Vzorové riešenia 3. kola zimnej série 2011/2012

Príklad č. 1 (opravovala Tinka):

Zadanie:

Riešenie: Najprv si určite zoberieme pár farebných ceruziek a papier, na ktorý si nakreslíme štvorec 3×3. Zaujímavý štvorček je stredný, on sa totiž nachádza so všetkými ostatnými buď v riadku, stĺpci, alebo na uhlopriečke. Jeho farba sa určite nebude zhodovať so žiadnou inou.

Ďalej určite vieme, že v prvom riadku budú použité tri rôzne farby, všetky musia byť odlišné aj od stredného políčka. Minimálne musíme teda použiť 4 farby. Dá sa to však naozaj uskutočniť? Skúsme to.

Na obrázku 1 vidíme prvé štyri vyfarbené štvorčeky. Postupne doplníme farby zvyšných políčok, pričom sa snažíme, aby sme nepoužili piatu farbu. Pri dopĺňaní farieb netipujeme, dopĺňame iba to, čo nemá inú možnosť.

V druhom riadku vľavo musí byť zelená farba. V tom istom riadku vpravo musí byť určite modrá farba. V treťom riadku však do rohov smieme dať iba ružovú farbu. Lenže nemôžme dva rohy zafarbiť tou istou farbou, lebo sú v jednom riadku. Dostali sme sa do situácie, že bez piatej farby sa nezaobídeme.

Dada musela použiť najmenej 5 farieb. Aby sme sa presvedčili, že ozaj 5 farieb stačí, nakreslíme štvorec, ktorý vyhovuje zadaniu (obrázok 2).

modrá	ružová	zelená
	červená	

Obr. 1: Pokus farbit s 4 farbami.

modrá	ružová	zelená
zelená	červená	modrá
ružová	modrá	čierna

Obr. 2: Riešenie s 5 farbami.

Odpoveď: Dada musela použiť aspoň 5 farieb.

Komentár: Ste šikovní, príklad ste hravo zvládli. Hlavný problém bol, že ste úplne nepovedali, prečo 4 farby nestačia. Správne riešenie ste však našli všetci:)

Príklad č. 2 (opravovala gubika):

Zadanie:

Riešenie: Ako prvé si uvedomíme, že pri sčítaní dvoch čísel sa nám do ďalšieho rádu môže preniesť najviac 1 (najvyšší súčet je $9 + 9 = 18$). Z toho, že čísla $OKLAMAL$ a $VAPENIK$ sú sedemciferné a číslo $KOMINIKA$ je osemciferné, vyplýva, že K môže byť iba jednotka, a tá sa musela preniesť z predchádzajúceho rádu, $O + V = O$. Tento súčet, ku ktorému sa môže preniesť jednotka, musí teda byť aspoň 10, aby K bolo 1. Aby nám toto platilo, môžme to dosiahnuť, iba ak sa jednotka z predchádzajúceho súčtu skutočne prenáša a V je 9, teda vlastne k O pripočítavame 10.

Dostávame súčet $O1LAMAL + 9APENI1 = 1OMINI1A$. Posunieme sa o ďalší súčet doprava $1 + A = M$. Potrebujeme, aby aj tento súčet bol aspoň 10, aby sa nám prenášala jednotka do ďalšieho rádu, čo sme využili v predchádzajúcom súčte. Najväčšie číslo A, aké môže byť, je 8, lebo sme už zistili, že V je 9. Potrebujeme znova, aby sa nám do tohto súčtu prenášala jednotka, čiže $A + 1 + 1$ je 10, z čoho vyplýva, že M bude 0. Pre menšie A ako 8 by sme súčet 10 nedostali, je to teda jediné riešenie.

Znova dosaďme cifry, ktoré sme zistili, do súčtu. $O1L808L + 98PENI1 = 1O0INI18$. Pozrime sa teraz na cifry, ktoré zrátavame sprava. Máme tu $L + 1 = 8$, čiže L musí byť 7. Na ďalšej pozícii máme $8 + I = 1$, keďže 1 je menej ako 8, musí nám $8 + I$ dávať súčet 11, teda I bude 3 a do ďalšeiho rádu sa nám prenáša jednotka. V ňom máme $0 + N = 3$, spolu s jenotkou prenesenou z predchádzajúceho rádu $1 + N = 3$, čiže $N je 2$.

Rovnica teraz vyzerá takto: $O178087 + 98PE231 = 1O032318$. Pozrime sa na ďalšiu pozíciu $8 + E = 2$, vidíme, že znova súčet bude väčší ako 10. Aby jeho posledná cifra bola 2, musí byť tento súčet rovný 12 a E je teda 4. Do ďalšieho rádu $7+P = 3$ sa nám znova preniesla jednotka, teda máme rovnicu $8 + P = 13$, čiže P je 5.

Pre O nám ostáva, už len jediná cifra a to je 6. Overíme teda, či súčet sedí.

Odpoveď: Písmenká v súčte $OKLAMAL + VAPENIK = KOMINIKA$ sme nahradili číslami $6178087 + 9854231 = 16032318$.

Komentár: Príklad ste všetci pekne zvládli, za čo vám patrí pochvala.

Príklad č. 3 (opravovali Kozzy, Julča):

Zadanie:

Riešenie: Preložme si zadanie do trošku matematickejšieho jazyka. Našou úlohou bude zostrojiť rovnostranný trojuholník (označme ABC) so stredom S a na jeho stranách nájsť také body - označme J_1, J_2, J_3 sochy Jupitera a A_1, A_2, A_3 sochy

Artemis - aby platilo, že prvé tri menované sú rovnako vzdialené od stredu (vo vzdialenosti j) a druhé tri taktiež (v nejakej inej vzdialenosti a). Zadaný sme dostali bod S a časť priamky, na ktorej ležia body A a B (je to časť strany trojuholníka) s vyznačenými bodmi J_1 a A_1. Keďže sme toto dostali dané zadaním, nemôžeme zostrojiť ľubovoľný rovnostranný trojuholník a hľadať jeho stred, my už máme presnú vzájomnú polohu stredu a jednej strany a zvyšné dve strany tam budeme musieť napasovať tak aby bod bol ozaj stredom.

Veľmi zaujímavý bude bod S, povedzme si o ňom niečo. Keďže máme rovnostranný trojuhoník, je rovnoramenný pri základni ľubovoľnej zo strán, ak teda cezeň spravíme kolmicu na ľubovoľnú stranu, táto bude prechádzať stredom strany. Tiež vieme vypočítať veľkosť uhla S_1SS_2 kde S_1, S_2 sú stredy ľubovoľných dvoch strán. Na základe vedomosti, že súčet vnútorných uhlov v štvoruholníku (budeme sa venovať napríklad AS_1SS_2) je 360° a znalosti troch z nich - uhly AS_1S a SS_2A sú pravé, ako sme si povedali vyššie a uhol S_1AS_2 je vnútorným uhlom rovnostranného trojuholníka, čo je, ako iste vieme, 60°. Ostáva hľadaný uhol S_1SS_2, ktorý má teda $360 - 90 - 90 - 60 = 120$ stupňov. Napokon, S je stred trojuholníka, teda má rovnakú vzdialenosť od stredov všetkých troch strán.

Trojuholník teraz už zostrojíme ľahko, stačí spraviť kolmicu na zadanú priamku cez S, na ňu dva uhly veľké 120° (každý jedným smerom) a naniesť na ramená týchto uhlov rovnakú dĺžku ako je S vzdialené od zadanej priamky. Túto poslednú operáciu väčšinou robíme kružidlom, keďže práve ono nám zabezpečuje, že všetky body, ktoré ním vyznačíme, budú od stredu rovnako vzdialené.

A presne to využijeme aj pri hľadaní sôch, ktoré majú byť od stredu rovnako vzdialené. Zostrojíme kružnice so stredom S postupne cez A_1 a J_1. Niekde na nich budú ležať hľadané sochy, zároveň budú ležať na už narysovanom trojuholníku, takže stačí pohľadať priesečníky kružnice a trojuholníka. Tu sa stretneme ešte s posledným problémom, totiž ak socha neležala v strede strany, obe kružnice pretnú každú stranu trojuholníka dvakrát. Tu si pomôžeme zadaním, ktoré hovorí, že steny boli úplne identické, vieme teda, že si vyznačíme sochu len v každom druhom priesečníku (počnúc tými zadanými). Úloha je dokončená.

Odpoveď: Áno, vieme to uvedeným postupom.

Komentár: Väčšina riešení bola správna, no našli sa aj takí, ktorí spravili presne tú chybu, ktorá bola popísaná v riešení, teda zostrojili trojuholník a hľadali stred. Takže nabudúce si dajte pozor, čo je dané a čo si môžeme nakresliť, kde chceme!

Príklad č. 4 (opravovali Marka, Kuchtík, Majo):

Zadanie:

Riešenie: Na začiatok by sme si mohli určiť, ako vyzeral finálny bodový rebríček. Keďže vieme, že každý hráč aspoň raz vyhral, tak posledný mal najmenej 1 bod. Taktiež to znamená, že prvý bol aspoň raz porazený, a to druhým v poradí, preto mohol mať najviac 3 body (keďže hral každý 4 zápasy). Teda ak žiadni dvaja nemali rovnaký počet bodov a bodové hodnoty sa mohli líšiť najmenej o 0,5 bodu, čo vyplýva zo zadania, výsledný rebríček musel vyzerať takto:

1. 3 body
2. 2,5 bodu
3. 2 body
4. 1,5 bodu
5. 1 bod

Keď už vieme, ktorý hráč má koľko bodov, potrebujeme ešte zistiť, ako sa k danému počtu bodov každý hráč dopracoval. Najjednoduchšie bude začať od piateho.

Piaty hráč v poradí porazil štvrtého a má 1 bod. To znamená, že bilancia piateho je 1 výhra a 3 prehry. Štvrtý hráč v poradí porazil tretieho hráča, z čoho získal jeden bod a k pol bodu sa mohol dostať jedinou cestou, a to remízou. Teda jeho bilancia je 1 výhra, 1 remíza a 2 prehry. Tretí hráč v poradí vyhral nad druhým v poradí, a tak získal jeden bod a určite vyhral aj nad piatym hráčom, pretože ten prehral všetky duely okrem toho so štvrtým hráčom. Teda 2 body tretieho hráča sú čisto z výhier. Prvý hráč bol prekonaný iba druhým hráčom, a preto nemohol získať 3 body inak, ako troma výhrami. Druhý hráč v poradí vyhral nad prvým a určite aj nad piatym. Keďže štvrtý hráč v poradí raz remízoval a o všetkých ostatných hráčov sme zistili, že nemali žiadnu remízu, je druhý hráč jediným hráčom, s ktorým mohol štvrtý remízovať.

Odpoveď: Remíza bola len jedna, a to medzi hráčmi, ktorí sa umiestnili v celkovom bodovaní na 2. a 4. mieste.

Komentár: Väčšina z vás nám zaslala správne riešenia, za ktoré sme mohli s radosťou dať 10 bodov, no našli sa medzi vami aj takí, ktorí spravili či už menšie alebo väčšie chyby, za ktoré sme museli zopár bodov strhnúť. V celku to ale dopadlo veľmi dobre a sme radi, že sa vám príklad takto vydaril.

Príklad č. 5 (opravovali Dada, Hanka):

Zadanie:

Riešenie: V prvom rade si musíme uvedomiť, že žiadni dvaja nemohli mať na čele obaja dve zelené alebo dve červené známky. Ak by napríklad A videl, že B má na čele dve zelené známky a aj C má na čele dve zelené známky, vedel by hneď povedať, že on má na čele dve červené (a tak isto, ak by B aj C mali obaja dve červené známky, A by musel mať dve zelené). Tiež ak by A a C mali obaja dve známky z tej istej farby, B by vedel na prvýkrát povedať, aké známky má on, a tiež ak by A a B mali obaja rovnaké známky, C by vedel na prvýkrát povedať, aké má známky.

Ak by mal B dve známky rovnakej farby (je jedno ktorej, lebo z oboch farieb je rovnaký počet známok), mohli by nastať situácie uvedené v tabuľke 1.

V prvom prípade by svoju farbu známok zistil C už pri prvom pokuse, v druhom prípade B. V treťom prípade by to zistil A pri druhom pokuse (úvaha, ktorou by k tomu dospel môže byť: „Vidím z každej farby po dve známky, ale ani A ani B nevedeli pri svojom prvom pokuse povedať, aké známky majú, lebo majú každý dve možnosti, aké môžu mať, čo znamená, že nemôžem

A		B		C	
Č	Č	Č	Č	Z	Z
Z	Z	Č	Č	Z	Z
Č	Z	Č	Č	Z	Z
Z	Z	Č	Č	Č	Z
Č	Z	Č	Č	Č	Z

Tabuľka 1: Možnosti pri rovnakých známkach

A		B		C	
Z	Z	Č	Z	Č	Č
Z	Z	Č	Z	Z	Č
Č	Č	Č	Z	Z	Č
Č	Č	Č	Z	Z	Z
Z	Č	Č	Z	Č	Č
Z	Č	Č	Z	Z	Z
Z	Č	Č	Z	Z	Č

Tabuľka 2: Možnosti pri rôznych známkach

mať na čele známky rovnakej farby, a teda musím mať známky rôznej farby.“), v štvrtom prípade by to zistil C pri prvom pokuse (rozmyslíme si ako), v piatom prípade by to zistil C pri druhom pokuse (rozmyslíme si ako).

B teda nemôže mať dve známky rovnakej farby.

Ak by ale B mal známky rôznej farby, mohli by nastať situácie uvedené v tabuľke 2. V prvej možnosti by A pri prvom pokuse nevedel, aké má známky, ale keďže vidí, že B má červenú a zelenú a C má dve červené známky, môže predpokladať, že má jednu červenú a jednu zelenú známku alebo dve zelené známky. B vie, že keďže A o sebe nevedel povedať, aké má známky, tak on nemôže mať dve červené známky (ako C), teda môže mať červenú a zelenú alebo dve zelené známky. C nevie povedať, aké má známky, ale vie povedať, že určite nemá dve zelené známky, lebo v takom prípade by B vedel odpovedať. C teda o sebe môže povedať, že má buď červenú a zelenú alebo dve červené známky. Odpovede ostatných dvoch majstrov majstrovi A vôbec nepomohli, lebo stále si o sebe môže myslieť, že má červenú a zelenú alebo dve zelené známky. B už ale odpovedať dokáže, lebo jeho pôvodný predpoklad bol, že má buď dve zelené, alebo jednu zelenú a jednu červenú známku. Keďže ale C nevedel povedať, akú má známku (teda B nemá dve zelené známky ako A), tak B musí mať červenú a zelenú známku. To isté platí aj pri štvrtej možnosti. Ďalej už ostatné možnosti nemusíme overovať, lebo z možností, kde má B dve rovnaké známky, ani jedna nesedí, ale z možností, kde má B rôzne známky, sedí minimálne jedna (resp. dokonca až dve).

B teda musí mať jednu zelenú a jednu červenú známku.

Odpoveď: B mal jednu červenú a jednu zelenú známku.

Komentár: Príklad nebol ťažký - tí z vás, čo ho mali dobre, ho mali väčšinou na 10 bodov. Tí, čo mali bodov menej, stratili body väčšinou za to, že nesprávne pochopili zadanie alebo boli príliš leniví na to, aby opísali postup. Celkovo ste to ale veľmi pekne poriešili :)

Príklad č. 6 (opravovali Danka K., Murko):

Zadanie:

Riešenie: Vieme, že súčet všetkých čísel na kocke (1 až 6) je 21, čo je číslo deliteľné tromi. Podľa zadania má byť súčet hornej, dolnej, pravej a ľavej steny deliteľný tromi, musí byť teda aj súčet prednej a zadnej steny deliteľný tromi. Aby to platilo aj keď kocku pootočíme, každé dve protiľahlé strany musia dávať súčet deliteľný tromi.

Teda nám stačí vypísať si možnosti kombinácií dvojíc čísel, ktoré dokopy dávajú súčet deliteľný tromi: $1 + 2$, $3 + 6$, $4 + 5$ alebo $1 + 5$, $2 + 4$, $3 + 6$.

To by sme mali zatiaľ dve kocky. Tieto, lenže pootočené, sa nepočítajú medzi nové kocky. Novú kocku však vieme vytvoriť prehodením práve jednej dvojice čísel na protiľahlých stranách. Keď v každej z dvoch možností prehodíme práve jednu dvojicu čísel na protiľahlých stranách, vzniknú nám dve ďalšie kocky. $2 \cdot 2 = 4$, teda teraz máme dokopy štyri kocky.

Ak by sme takto vymenili v každej pôvodnej možnosti dve dvojice čísel na protiľahlých stranách, vyšli by nám úplne rovnaké kocky ako tie pôvodné, len otočené o $180°$. Ak by sme vymenili v pôvodných možnostiach až tri dvojice čísel na protiľahlých stranách, vyšli by nám síce iné kocky, ale boli by rovnaké s prvými zmenenými, kde sme vymenili len jednu dvojicu.

Odpoveď: S danou vlastnosťou existujú práve štyri kocky.

Komentár: Na základnú sieť kocky prišiel skoro každý z vás, niektorí však nepočítali s prehodením dvojice a teda im nevznikli tie ďalšie dve kocky, a napísali do riešenia len dve. Aj napriek tomu to však väčšina z vás mala dobre, a aj princíp ste pochopili. Chválime vás všetkých :)

Príklad č. 7 (opravovali ViRPo, Zajo):

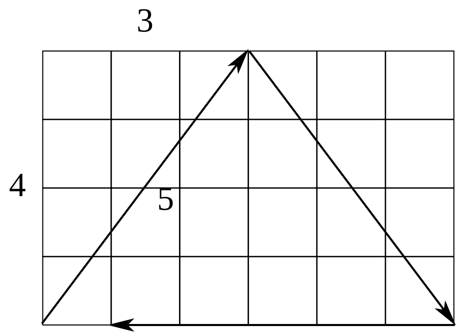
Zadanie:

Riešenie: Musíme sa pozrieť, kam sa pavúčik vie posunúť na jeden ťah. Najjednoduchšie je zobrať si kružítko, zapichnúť ho na miesto kde sa nachádza pavúčik a spraviť kružnicu s polomerom 5. Ak sme dosť presní, zistíme, že sa vie posunúť do 12 uzlov.

Pohybovať sa určite môžeme o 5 uzlíkov vpravo, vľavo, hore aj dole (toto sú 4 možnosti). Taktiež je však možné pohybovať sa po prepone pravouhlého trojuholníka s odvesnami dĺžok 3 a 4 (zvyšných 8 možností). Po pavučine by sme sa pohybovali o 3 políčka jedným smerom (vodorovne alebo zvislo) a potom o 4 políčka druhým. Preto bude tento trojuholník pravouhlý, a tak skončíme vo vrchole štvorčeka. Overme teda dĺžku prepony tohoto trojuholníka pytagorovu vetou:

$$\sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$$

Pohyby dokážeme naskladať tak, ako je znázornené na obrázku 3. Dostaneme sa takto o jedno políčko vpravo. Otočením získame pohyb o jedna hore, vľavo a dole. Ak sa dokážeme dostať z políčka na všetky susedné, dokážeme sa dostať hocikam po pavučine.

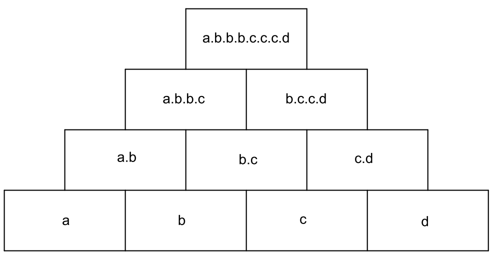


Obr. 3: Znázornenie pohybov pavúka

Odpoveď: Pavúk sa dokáže dostať do každého miesta v pavučine.
Komentár: Všimnite si, že otázka bola, či sa dokáže dostať na ľubovoľné políčko na pavučine. Ak sme teda zistili, že sa môže pohnúť po prepone trojuholníka so stranami dĺžok 3, 4, 5, nemusí nás trápiť, či sa o vzdialenosť 5 dokáže pohnúť ešte ďalším spôsobom. Stačilo naskladať pohyby tak, aby sa dostal na ľubovoľné miesto. Taktiež veľa z Vás si nevšimlo, že stačí ukázať, ako sa pavúk dostane o 1 hore, dole, vpravo, vľavo.

Príklad č. 8 (opravovala Betka):

Zadanie:
Riešenie: Nakreslíme si našu štvorposchodovú pyramídu. Do spodného riadku si vpíšeme písmená a, b, c a d. Keďže ide o súčinovú pyramídu, vieme si dopísať aj zvyšné riadky (obrázok 4).



Obr. 4: Všeobecná pyramída

Pozrieme sa na číslo, ktoré sa nachádza v najvyššom políčku. V našej všeobecnej pyramíde je to $a \cdot b^3 \cdot c^3 \cdot d$ a v zadaní máme číslo 375000. Rozložíme si ho na súčin prvočísel $375000 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^6$.

V zadaní je podmienka, že sa žiadne číslo nemôže nachádzať v pyramíde dvakrát, čo znamená, že v našej pyramíde určite nebude 1, lebo 2.činiteľ by bol rovnaký ako daný súčin.

Opäť sa pozrieme na všeobecnú pyramídu. Keď porovnáme, čo sa stalo s číslami v spodnom riadku keď sa prepracovali až do najvyššieho políčka, vidíme, že a a d sa použilo raz, a c a b trikrát. S určitosťou teda vieme, že 3 sa musí nachádzať v jednom z políčok a alebo d. Taktiež 2 sa musí nachádzať v jednom z políčok c alebo b. Zatiaľ si povedzme, že trojka je v a a dvojka v b (je to jedno, pretože pokiaľ by sme to dali naopak trojku do d a dvojku do c, bola by to tá istá možnosť, ibaže otočená).

Zostáva zistiť, čo s päťkami. Pokiaľ by sme umiestnili 5 do políčka c v najvyššom políčku by bola použitá trikrát, a teda ešte postrebuje dostať do horného tri päťky. Voľné zostalo už len d. d je použité v najvyššom len raz, preto do neho dosadíme 5^3. To by bola jedna fungujúca pyramída.

V spodnom riadku máme (zľava) $3, 2, 5, 125$. Nás však zaujíma, aké hodnoty, môžu byť v ľavom políčku a preto chceme nájsť všetky možnosti. Stačí vymeniť hodnoty v políčkach a a d a máme ďalšiu možnosť. Ďalšie dve možnosti dostaneme, ak zase prehodíme hodnoty v políčkach b a c, ale tie nás nezaujímajú, keďže to nijak neovplyvňuje hodnotu v ľavom rohu.

Nazvime si políčka a a d krajné a políčka b a c vnútorné.

Vo vnútorných políčkach máme dvojku a päťku. Tie nebudeme meniť. Budeme sa zaoberať vonkajšími. Zo všobecnej pyramídy vidíme, že tie hodnoty, čo sú v krajných políčkach, sa nezmenené prenesú do najvyššieho. Preto trojku a tri päťky môžeme ľubovoľne rozmiestniť do krajných, pričom sa najvyššia nezmení.

Už sme mali možnosť 3 a 5^3. Zostávajú ešte dve možnosti (keďže nesmieme použiť jednotku), a to sú: prvá $3 \cdot 5$ a 5^2, a druhá $3 \cdot 5^2$ a 5. V druhej je však použitá 5 a tá už je vo vnútorných políčkach, táto možnosť teda nespĺňa naše kritéria. Prvá je v poriadku.

Zatiaľ sme do vnútorných umiestnili iba jednu päťku. Čo by sa však stalo ak by sme tam mali dve? Týmto umiestnením by sme v najvyššom políčku dostali 5^6 a teda v krajných políčkach by bola iba trojka a prázdne políčko (keďže jednotku nesmieme použiť).

Tým sme rozobrali všetko, čo sa mohlo diať, a dostali sme štyri riešenia.

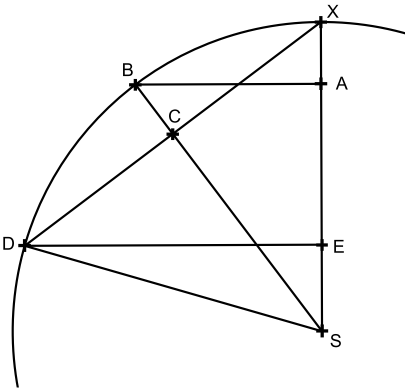
Odpoveď: Do ľavého dolného políčka môžeme dosadiť 3, 15, 25 a 125.

Komentár: Najväčšími chybami v tomto príklade bolo neporiadne prečítané zadanie. Niektorí si nevšimli, že sa nemôže jedno číslo vyskytnúť v pyramíde dvakrát. Potom už väčšina dospela k nejakému riešeniu, ale uspokojili sa s jedným a nehľadali ďalej, čo viedlo k strate bodov.

Príklad č. 9 (opravoval Peťo):

Zadanie:

Riešenie: Najprv si poďme narysovať obrázok podľa zadania (POZOR: To, že sme si narysovali obrázok, ešte neznamená, že teraz môžme zobrať pravítko a odmerať dĺžky! Obrázok nám má len pomôcť pri riešení, aby sme sa ľahšie vedeli zorientovať.). Výsledok nášho rysovania je možné vidieť na obrázku 5.



Obr. 5: Narysované zadanie

Bod B sme si mohli zvoliť na ľubovoľnej strane od úsečky SX, pretože celý obrázok by sa len otočil.

Pred tým, než sa pustíme do riešenia, povedzme si niečo o Pytagorejských trojuholníkoch. Sú to trojuholníky, ktoré majú jeden uhol pravý a všetky ich strany majú celočíselnú dĺžku. Jedným z takýchto trojuholníkov je aj trojuholník so stranami dĺžky 3, 4 a 5. Overme, či v ňom platí Pytagorova veta (tá hovorí, že súčet obsahov štvorcov zostrojených nad odvesnami pravouhlého trojuholníka je rovný obsahu štvorca zostrojeného nad jeho preponou; inak $a^2 + b^2 = c^2$): $3^2 + 4^2 = 25 = 5^2$.

Teraz prejdime k riešeniu. Trojuholník SAB je pravouhlý (pretože AB je zo zadania kolmé na SA) s pravým uhlom pri bode A, jedna odvesna (strana SA) má dĺžku 4 a prepona (strana SB) má dĺžku 5, teda je to Pytagorejský trojuholník a jeho druhá odvesna (AB) má dĺžku 3. Trojuholníky SAB a SXC sú podľa vety *sus* (dva trojuholníky sú zhodné, ak sú dve ich strany zhodné, a tiež uhol, ktorý tieto strany zvierajú, je zhodný) zhodné, pretože strany SC, SA a SX, SB majú rovnaké veľkosti a majú spoločný uhol CSA. Tým pádom aj trojuholník SXC je pytagorejský s pravým uhlom pri vrchole C a strana XC má dĺžku 3.

Rovnako ako trojuholník SAB je aj trojuholník SCD pytagorejský so stranou DC dĺžky 3 a pravým uhlom pri vrchole C (rozmyslime si prečo). Keďže uhly SCD a SCX sú oba pravé, body D, C a X ležia na jednej priamke (rozmyslime si prečo). Preto podľa zadania sme mohli bod D dať na dve miesta, buď tam, kde je na obrázku, alebo by bol totožný s bodom X. V druhom prípade nám však nevznikne obdĺžnik, ale úsečka, lebo body D a E by boli totožné. Tento prípad nechceme.

Pozrime sa na druhý prípad. Pretože body D, C a X ležia na jednej priamke, útvar $SXCD$ je rovnoramenný trojuholník s ramenami dĺžky 5 (polomer kružnice) a základňou dĺžky 6 ($|DC| + |CX|$). Obsah trojuholníka SXD vieme vypočítať dvoma spôsobmi:

$$\frac{|DX| \cdot |SC|}{2} = S_{SXD} = \frac{|SX| \cdot |DE|}{2}$$

Odtiaľto si vieme vyjadriť a vypočítať $|DE|$:

$$|DE| = \frac{|DX| \cdot |SC|}{|SX|}$$

$$|DE| = \frac{6 \cdot 4}{5} = \frac{24}{5}$$

Vypočítali sme jednu stranu obdĺžnika.

Druhú stranu (SE) vypočítame pomocou pytagorovej vety pre trojuholník SED (zo zadania vieme, že je pravouhlý s pravým uhlom pri vrchole E, lebo je to trojuholník tvorený dvoma stranami obdĺžnika a jeho uhlopriečkou):

$$|SE| = \sqrt{|SD|^2 - |DE|^2}$$

$$|SE| = \sqrt{5^2 - (\frac{24}{5})^2} = \frac{7}{5}$$

Máme už aj druhú stranu obdĺžnika.

Obsah obdĺžnika vypočítame ako súčin dvoch jeho susedných strán, v našom prípade je to teda: $S_{SEDF} = \frac{24}{5} \cdot \frac{7}{5} = 6,72$

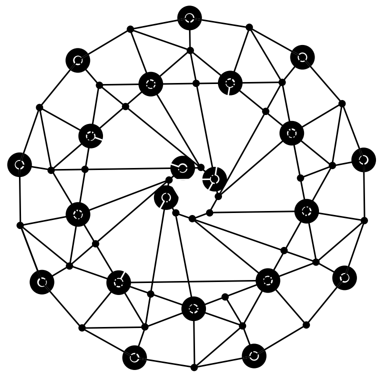
Odpoveď: Obsah obdĺžnika $SEDF$ je $6,72$.

Komentár: Tí z vás, ktorí sa príklad aj snažili vyriešiť, ho mali väčšinou dobre, len zabudli ukázať to, že body D, C a X ležia na priamke, za čo museli ísť body dole. Dúfam, že zvyšní prišli na to, že rysovanie a odmeranie dĺžok nie je správny postup riešenia a nabudúce to budú robiť poriadne.

Prémia (opravovali Andy, Dan, Janka):

Zadanie:

Riešenie: Riešenie je znázornené na obrázku 6.



Obr. 6: Ukázanie zakrúžkovania 21 vrcholov

Odpoveď: Dalo sa najviac zafarbiť 21 vrcholov.

Komentár: Väčšina z vás si s týmto príkladom poradila, no našli sa aj takí, ktorí to nemali správne a nemohli dostať plný počet bodov. Bodovali sme to tak, že tí čo mali 21 vrcholov dostali plný počet bodov. Ostatní, aj tí ktorí mali viac, aj tí ktorí mali menej, dostali rovnaký počet bodov.