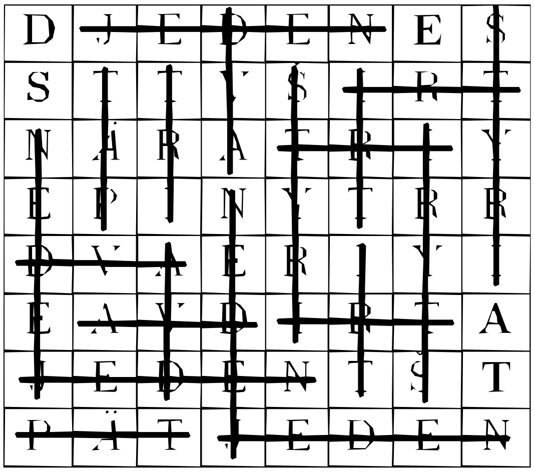
Vzorové riešenia 1. kola zimnej série 2012/2013

Príklad č. 1 (opravovali Marka, Kubo, Tomáš):
Zadanie:

Riešenie: V štvorsmerovke sme našli tieto čísla (pozri si aj obrázok 1):

- 5-krát slovo JEDEN
- 4-krát slovo DVA
- 6-krát slovo TRI
- 3-krát slovo ŠTYRI
- 2-krát slovo PÄŤ

$5 + 4 + 6 + 3 + 2 = 20$, teda sme skutočne nezabudli na žiadne číslo. V štvorsmerovke nám zostali písmená *D,E,S,A,Ť*. Takže číslo, ktorým máme vynásobiť súčet vyškrtaných čísel, je číslo 10.



Obr. 1: Vyplnená štvorsmerovka

Keď to spočítame, tak nám vyjde:

$$[(1+1+1+1+1) + (2+2+2+2) + (3+3+3+3+3+3) + (4+4+4) + (5+5)] \cdot 10$$

To sa dá skrátene zapísať ako:

$$[(5 \cdot 1) + (4 \cdot 2) + (6 \cdot 3) + (3 \cdot 4) + (2 \cdot 5)] \cdot 10 =$$

$$= (5 + 8 + 18 + 12 + 10) \cdot 10 =$$

$$= 53 \cdot 10 = 530$$

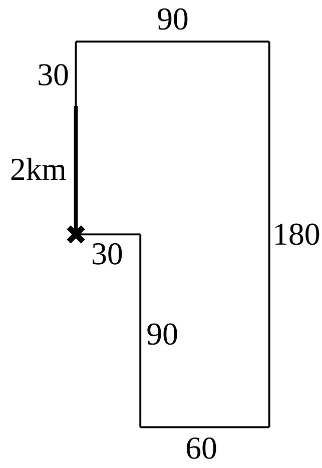
Odpoveď: Výsledok je 530.
Komentár: Príklad ste všetci pekne zvládli, len sme vám museli strhnúť nejaké body, keď ste nenašli všetky čísla v štvorsmerovke.

Príklad č. 2 (opravovali Kuchtík, Phil, Lia):
Zadanie:
Riešenie: Pri tomto príklade bude výhodou nakresliť si obrázok, a tak si ho nakreslíme aj my (obrázok 2). Čísla znamenajú počet prejdených minút alebo kilometrov určeným smerom. Znak X označuje miesto, kde

začali. Chceme vedieť, koľko im trvala cesta uličkami, a preto si musíme zistiť, koľko trvalo, kým prešli dva kilometre (to je naša jediná neznáma).

Podľa obrázku vieme, že na sever a na juh išli rovnaký kus cesty (keďže sa nakoniec vrátili na to isté miesto, kde začínali) a za predpokladu, že išli stále rovnako rýchlo, museli ísť na sever a na juh aj rovnako dlho.

Zo zadania vieme, že na sever išli 3 hodiny a na juh im cesta trvala dokopy 2 hodiny a 2 kilometre. Z toho vyplýva rovnica $3\,\mathrm{h} = 2\,\mathrm{h} + 2\,\mathrm{km} \Rightarrow 1\,\mathrm{h} = 2\,\mathrm{km}$ $\Rightarrow 1\,\mathrm{km} = 30\,\mathrm{min}$. Teraz už vieme zistiť, koľko im trvala cesta, a to tak, že zrátame všetky časové úseky vrátane dvojkilometrového, o ktorom sme zistili, že trval 1 hodinu: $0,5 + 1,5 + 1 + 2 \cdot 1,5 + 1,5 + 0,5 + 1 = 9$ hodín. Celková cesta im teda trvala 9 hodín.



Obr. 2: Prejdená trasa

Keď sa teraz pozrieme na obrázok, všimneme si, že odbočiek je 5, pozor, v začiatočnom bode neoddychovali. A teda, ak na každej stáli 15 minút, dokopy oddychovali $5 \cdot 15 = 75$ minút. Už stačí iba spočítať čas, ktorý oddychovali, s časom, ktorý prechodili: $9\,\mathrm{h} + 1\,\mathrm{h}15\,\mathrm{min} = 10\,\mathrm{h}15\,\mathrm{min}$. Skončili tak 10 hodín aj 15 minút od času $8:40$, teda o $18:55$.

Druhá časť zadania sa nás pýta, koľko kilometrov prešli. Ak teda vieme, že kráčali 9 hodín, a že za jednu hodinu prešli 2 kilometre, museli dokopy prejsť $9\,\mathrm{h} \cdot 2\,\mathrm{km/h} = 18$ kilometrov.

Odpoveď: Keď sa vrátili, hodinky ukazovali $18:55$ a spolu prešli 18 kilometrov.

Komentár: Väčšina z vás príklad vyriešila správne, avšak rysovanie alebo kreslenie na švorčekový papier nemusí byť presné, a preto sme takýmto riešeniam bez konkrétnejšieho výpočtu 2 kilometrov museli strhnúť nejaké body. Príklad však vcelku dobre dopadol, a z toho sa tešíme.

Príklad č. 3 (opravovali Andy, Adam, Alex):

Zadanie:

Riešenie: Najskôr si všimneme druhý riadok, $RR + RR = PRE$. Z neho vidno, že súčet dvoch rovnakých dvojciferných čísel má na mieste desiatok takú cifru, z ktorej pozostávajú obidve čísla. Kedže je málo možností na skúšanie, tak za R skúsime postupne dosadiť všetky cifry. Najprv si ale uvedomíme, že pokiaľ by bolo R menšie ako 5, tak by číslo $RR + RR$ nemohlo byť 3-ciferné.

- Ak $R = 5$ tak $55 + 55 = 110$.
- Ak $R = 6$ tak $66 + 66 = 132$.
- Ak $R = 7$ tak $77 + 77 = 154$.
- Ak $R = 8$ tak $88 + 88 = 176$.
- Ak $R = 9$ tak $99 + 99 = 198$.

Z týchto možností vyhovuje iba $R = 9$. Ďalej vieme z druhého riadku určiť hodnoty písmeniek P a E. $RR + RR = PRE$ a teda $99 + 99 = 198$, čiže $P = 1$ a $E = 8$. Teraz nám už len ostáva určiť S. Z prvého riadku poznáme rovnosť $RS + RR = PER$ a teda aj platí, že $S + R = R$ (všetko sú to posledné cifry v číslach). Pokiaľ chceme, aby sa výsledok nezmenil, keď ku cifre prirátame inú cifru, tak cifra, ktorú prirátavame, musí byť jedine nula. Teda $S = 0$. Už stačí iba overiť, či platí aj tretia rovnosť zo zadania: $EP + RR = 81 + 99 = 180 = PES$. Všetko sedí, príklad máme vyriešený.

Odpoveď: Písmenám prislúchajú nasledovné číslice:

$$S = 0\ ,\ P = 1\ ,\ E = 8\ ,\ R = 9$$

Komentár: Príklad vám nerobil veľké problémy, skoro všetci ste to mali úplne správne. Do budúcnosti to ale treba trochu podrobnejšie popísať, aby sa nestalo, že vám strhneme body za nedostatočné odôvodnenie.

Príklad č. 4 (opravovali gabika, Jumaj, Timo):

Zadanie:

Riešenie: Pri každej vete máme len dve možnosti - buď je veta pravdivá, alebo je veta nepravdivá. Tieto dve možnosti rozoberieme pre vetu na strane 1.

V prvej možnosti predpokladáme, že veta na strane 1 je pravdivá. To pre nás znamená, že veta na strane 2 musí byť nepravdivá. A ak je veta na strane 2 nepravdivá znamená to, že pisateľ nemohol vetu na strane 1 napísať ľavou rukou. Musel ju teda napísať pravou rukou. Z toho zisťujeme, že v tejto možnosti musí byť pisateľom denníku pravák, pretože píše pravdivé vety pravou rukou.

V druhej možnosti predpokladáme, že veta na strane 1 je nepravdivá. Znamená to, že veta na druhej strane musí byť pravdivá a dozvedáme sa z nej, že v tejto možnosti musel pisateľ napísať prvú vetu ľavou rukou. To znamená, že aj v tejto možnosti musel denník napísať pravák, pretože písal nepravdivé vety ľavou rukou.

Odpoveď: Vieme zistiť, že podozrivý je určite pravák, teda zločin spáchať nemohol.

Komentár: Príklad nebol ťažký, skoro všetci ste nám poslali správne riešenie. Spôsobov riešenia bolo viacero, mnohí z vás ste skúšali všetky možnosti, ktorou rukou mohol napísať ktorú vetu. No v takomto postupe si treba dať pozor na to, aby ste žiadnu možnosť nevynechali. Práve kvôli tomu ste stratili najviac bodov.

Príklad č. 5 (opravovali Tinka, Lukáš):

Zadanie:

Riešenie: Stromčeky rastú v priesadách v dvoch radoch po 6, to znázorníme na papieri do dvoch riadkov, pričom jednotlivé miesta si po rade označíme ako A-L (pozri si obrázok 3).

A	B	C	D	E	F
G	H	I	J	K	L

Obr. 3: Usporiadanie stromčekov

Na začiatok si treba uvedomiť, ako sa jednotlivé stromčeky dajú navzájom spojiť. 2-konárové stromčeky majú len a len 1 možnosť a to takú, že práve do dvoch strán pôjde vždy 1 konár. Z usporiadania stromčekov do obdĺžnika vyplýva, že každý stromček susedí maximálne s troma stromčekmi. Z tohto nám ďalej vyplýva, že 5-kový stromček bude spojený s dvoma 3-konárovými a jedným ľubovoľným (keby s dvomi dvojkovými, tak tretiu cestu bude mať zaplnenú tromi konármi, a tým pádom 3-kový stromček bude spojený len s 5-kovým a nesplníme podmienku zadania), čiže jediný môže byť spojený s troma stromčekmi. Keďže sú dva 5-kové a štyri 3-kové, tak nutne z podmienky vyššie budú práve dva 3-kové stromy spojené práve dvomi konármi s každým 5-kovým. 3-kový sa teda s istotou spája iba s dvoma stromami.

Keďže máme len dva 5-kové stromčeky, rozanalyzujeme si možnosti ich postavenia a ich vzájomnej polohy a tým nájdeme všetky riešenia. Nesmú byť v rohu, lebo by 5 konárov musel rozdeliť na 3 a 2 a to nejde. Ďalej sa oba 5-kové nesmú nachádzať v štvorci 2×2 na diagonálach, kvôli zasahovaniu si do priestorov a možného vzniku zablokovaného 3-kového stromčeka. Tiež sa nesmú nachádzať na jednom riadku s iba jedným stromčekom medzi sebou, lebo by vznikol stromček nespojený vôbec (premyslite si, napríklad pokusmi). Ostali nám 3 možnosti rozmiestnenia, a to pozície B a K, pozície B a E a pozície C a K (ostatné podobné vzniknú vhodným preklopením nadol alebo doprava). Možnosť pozícií B a K sa nakoniec nedá zrealizovať, lebo po dokreslení konárov okolo 5-kových stromov nám budú vždy „trčať“ aspoň po jednom konári iba na políčkach C a J. Potom by ostalo ich iba spojiť, ale tak, aby sa niektoré konáre spojili aj so stromami na políčkach D a I. To však na prvý pohľad nejde. Čiže nám ostali iba 2 možnosti pre 5-konárové stromy, a to B, E a C, K.

K prvej možnosti B, E najprv dokreslíme konáre z každého 5-kového (do každej strany 1 konár). Stromčeky nespojené s 5-kovými sú nutne 2-kové. Pri 5-kových nám ostanú práve 3 voľné miesta, kde musíme uložiť dva 3-kové a jeden 2-kový. Tam existujú práve 3 možnosti. Dostávame $3 \cdot 3 = 9$. Celý diagram môžeme otočiť v smere dole-hore. Smerom vpravo-vľavo to nejde, lebo preklopením by sme dostali niektorú z predošlých 9 možností (skúste si to). Dokopy máme 18 možností.

K možnosti C, K dokreslíme konáre ako v prvom prípade. Takisto doplníme 2-kové stromčeky, ktoré sa nedotýkajú 5-kových. Dokreslíme paličky, kde sa dá, až nám určite vznikne obdĺžnik $3 \cdot 2$ a štvorec $2 \cdot 2$ a cestička medzi nimi. Tak isto ostanú pri každom 5-kovom tri prázdne políčka na dosadenie. Dostaneme opäť $3 \cdot 3 = 9$ možností, ale jednu musíme vylúčiť, lebo by mohla vzniknúť náklonnosť medzi dvomi 3-kovými stromami, a to je zakázané. Máme 8 možností, ktoré môžeme pootáčať do 4 smerov a dostaneme ďalšie rôzne platné riešenia. Táto možnosť nám pridá 32 riešení.

Odpoveď: Dokopy existuje $32 + 18 = 50$ riešení.

Komentár: Tento príklad bol obzvlášť zložitý, takže ak máte málo bodov, nezúfajte, nie je to s vami vôbec zlé :) V príklade sme okrem správneho výsledku oceňovali hlavne či ste pochopili správne zadanie a našli ste aspoň nejaké správne rozmiestnenia. A chválime hŕstku tých, ktorí sa snažili príklad ozaj logicky vyrátať a to, že vám koniec nevyšiel, nevadí, snahu sme ocenili v každom prípade :)

Príklad č. 6 (opravovali Hanka, Tete):

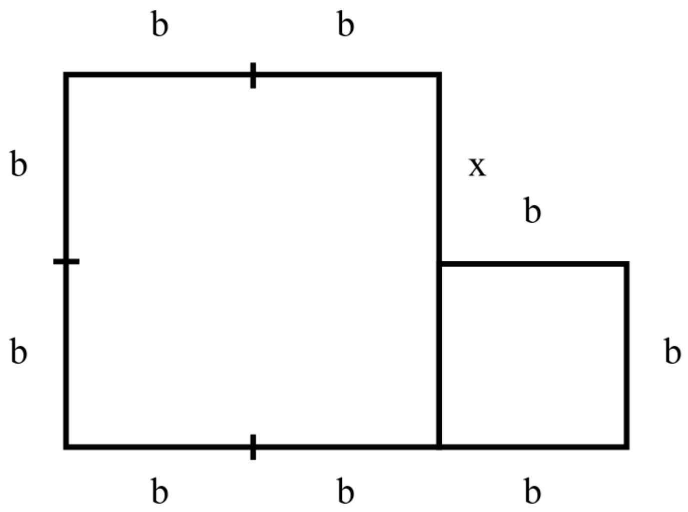
Zadanie:

Riešenie: Stranu pôvodného ihriska si označíme ako a. Jeho obvod je teda $4a$. Keď Erik obehne toto ihrisko 5-krát, prebehne vzdialenosť $5 \cdot 4a = 20a$.

Stranu zmenšeného ihriska si označíme ako b. Jeho obvod je $4b$. Erik by pri jeho obehávaní prebehol vzdialenosť $10 \cdot 4b = 40b$.

Vieme, že ak Erik obehne 5-krát pôvodné ihrisko, prebehne takú istú vzdialenosť, akú by prebehol, keby zmenšené ihrisko obehol 10-krát. Preto platí $20a = 40b$. Keď túto rovnicu upravíme, zistíme, že $a = 2b$, teda a je dvakrát väčšie, ako b, teda aj obvod pôvodného ihriska je dvakrát väčší, ako obvod zmenšeného ihriska.

Na obrázku 4 vidíme útvar, ktorý vznikne spojením týchto dvoch ihrísk. Dĺžka x sa dá vyjadriť ako $a - b$, a keďže $a = 2b$, tak $x = b$.



Obr. 4: Ihrisko

Z obrázku 4 vyplýva, že obvod je vytvorený z desiatich úsekov dĺžky b. Zo zadania vieme, že ak by Erik tento útvar obehol, prebehol by vzdialenosť $100\,\mathrm{m}$. Z toho vyplýva: $100\,\mathrm{m} = 10b$, čiže $b = 10\,\mathrm{m}$. Z predchádzajúcich tvrdení vieme, že $a = 2b$, teda $a = 20\,\mathrm{m}$. Strana pôvodného ihriska je tým pádom $20m$ a jeho obvod je $4 \cdot 20\,\mathrm{m}$, čiže $80\,\mathrm{m}$.

Odpoveď: Obvod pôvodného ihriska je 80 metrov.

Komentár: Väčšina z vás mala príklad vyriešený dobre, niektorí však zabudli napísať postup alebo tipovali - tým sme veľa bodov dať nemohli. Niektorým robila najväčší problém násobilka :). Všeobecne ste to ale veľmi dobre zvládli a rady sme vám dávali tých 10 bodov, ktorých bolo naozaj požehnane :).

Príklad č. 7 (opravovali ViRPo, Maggie, Zuzka):

Zadanie:

Riešenie: Prvú lúku kosila prvú polovicu dňa celá skupina koscov a druhú len polovica. Pomer medzi všetkými koscami a polovicou koscov je 2 : 1. Keďže kosili rovnako dlho, taký istý pomer je aj medzi časťou lúky, ktorú pokosili všetci kosci, a druhou časťou, ktorú pokosila len polovica koscov. Teda je potrebné si lúku rozdeliť na tretiny, pričom dve z nich pokosili všetci spolu a tretinu iba polovica koscov.

Na druhej lúke pokosila polovica koscov za pol dňa rovnako veľkú časť, ako polovica koscov na prvej lúke. Druhá lúka je však dvakrát menšia, takže jedna tretina z prvej lúky sú dve tretiny z druhej lúky. Ako zvyšok zostala tretina druhej lúky, ktorú, ako je písané v zadaní, pokosil 1 kosec za 1 deň.

Podľa nepriamej úmernosti z toho vyplýva, že za polovicu dňa pokosia tretinu druhej lúky 2 kosci. Dve tretiny by pokosili za polovicu dňa 4 kosci, teda polovica všetkých koscov sú 4 kosci. Z toho vyplýva, že všetkých koscov bolo 8.

Odpoveď: V skupine bolo 8 koscov.

Komentár: Tešíme sa veľkému počtu správnych riešení a pekných postupov. Úloha sa dala riešiť aj rovnicou, ktorú viacerí z vás použili, no mnohí riešili aj skúšaním, za čo sme bohužiaľ nejaké tie body museli strhnúť.

Príklad č. 8 (opravovali Danka, Maťo, Mišo):

Zadanie:

Riešenie: Musíme si uvedomiť, že vždy po operácii musíme získať toľko-ciferný výsledok, koľko písmen z toho máme získať. Pozrime sa na cifru c. Vynásobíme ju tromi a vyjde g. To znamená, že c môže byť iba 1, 2 alebo 3, pretože $4 \cdot 3$ už je 12 a 0 to byť nemôže, pretože cifry na mieste desiatok sa nemôžu opakovať. Teraz sa pozrime na d - ak ho vydelíme 3, dostaneme h. To znamená, že d bude 9, 6 alebo 3, pretože to sú jediné jednociferné násobky trojky. Z tohto vyplýva, že g môže byť 3, 6 alebo 9 a h môže byť 1, 2 alebo 3. Ďalej gh vydelíme štyrmi a vyjde nám kl. Musíme si uvedomiť, že ak dané číslo je deliteľné 4, tak musia byť posledné dve cifry deliteľné 4 a tým pádom h bude párne, konkrétne h bude 2. Ak h je 2, gh môže byť 32, 62 alebo 92, no 2-ciferný celočíselný výsledok dostaneme iba pri 92. Preto g je 9. Keďže poznáme h aj g, z informácií zo zadania dopočítame: c sa rovná 3 a d sa rovná 6. Ďalej ku a aj ku b pripočítavame 3 a zároveň e aj f môže byť maximálne 9. Vypíšme si cifry, ktoré tomu vyhovujú, a zároveň sa môžu nachádzať na daných rádoch (keďže na tisíckach nemôže byť 0).

a : 1, 2, 4, 5 $\rightarrow$ 3 a 6 nie, pretože už sú použité

b : 0, 1, 2, 4, 5 $\rightarrow$ 3 a 6 sa tu rovnako nemôžu nachádzať

Z toho si vypočítajme všetky možnosti pre e a f.

e : 4, 5, 7, 8

f : 3, 4, 5, 7, 8

Keďže ij dostaneme vydelením ef tromi, poskladáme všetky kombinácie možné pre ef a vyberieme tie, ktoré sú deliteľné tromi. Vyjde nám ef: 45, 48, 54, 57, 75, 78, 84, 87. Teraz z nich dopočítame ij pričom vieme, že sa cifry na mieste tisícok, stoviek, desiatok, jednotiek a taktiež v jednotlivých kódoch nemôžu rovnať:

- $45 \div 3 = 15$ - rovnaká cifra na mieste tisícok aj stoviek.
- $48 \div 3 = 16$ - rovnaká cifra na mieste tisícok.
- $54 \div 3 = 18$ - môže byť.
- $57 \div 3 = 19$ - môže byť.
- $75 \div 3 = 25$ - rovnaká cifra na mieste stoviek a aj v kóde.
- $78 \div 3 = 26$ - rovnaká cifra v kóde.
- $84 \div 3 = 28$ - rovnaká cifra v kóde.
- $87 \div 3 = 29$ - rovnaká cifra v kóde.

Odpoveď: Zistili sme, že máme iba dve riešenia pre trojice čísel [$abcd$, $efgh$, $ijkl$] v tomto poradí a tými sú [2136, 5492, 1823] a [2436, 5792, 1923].

Komentár: Väčšina z vás robila chyby iba v tom, že ste si neuvedomili, že $32 \div 4 = 8$ a nie 08, čiže vám vzniklo o tri riešenia naviac. Inak sa vám celkom darilo. :)

Príklad č. 9 (opravovali Zajo, Katka, Nika):

Zadanie:

Riešenie: Motýľa si rozdelíme na telo, vonkajšie a vnútorné strany krídel. Zoberme do úvahy najskôr len jedno krídlo. Na vnútornej strane sa musia striedať dve farby (pretože tretia bude na tele). Na vonkajšom krídle sa budú môcť striedať už všetky tri farby.

Preto si vypíšeme možnosti zoradenia farieb na vnútornom krídle. Sú dve, a to $xyxy$ a $yxyx$ (na tele je z). Potom musíme nájsť všetky možnosti zoradenia farieb na vonkajšom krídle pre jednu z možností zoradenia farieb na vnútornom krídle (napr.$xyxy$, pre $yxyx$ to bude rovnaké, len vymeníme x a y) a tých je osem. Ak by tam malo byť jedno z, máme 4 možnosti, a to dosadiť ho na každé miesto: $zxyx$, $yxzx$, $yzyx$, $yxyz$. Pri dvoch z máme tri možnosti: $zxzx$, $yzyz$ a $zxyz$. Viac z sa nám tam nezmestí a bez z je len jedna možnosť, a to $yxyx$.

Vypočítame všetky možnosti pre jedno krídlo: $2 \cdot 8 = 16$. Dve sú možnosti zoradenia farieb na vnútornom krídle a 8 je všetkých možnosti zoradenia farieb na vonkajšom krídle.

Obidve krídla majú rovnaký tvar, čiže aj kombinácie farieb budú rovnaké. Na jednom krídle môže byť 16 kombinácii farieb a na druhom tiež, takže aby sme zistili, koľko kombinácií majú obidve krídla spolu, musíme 16 umocniť na druhú: $16 \cdot 16 = 256$.

Nesmieme však zabudnúť, že môžeme farby povymieňať, teda na tele môže byť x, y aj z, tým pádom musíme 256 vynásobiť tromi. Teraz sa už dostávame ku konečnému výsledku, a to je 768.

Odpoveď: Na motýľovi môžeme nájsť 768 zafarbení (mutácií).

Komentár: Tento príklad nepochopil každý správne a nie všetci počítali aj s telom, čiže nás prekvapilo veľa rôznych výsledkov. Boli však aj výborné riešenia, a tie si zaslúžili plný počet - 10 bodov.

Prémia (opravovala Dada):

Zadanie:

Riešenie: Pekná úvaha, ktorú veľa z Vás zvolilo, bola, že ak chceme dostať čo najmenšie číslo, budeme najprv maľovať latky s najväčšími číslami. Ďalej sa s tým bolo treba trošku pohrať a výsledný pokus pre najmenší rozdiel bol nasledovný:

$365 - 43 = 322$, $24 - 11 = 13$, $299 - 60 = 239$, $196 - 85 = 11$, $132 - 150 = 18$, $322 - 239 = 117$, $117 - 111 = 6$, $18 - 6 = 12$, $13 - 12 = 1$.

No a pre najväčší rozdiel si stačilo uvedomiť, že chceme dostať nejaký veľmi malý rozdiel a na koniec ho odpočítať od najväčšieho čísla, napríklad takto:

$299 - 196 = 103$, $132 - 85 = 47$, $150 - 47 = 103$, $103 - 103 = 0$, $60 - 43 = 17$, $24 - 11 = 13$, $17 - 13 = 4$, $4 - 0 = 4$, a nakoniec $365 - 4 = 361$.

Odpoveď: Najmenší možný rozdiel, aký ste našli bol 1 a najväčší bol 361.

Komentár: Príklad väčšina z vás zvládla veľmi dobre, na čo si ale treba dávať pozor, boli v tomto príklade aj numerické chyby, ktoré sa miestami vyskytli. Inak vás chválim :).