, podľa ktorého vieme postupne pridávať tímy. Tento mechanizmus funguje nasledovne: Najprv si zoberme zápas medzi dvoma tímami, ten, ktorý prehrá, umiestnime doprava, a ten, čo vyhrá, doľava.

Potom si zoberme ďalší tím a ideme postupne z pravej strany. Ak prehral s prvým, necháme tento tím úplne vpravo. Ak vyhral s tímom úplne vpravo, tak sa presunieme k ďalšiemu. Teraz ak prehral s druhým tímom sprava, tak tento tím umiestnime medzi prvý a druhý tím sprava. Ak tento tím vyhral nad tímom, ktorý je druhý sprava, tak sa presunieme na ďalší tím, v poradí tretí sprava. Takýmto spôsobom ďalej kontrolujeme, až kým nenájdeme jeden tím, s ktorým vyhral, alebo kým sa nedostaneme na koniec radu.

Ak by sme pokračovali takto ďalej, zistili by sme, že môžeme pridať akýkoľvek počet tímov.

Odpoveď: Výsledkom teda je, že tímy sa vždy dokážu postaviť do radu, kde má každý po pravici tím nad ktorým vyhral.

Komentár: Príklad nebol veľmi ťažký, ak by ste napísali niečo také, ako je vo vzorovom riešení, dostali by ste plný počet bodov. Lenže ak ste sa rozhodli pre vypisovanie možností, ktoré mohli nastať, a náhodou ste na nejakú zabudli, tak vám boli body strhnuté.

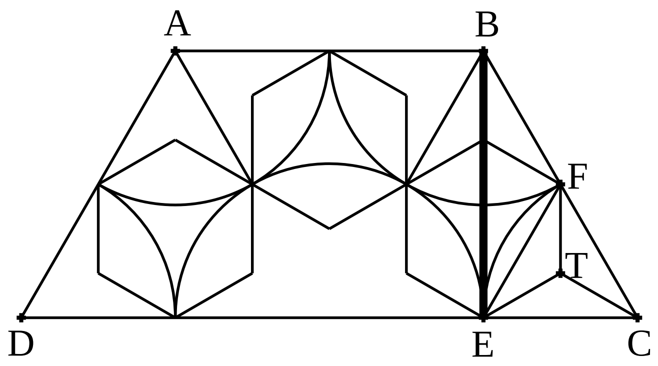
Príklad č. 9 (opravoval Peťo):

Zadanie:

Riešenie: Pri pohľade na obrázok by sme mohli nadobudnúť dojem, že štvoruholník $ABCD$ je lichobežník. Ale je to naozaj tak? Ukážeme si, že áno. Je vidno, že uhly BCD a ADC sú rovnako veľké. Uhly DAB a ABC tiež majú rovnakú veľkosť. Zároveň však uhly DAB a ABC sú dvakrát väčšie, ako uhol BCD alebo ADC, lebo oblúky pri vrcholoch A a B sú zložené z dvoch oblúkov totžných s oblúkmi pri vrcholoch C a D, ako je to ukázané na obrázku 1.

Súčet vnútorných uhlov v štvoruholníku je $360° = |\angle ABC| + |\angle BCD| + |\angle CDA| + |\angle DAB| = 2 \cdot |\angle BCD| + 2 \cdot |\angle BCD| + |\angle BCD| + |\angle BCD| = 6 \cdot |\angle BCD|$. Teda uhol BCD má 60° a uhol ABC má 120°. Teraz sa už dá ľahko nahliadnuť (nechávam to na vás), že úsečky AB a CD sú rovnobežné, a preto je štvoruholník $ABCD$ lichobežník.

Najjednoduchším spôsobom, ako zistiť plochu sivej časti lichobežníka, je zistiť, akú plochu má celý lichobežník, a odpočítať od toho plochu bielej časti. Poďme vypočítať obsah celého lichobežníka. Potrebujeme na to poznať dĺžku jeho základní a jeho výšku. Základne poznáme, sú to úsečky AB s dĺžkou 2 a CD s dĺžkou 4. Pretože úsečky AD a BC majú rovnakú dĺžku, jedná sa o rovnoramenný lichobežník, z čoho vyplýva, že



Obr. 1: pancier korytnačky

úsečka BE je výškou lichobežníka. Jej veľkosť vieme vypočítať pomocou Pytagorovej vety v trojuholníku BCE:

$$|BE| = \sqrt{|BC|^2 - |CE|^2} = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$$

Obsah lichobežníka je teda:

$$S_{lich} = \frac{(|AB| + |CD|) \cdot |BE|}{2} = \frac{6 \cdot \sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$$

Biela časť panciera sa skladá z deviatich rovnakých menších častí. Pozrime sa bližšie na časť kruhu pri vrchole C a označme si body ako na obrázku 1. Ak by sme vedeli obsah sivej časti a ten odpočítali od obsahu kruhového výseku, dostali by sme obsah jednej bielej časti. Plocha kruhového výseku nie je problém, vypočíta sa nasledovne:

$$S_{vys} = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot |\angle BCD|}{360^\circ} = \frac{\pi \cdot 1^2 \cdot 60^\circ}{360^\circ} = \frac{\pi}{6}$$

Výpočet obsahu sivej časti bude trochu zložitejší, ale nie o veľa, tak sa do toho dajme. Úsečky CE a CF majú rovnakú veľkosť a uhol, ktorý zvierajú, má 60°. Z toho sa už ľahko ukáže, že trojuholník CEF je rovnostranný (rozmyslite si ako). Uhol ETF je vnútorným uhlom pravidelného šesťuholníka a preto má veľkosť 120°. Keďže úsečky ET a FT sú rovnako dlhé, lebo sú stranami pravidelného šesťuholníka, je trojuholník EFT rovnoramenný. Uhly EFT a FET majú preto oba 30°. Teda úsečky FT a ET sú osi uhlov trojuholníka CEF. V rovnostrannom trojuholníku sú osi uhlov zároveň výškami aj ťažnicami, preto je úsečka CT tiež ťažnicou aj výškou. To znamená, že trojuholníky CET, EFT a CFT majú všetky rovnakú základňu a výšku a teda sú zhodné. Obsah sivej časti je preto rovný dvom tretinám obsahu trojuholníka CEF. Už nám zostáva iba zistiť, aká je výška trojuholníka CEF, a budeme vedieť všetko potrebné. Tú môžeme vypočítať buď pomocou Pytagorovej vety, alebo si uvedomíme, že bod F je stredom strany BC, a preto jeho vzdialenosť od úsečky CE je polovica vzdialenosti bodu B od úsečky CE. Teda výška trojuholníka CEF je $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Obsah jednej bielej časti je

$$S_b = S_{vys} - \frac{2}{3} S_{CEF} = \frac{\pi}{6} - \frac{2}{3} \cdot \frac{|CE| \cdot v_{CEF}}{2} = \frac{\pi}{6} - \frac{2}{3} \cdot \frac{1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{\pi - \sqrt{3}}{6}$$

Obsah sivej časti panciera je teda

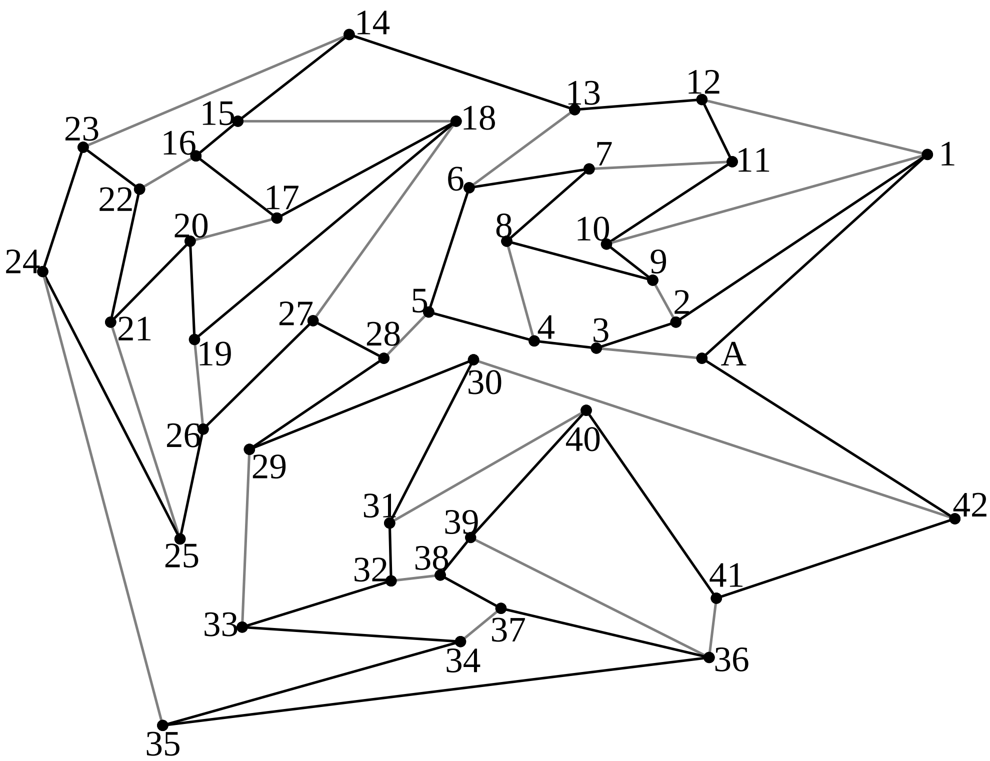
$$S_{siva} = S_{lich} - 9S_b = 3\sqrt{3} - 9\frac{\pi - \sqrt{3}}{6} = \frac{9\sqrt{3} - 3\pi}{2} \doteq 3.08$$

Odpoveď: Obsah sivej časti panciera je 3.08.

Komentár: Vo všetkých riešeniach sa vyskytla jedna chybička, a to, že ste nedostaočne alebo vôbec nevysvetlili, prečo je daný štvoruholník lichobežník. Inak ste príklad zvládli výborne, o čom svedčia aj udelené body.

Prémia (opravovala Hanka):
Zadanie:
Riešenie: Pri riešení tohto príkladu je veľmi dôležitá najmä interpretácia zadania. V zadaní sa hovorí, že chceme prejsť cez čo najviac *ďalších* križovatiek a vrátiť sa späť na križovatku A. Z toho sa dá vyrozumieť, že našim cieľom je prejsť cez čo najviac križovatiek rôznych od A, nezáleží teda, koľko krát ktorou prejdeme. Ak sa nám aj nejakou podarí prejsť viackrát, stále sa ráta len za jednu, lebo je to jedna a tá istá *ďalšia* (=rôzna od A) križovatka.

Keď sme si už toto vyjasnili, môžeme sa pozrieť na riešenie. Na pláne sa dajú prejsť všetky križovatky a to sa vám aj mnohým podarilo. Jeden zo spôsobov, ktorými sa križovatky takto dajú prejsť, je znázornený na obrázku 2, kde čísla znázorňujú poradie prechodu jednotlivými križovatkami (môže byť samozrejme aj presne opačné).



Obr. 2: Plán mesta

Odpoveď: Dalo sa prejsť cez všetky križovatky na pláne mesta, teda cez 42 ďalších okrem križovatky A.
Komentár: Tento príklad odovzdalo 45 riešiteľov, z toho až 32 z vás dokázalo prejsť všetkými križovatkami. Tieto najlepšie riešenia boli ohodnotené 5 bodmi, druhé najlepšie 3 bodmi, tretie najlepšie 2, štvrté 1 bodom no a zvyšok, bohužiaľ, 0 bodmi. Vo všeobecnosti ste to ale veľmi pekne zvládli :)