Vzorové riešenia 1. kola zimnej série 2011/2012

Príklad č. 1 (opravovali Dada, Murko):

Zadanie:

Riešenie: Ako prvé si v tomto príklade musíme dorátať niektoré rozmery, ktoré nie sú priamo dorátané v zadaní. Takýmito údajmi pre nás sú napríklad dva obdĺžniky, ktoré chýbajú do kompletného veľkého obdĺžnika. Prvý z nich má šírku rovnakú ako stredný, teda $4cm$ a výšku $7 - 5 = 2cm$ (pretože $7cm$ je výška celého a $5cm$ je výška stredného odbĺžnika). Jeho obsah je preto $8cm^2$. Podobne druhý obdĺžnik má šírku $2cm$, ako najmenší, a výšku $7 - 3 = 4cm$, teda jeho obsah bude tiež $8cm^2$. Posledným krokom postupu ju uvedomiť si, že obsah šedej časti je rovný polovici obsahu veľkého obdĺžnika bez našich dvoch dopočítaných obdĺžnkov. Obsah veľkého vyrátame ako $7 \cdot (2+4+8) = 98cm^2$, jeho polovica je preto $98 \div 2 = 49cm^2$. A nakoniec odrátame naše dva obdĺžniky a dostaneme obsah šedého útvaru $49 - 8 - 8 = 33cm^2$.

Odpoveď: Obsah tmavšej časti je $33cm^2$.

Komentár: Tento príklad bol veľmi ľahký, a vy ste boli veľmi šikovní. Všetci, čo príklad odovzdali, ho teda mali dobre a zaslúžili si 10 bodov.

Príklad č. 2 (opravoval Jančo):

Zadanie:

Riešenie: Hneď na začiatku sme si všimli, že v príklade je použitých všetkých 10 cifier. Keďže $Y+N+N = Y$ a $T+E+E = T$ tak $2 \cdot N$ a $2 \cdot E$ musí mať súčet na mieste jednotiek 0. N nesmie byť 5, inak by $E + E$ muselo byť 9(keďže by sme prenášali 1), takže $N = 0$ a $E = 5$. Prenos z čísel TEN, TEN a RTY môže byť maximálne 2(keďže najextrémnejší prípad je $3 \times 999 = 2997$).

O musí byť 9, a I tým pádom 1, ak by totiž O bolo menej, tak by nenastal prenos, resp. I by bolo 0, čo už nemôže byť. Prenos je teda 2 a O je určite 9. Čísla F a S idú za sebou, F je o 1 menšie ako S. Medzi tretím a štvrtým stĺpcom má byť prenos 2, a preto $T > 5$. Postupne odkúšame všetky zvyšné možnosti.

- $T = 6$: aby bolo $R + T + T > 20$, tak $R = 8 => X = 1$ - nevyhovuje.
- $T = 7$: aby bolo $R + T + T > 20$, môže byť:
  $R = 6$ - nevyhovuje($X = 1$)
  $R = 8$ - nevyhovuje, lebo F a S by nemohli byť dve po sebe idúce čísla.
- $T = 8$: aby bolo $R + T + T > 20$, môže byť:
  $R = 4$ - nevyhovuje($X = 1$),
  $R = 6$ - nevyhovuje(F a S nejdú po sebe)
  $R = 7$- vyhovuje

Už nám chýbajú iba 4 písmenká. Do tretieho stĺpca si prenesieme jednotku a dostaneme $7 + 8 + 8 + 1 = 24$, preto $X = 4$. Ako sme spomínali, $F + 1 = S$. Z ostávajúcich čísel 2, 3 a 6 to spĺňajú iba $F = 2$ a $S = 3$. Poslednému písmenu priradíme posledné voľné číslo $Y = 6$. Na záver stačí skontrolovať, či daná rovnica platí.

Odpoveď: Rovnica má jediné riešenie a v skutočnosti vyzerá takto: $29786 + 850 + 850 = 31486$.

Komentár: Všetci ste mali správne riešenie, len niekedy ste nie všetko vysvetlili, a podľa toho sme vám strhávali body.

Príklad č. 3 (opravovali gubika, Danka K., Maťo Kuchtík):

Zadanie:

Riešenie: Ako prvé si vysvetlíme najčastejšiu chybu, ktorú ste robili. Pokiaľ je veta: „Borumír je klamárska opica.“ klamstvo, neznamená to ešte, že Borumír je pravdovravný človek! Je tu aj možnosť, že Borumír môže byť klamársky človek alebo pravdovravná opica, pre tie je spomínaný výrok tiež klamstvom. (Náš výrok môžme bez toho, aby sa zmenil jeho význam, prepísať aj ako „Borumír je klamár a je opica.“ a aby výrok, ktorý obsahuje spojku „a“, bol nepravdivý, stačí, aby bola nepravdivá jedna jeho časť, teda aby Borumír bol pravdovravný alebo človek, alebo aj oboje.)

A teraz k riešeniu nášho príkladu. Začnime Borumírom, ktorý hovorí jednoduchší výrok. Ak by bol Borumír poctivec, musel by poctivcom byť aj Alfonz (z Borumírovho tvrdenia). No Alfonz tvrdí, že Borumír je klamárska opica (aby to bola pravda, musia samozrejme byť pravdivé obe časti), čo ale nemôže byť pravda, keď predpokladáme, že Borumír je poctivec.

Borumír je teda klamár. Z jeho výroku, ktorý musí byť klamstvom, teda vieme, že aj Alfonz musí byť klamár. Aby Alfonzova prvá veta bola klamstvom, musí byť Borumír človek (vieme už, že Borumír je klamár, teda táto časť nepravdivá byť nemôže). V druhej vete Alfonz tvrdí, že je človek. Keďže je to klamár, tak táto veta nie je pravdivá, preto je to opica.

Odpoveď: Alfonz je klamárska opica a Borumír je klamársky človek.

Komentár: Príklad väčšina z vás zvládla, jediný problém, ktorý sa vyskytol, bol, že niektorí z vás predpokladali, že ak Alfonz klame, Borumír musí byť poctivý človek a zabudli ste na zvyšné dve možnosti.

Príklad č. 4 (opravovali ViRPo, Janka):

Zadanie:

Riešenie: Súčet prvej oproti sebe stojacej dvojice zľava si označme x. Dvojica vedľa bude mať súčet $x + 1$, ďalšia $x + 2$ až posledná $x + 10$. Tento celkový súčet je rovný súčtu čísel na všetkých dresoch:

$$x + (x + 1) + (x + 2) + ... + (x + 10) = 2 \cdot (1 + 2 + ... + 10 + 11)$$

Ďalej upravujeme:

$$11x + 55 = 132$$

2	7	3	1	8	10	6	4	11	5	9
5	1	6	9	3	2	7	10	4	11	8

Tabuľka 1: Výsledné umiestnenie hráčov

	1	2	3	4	5
Farba erbu	žltá	modrá	červená	zelená	biela
Počet dievčat	1		3		
Zviera		kone			
Rastlina			vinič	hrušky	
Remeslo	hrnčiarstvo				

Tabuľka 2: Prvé doplnenie

Odpočítame 55 od oboch strán:

$$11x = 77$$

$$x = 7$$

Vypočítali sme, že súčet prvej dvojice bude 7. Súčet druhej dvojice bude teda 8, tretej 9 až poslednej 17. Teraz môžeme doplniť ku každému zadanému číslu číslo oprotistojaceho, keďže vieme, aký majú spolu súčet.

Momentálne nedokážeme naisto určiť žiadne číslo, a preto postupne poskúšame niekoľko možností. Pri zápise dvojice protistojacich hráčov budeme prvým číslom myslieť hráča horného a druhým číslom hráča dolného tímu.

Tretia dvojica nám môže vzniknúť len dvoma spôsobmi: $3 + 6$ a $4 + 5$ (3 a 4 sú horní hráči). Súčet 17 sa dá dosiahnuť tiež dvoma možnosťami $11 + 6$ a $9 + 8$.

Začneme teda možnosťou, že máme súčty $4+5$ a $9+8$. Jediný súčet, ktorý nám ostal pre prvú dvojicu je $3+4$, a pre deviatu dvojicu je to $11 + 4$. V jednom rade však nemôžu byť dvaja hráči s rovnakým číslom dresu, preto túto možnosť vylúčime.

Zoberme si možnosť $4 + 5$ s $11 + 6$. Teraz však nedokážeme vytvoriť deviaty pár, takže ani táto možnosť neplatí.

Tretí súčet musí teda byť $3 + 6$. Pre jedenásty súčet zostane iba možnosť $9 + 8$, pre piaty súčet len môžnosť $8 + 3$ a tým pádom pre prvý súčet $2 + 5$. Jediný voľný súčet pre deviaty súčet je $11 + 4$ preto šiesty musí byť $10 + 2$ a ôsmy $4 + 10$.

Toto je jediné správne riešenie príkladu, lebo sme postupným skúšaním vylúčili všetky možnosti pre tretí súčet a z neho sme vedeli zvyšok odvodiť.

Odpoveď: Príklad má jediné riešenie, ktoré vidíme v tabuľke 1.

Komentár: Pri riešení niektorí z vás nevylúčili všetky ostatné riešenia a zbytočne veľa písania obetovali zisťovaniu rozsahu veľkostí súčtov oproti sebe stojacich hráčov. Nezabúdajte teda do budúcna poriadne vylúčiť všetky nevyhovujúce možnosti.

Príklad č. 5 (opravovali Marka, Phil, Uľa):

Zadanie:

Riešenie: Veľmi odporúčame spraviť si tabuľku podobnú tej našej a vpisovať si informácie podľa nášho postupu. Informácie, ktoré budem brať zo zadania budem písať *kurzívou.* Začnime známymi informáciami: *Stredný rod pestuje vinič, rod, ktorý má len jednu dievčinu, sa usídlil prvý z ľava a vedľa neho je modrý rod.*

Teraz sa skúsme pozrieť na farby erbov. *Zelený rod musí byť naľavo od bieleho.* Z tejto informácie vieme, že zelený rod nemôže byť prvý(vedľa je modrý rod). Červený rod nesmie byť prvý, lebo *rod s červeným erbom mal tri dievčatá* a na 1. mieste je už vyplnené jedno dievča. Poznáme preto dve takéto usporiadania: Žltá-Modrá-Červená-Zelená-Biela alebo Žltá-Modrá-Zelená-Biela-Červená. Vieme ale, že *v rode so zeleným erbom pestujú hrušky.* Zelený rod teda nemôže byť na strednom mieste(kde sa pestuje vinič).

Žltý rod priniesol hrnčiarstvo. Vedľa toho, kto priniesol hrnčiarstvo, je ten, kto chová kone. To logicky musí byť modrý rod.

Rod s červeným erbom má 3 dievčatá. Pozrime si teda čiastočne doplnenú tabuľku 2.

Skúsme sa teraz zamerať na počty dievčat v jednotlivých rodoch. Vieme, že chýbajúce počty sú: 0,2,4. Kombináciou vzniknú nasledovné možnosti usporiadania v rodoch(tabuľka 3).

Ideme jednotlivé možnosti vylučovať(môžte ich z tabuľky vyškrtať). *Rod so 4 dievčatami choval psov.* Modrý rod teda nemohol mať 4 dievčatá, lebo už chová kone. *V rode s dvoma dievčatami pestujú jablone. Rod, ktorý nemá dievča, priniesol košikárstvo.* Jablone by mohol pestovať modrý a biely rod(Žltí majú jedno dievča, zvyšní pestujú určite niečo iné). Teda zelený rod nemôže mať 2 dievčatá. Rozoberieme si zvyšné možnosti:

Možnosť 1(Modrí bez dievčat, Zelení 4 dievčatá a Bieli 2 dievčatá): Modrí teda priniesli košikárstvo, zelení chovajú psy a bieli pestujú jablone. To nesedí, lebo *rod, ktorý priniesol rezbárstvo, pestuje čerešne* a také usporiadanie neexistuje(viď tab. 4). Modrí teda určite budú mať 2 dievčatá a pestovať budú jablone.

M Z B	M Z B	M Z B
0 2 4	2 0 4	4 0 2
0 4 2	2 4 0	4 2 0

Tabuľka 3: Možnosti doplnenia počtu dievčat

	1	2	3	4	5
Farba erbu	žltá	modrá	červená	zelená	biela
Počet dievčat	1	0	3	4	2
Zviera		kone		psy	
Rastlina			vinič	hrušky	jablone
Remeslo	hrnčiarstvo	košikárstvo			

Tabuľka 4: Nesprávna možnosť

	1	2	3	4	5
Farba erbu	žltá	modrá	červená	zelená	biela
Počet dievčat	1	2	3	4	0
Zviera		kone		psy	
Rastlina		jablone	vinič	hrušky	
Remeslo	hrnčiarstvo				košikárstvo

Tabuľka 5: Nesprávna možnosť

Možnosť 2(Zelení 4 dievčatá a Bieli bez dievčat): Zelení teda chovajú psy, bieli priniesli košikárstvo. Opäť nesedí usporiadanie pre bod *rod, ktorý priniesol rezbárstvo, pestuje čerešne* ako to vidno v tabuľke 5.

Zelení teda majú 0 dievčat a priniesli košikárstvo a bieli 4 majú dievčatá a chovajú psy. Usporiadanie pre podmienku *rod, ktorý priniesol rezbárstvo, pestuje čerešne* platí len pri bielom rode. Zvyšné pestovanie citrónov ostáva na žltý rod. *Rod, ktorý priniesol kováčstvo, susedí s rodom, v ktorom pestujú citróny.* Doplníme pre modrý rod. *Rod, ktorý priniesol tkáčstvo, chová vtáky.* Tkáčstvo ostalo jedine červenému rodu. *Rod, ktorý priniesol kováčstvo, susedí s rodom, ktorý chová mačky.* Keďže červený rod chová vtáky, mačky určite chová žltý rod. Ostáva nám vyplniť posledné políčko pre zvieratá - to budú ryby.

Výsledná tabuľka je pod číslom 6.

Odpoveď: Odpovede treba hľadať u rodu so zeleným erbom, ktorý nemá dievčatá, pestuje hrušky a priniesol košikárstvo.

Komentár: Príklad bol jednoduchý, akurát ťažký na vysvetlenie. Plný počet bodov získali iba tí, ktorí dokázali napísať taký postup, vďaka ktorému sme vedeli vyplniť tabuľku(=zistiť, komu patrí čo) a dostať sa tak k správnemu riešeniu. Len za vyplnenú tabuľku sa bohužiaľ 10 bodov nedalo získať(a už vôbec nie za výsledok bez postupu), preto odporúčame nabudúce písať aj celý myšlienkový postup(a pri týchto typoch príkladov to platí dvojnásobne). Ale chválime vás, ste šikovní, väčšina to na 10 bodov dokázala :)

Príklad č. 6 (opravovali Tinka, Hanka):

Zadanie:

Riešenie: Našou úlohou je doplniť do sedemposchodovej pyramídy čísla, ktoré spĺňajú niekoľko podmienok. Aby sme sa lepšie dokázali orientovať v riešení, niektoré políčka si nazveme písmenkami. Tieto písmenka skrývajú v sebe určité číslo, ktoré však zatiaľ nepoznáme. Do niektorých políčok si postupne budeme vpisovať aj súčty písmeniek, napríklad $6 \cdot D + 3 \cdot A$.

3 voľné spodné políčka si označíme postupne X, Y, Z. Zo zadania vieme, že každé políčko v druhom a vyššom riadku odspodu sa rovná súčtu dvoch políčok pod ním. Na základe tohto pravidla si podopĺňame pyramídu tak, aby sme štvorce s označeniami A, B a C mali vyjadrené pomocou X, D, E, Y a Z - t.j. podľa spodného riadku.

Vidíme, že:
$B = D + E$ a zároveň $B = 3 \cdot D + X$.
$C = D + 3 \cdot E$ a zároveň $C = Y + Z$.
$A = 8 \cdot D + 6 \cdot E$ a zároveň $A = C + (3 \cdot E + Y)$.
Tieto poznatky zapíšeme do pyramídy ako vidíme na obrázku 1.

Z posledných dvoch výrazov si vieme odvodiť:

$$3 \cdot E + Y = A - C$$

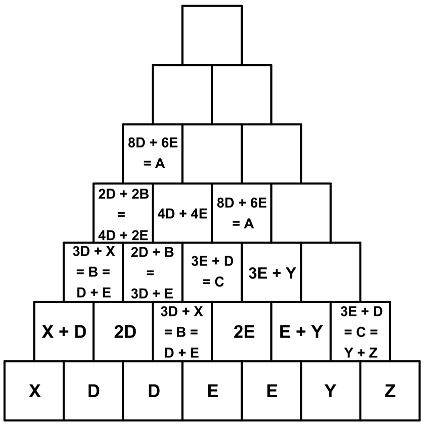
$$3 \cdot E + Y = (8 \cdot D + 6 \cdot E) - (D + 3 \cdot E)$$

$$3 \cdot E + Y = 8 \cdot D + 6 \cdot E - D - 3 \cdot E$$

$$3 \cdot E + Y = 7 \cdot D + 3 \cdot E$$

	1	2	3	4	5
Farba erbu	žltá	modrá	červená	zelená	biela
Počet dievčat	1	2	3	0	4
Zviera	mačky	kone	vtáky	RYBY	psy
Rastlina	citróny	jablone	vinič	hrušky	čerešne
Remeslo	hrnčiarstvo	kováčstvo	tkáčstvo	košikárstvo	rezbárstvo

Tabuľka 6: Doplnená tabuľka

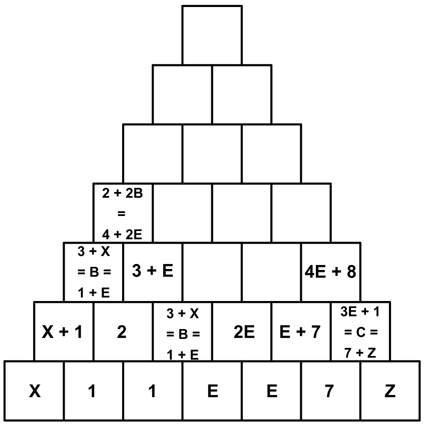


Obr. 1: Vyjadrenie A,B,C

Odrátame od oboch strán $3 \cdot E$.

$$Y = 7 \cdot D$$

Písmená Y aj D sa nachádzajú v spodnom riadku, preto musia byť obe 1-ciferné. Ak by číslo D bolo 2 alebo väčšie, Y by bolo určite dvojciferné. Zároveň D nemôže byť 0, lebo čísla D a $2 \cdot D$ musia byť rôzne. Preto $D = 1$ a $Y = 7$. (obrázok 2)



Obr. 2: Dosadenie D,Y

Pozriem sa, ako sa nám zmenilo vyjadrenie C po dosadení hodnôt D a Y:
$C = 7 + Z$ a zároveň $C = 3 \cdot E + 1$.

$$7 + Z = 3 \cdot E + 1$$

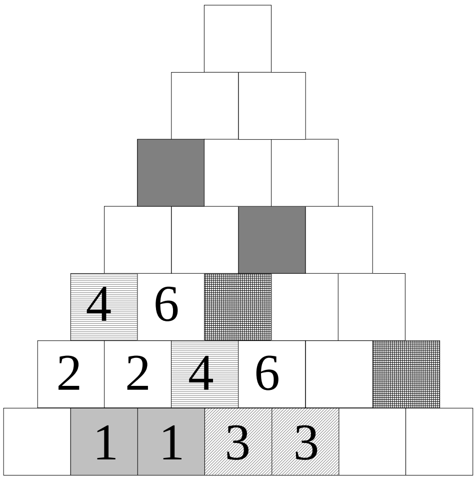
$$Z = 3 \cdot E - 6$$

Pozrieme sa, aké máme možnosti pre E. Berieme do úvahy, že E aj Z musia byť 1-ciferné a nesmú sa rovnať D a Y.

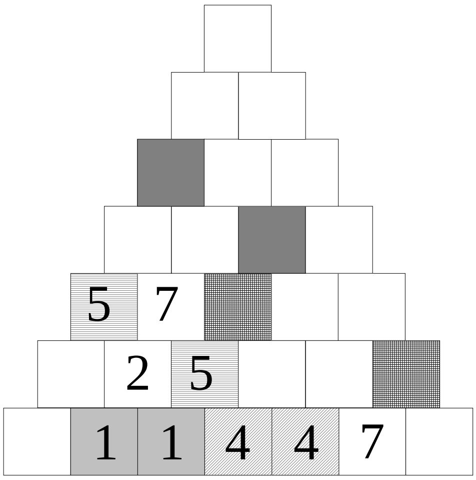
- $E \neq 0$, lebo Z nemá byť záporné číslo $(0 - 6 = -6)$.
- $E \neq 1$, lebo $D = 1$.
- $E \neq 2$, lebo $D = 1$ a štvorček nad dvomi D má hodnotu $2 \cdot D = 2$ a malo by mať inú hodnotu ako E.
- $E < 6$, lebo v opačnom prípade by bolo $Z > 9$.

Ostali nám teda 3 možnosti a postupne si všetky 3 preveríme:
Ak $E = 3$: Na obrázku 3 vidíme, že sa nám opakujú čísla na miestach, kde by sa nemali. Táto možnosť nám nevyhovuje.

Ak $E = 4$: Taktiež sa nám opakujú čísla, ktoré sa nemajú, preto túto možnosť vylúčime. Opakujúce čísla vidíme na obrázku 4



Obr. 3: $E = 3$



Obr. 4: $E = 4$

Ak $E = 5$: Všetko vychádza a spĺňa podmienky zo zadania. Pomocou hodnôt E, D, Y už vieme dorátať celú pyramídu, vidíme ju na obrázku 5.

Len v tomto jedinom prípade nám vyjde riešenie vyhovujúce podmienkam zadania.

Odpoveď: Pyramída sa dá vyplniť len jedným spôsobom.

Komentár: Príklad nebol ťažký, mnohí z vás v ňom však spravili tú istú chybu. Bez problémov ste prišli na to, že $D = 1$, veľa z vás si však nevšimlo, že ak $E = 4$, čísla 2 a 7 sa vám opakujú na miestach, kde sa nesmú. Pokiaľ ste ale mali riešenie až potiaľto bezchybné a pekne popísané, stratili ste len 1 bod. Body ste potom väčšinou strácali skôr za nedostatočné vysvetlenie postupu než za nejaké vážnejšie chyby. Za samotné riešenie ste získali 2 body a tí, čo nám napísali síce nesprávne riešenie, ale aspoň s jednou správnou neznámou (väčšinou to bolo $D = 1$), získali 1 bod.

Príklad č. 7 (opravoval Peťo):

Zadanie:

Riešenie: Na obrázku **??** je náčrt štvorcov. Máme vypočítať obsah plochy, na ktorej sa štvorce $ABCD$ a $EFGH$ prekrývajú (obsah štvoruholníka $BJHI$), tak sa do toho pustime.

Z vlastností štvorcov vieme, že ich vnútorné uhly sú pravé (majú 90°) a taktiež ich uhlopriečky zvierajú pravý uhol (sú na seba kolmé) a teda je pravda:

$$|\sphericalangle AHB| = |\sphericalangle IHJ| = 90^\circ$$

Z obrázku vidíme, že $\sphericalangle AHB$ je zložený z dvoch uhlov - $\sphericalangle AHI$ a $\sphericalangle IHB$ - a $\sphericalangle IHJ$ je zložený z uhlov - $\sphericalangle IHB$ a $\sphericalangle BHJ$. Dosaďme si to do rovnosti:

$$|\sphericalangle AHI| + |\sphericalangle IHB| = |\sphericalangle IHB| + |\sphericalangle BHJ|$$

$$|\sphericalangle AHI| = |\sphericalangle BHJ|$$

Zistili sme, že uhly $\sphericalangle AHI$ a $\sphericalangle BHJ$ sú *rovnako veľké.*

250

100 150

38 62 88

14 24 38 50

6 8 16 22 28

4 2 6 10 12 16

3 1 1 5 5 7 9

Obr. 5: $E = 5$

Úsečky AH a BH sú obe polovice z uhlopriečok štvorca a teda su tiež *rovnako veľké* a so stranami štvorca zvierajú uhol $45°$. Z toho je zrejmé:

$$|\sphericalangle HAI| = |\sphericalangle HBJ| = 45°$$

Podľa vety *usu* o zhodnosti trojuholníkov (dva trojuholníky sú zhodné, ak majú rovnakú stranu a uhly k nej prislúchajúce) môžeme vyhlásiť trojuholníky AIH a BJH za zhodné. A teda obsah štvoruholníka $BJHI$ je rovný obsahu trojuholníka ABH, ktorého obsah je $\frac{1}{4}$ z obsahu štvorca $ABCD$, čo je $25cm^2$.
Odpoveď: Obsah prieniku štvorcov je $25cm^2$.
Komentár: Takmer všetci ste prišli k správnemu výsledku, no veľa z vás zabudlo na to, že je potrebné korektne dokázať, prečo sa niečo rovná niečomu inému, alebo prečo môžem urobiť to, čo som urobil bez toho, aby som ovplyvnil výsledok, za čo bohužiaľ museli ísť body celkom nízko.

Príklad č. 8 (opravovala Betka):

Zadanie:
Riešenie: Hľadáme čo najmenšie číslo, ktoré spĺňa podmienky zo zadania.

Jednotlivé podmienky môžeme sformulovať aj tak, že ak k číslu, ktoré hľadáme, pripočítame jednotku, bude toto číslo deliteľné 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10. Čiže stačí, aby sme našli najmenší spoločný násobok týchto čísel. A tým je 2520. Keď odpočítame jednotku, dostávame číslo, ktoré sme hľadali, 2519.

Druhou úlohou bolo zistiť, či platí, že každé štvorciferné číslo $\overline{abcd}$ dáva po delení 7 rovnaký zvyšok ako $2 \cdot \overline{ab} + \overline{cd}$.

Číslo $\overline{abcd}$ si vieme napísať ako $100 \cdot \overline{ab} + \overline{cd}$. Potom zo 100 vyjmeme časť deliteľnú 7. Dostaneme $(98 + 2) \cdot \overline{ab} + \overline{cd}$, čo je vlastne $(7 \cdot 7 \cdot 2 + 2) \cdot \overline{ab} + \overline{cd}$. Ďalej roznásobíme zátvorku. $(7 \cdot 7 \cdot 2 \cdot \overline{ab}) + (2 \cdot \overline{ab} + \overline{cd})$. Keď sa teraz pozrieme na výraz naľavo od $+$, vidíme, že ten je deliteľný 7, a preto po delení siedmimi dáva zvyšok 0. Zostala nám ešte časť napravo. Zvyšok, ktorý dáva po delení 7, je rovnaký ako zvyšok po delení, ktorý dáva štvorciferné číslo $\overline{abcd}$. A tým sme dokázali, že každé štvorciferné čílo $\overline{abcd}$ dáva po delení 7 rovnaký zvyšok ako $2 \cdot \overline{ab} + \overline{cd}$.
Odpoveď: Nebola to náhoda, platí, že každé štvorciferné čílo $\overline{abcd}$ dáva po delení 7 rovnaký zvyšok ako $2 \cdot \overline{ab} + \overline{cd}$. Najmenšie číslo, ktoré spĺňa podmienky je 2519.
Komentár: Príklad bol stredne náročný. Najväčšou chybou bolo, že niektorí si neprečítali pozorne zadanie a vyrátali iba jednu polovicu. Potom sa stávalo, že niektorí si vyskúšali pár štvorciferných čísel a pokiaľ to sedelo pre ne, usúdili, že to musí platiť.

Príklad č. 9 (opravovali Kozzy, Nika):

Zadanie:
Riešenie: V prvom rade si treba odpovedať na otázku, čo sa takou skupinou čísiel myslí. V zadaní máme uvedené dve, v každej z nich všetky celé čísla od 1 po niekoľko. To, že pôjde o celé čísla, je asi každému jasné, ale nikde sa nepíše o tom, že musia byť idúce po sebe. Nakoľko ste to tak však všetci pochopili, prispôsobili sme tomu bodovanie, a aj v tomto vzoráku budeme uvažovať len o takých skupinách.

Odpovedať na prvú otázku vôbec nie je náročné a zvládli to všetci. Stačí trochu skúšať a prídeme na to, že sa to skutočne dá. Ukážeme si však niečo iné, niečo, čo nám v budúcnosti pomôže ešte oveľa viac. Skúsime to spraviť pre čísla 1, 2, 3, 4:

- **1**, **2**, 3, 4
- **2**, **3**, 3, 4
- **3**, 4, **3**, 4
- 4, 4, 4, 4

Čo sa nám to vlastne podarilo? Uvedomme si, že keby najmenšie číslo bolo akékoľvek, výberom rovnakých dvojíc vieme vždy všetky zmeniť na číslo rovnaké ako bolo najväčšie v pôvodnej štvorici. To znamená, že z čísel 5, 6, 7, 8 vieme dostať štyri osmičky. A keď máme štyri rovnaké čísla, vieme ich rozdeliť na dvojice a zvýšiť každé o 1. Zo štyroch štvoriek teda spravíme štyri päťky, štyri šestky až napokon aj štyri osmičky. Tým sme ukázali nielen to, že vieme na rovnaké čísla premeniť čísla od 1 po 4, resp. 8, ale všetky, ktoré končia číslom deliteľným štyrmi.

Šestky sa to teda netýka. A opäť zaberie iba chvíľku prísť na to, že v tomto prípade to nie a nie vyjsť. Tak prečo? V každom kroku si vyberieme presne dve čísla a zvýšime ich o 1. Celkom teda zvyšujeme súčet čísel v každom kroku o 2. Pričítaním 2 k párnemu číslu dostaneme vždy číslo párne, pričítaním 2 k nepárnemu nepárne. Parita súčtu sa teda v každom kroku zachováva a nevieme urobiť taký krok, aby sa zmenila. Takúto vlastnosť voláme invariant a často sa využíva pri dôkazoch.

Súčet čísel od 1 po 6 je 21, teda nepárny. Na základe nájdenej vlastnosti vieme, že nepárny aj ostane, nech urobíme koľkokoľvek akýchkoľvek krokov. Naším cieľom je nakoniec získať 6 rovnakých čísel. A 6 rovnakých čísel má súčet vždy párny. To dokazuje, že pre šestku sa nám to nemôže nikdy podariť, a rovnako ani pre žiadne číslo n, ktoré je párne a súčet čísel od 1 po n je nepárny. Súčet dvoch a viacerých párnych čísel je párny, to nám paritu neovplyvní. Dôležitý je počet nepárnych čísel, ak je ich počet párny, hľadaný súčet takisto, ak ich je však nepárne veľa, aj ich súčet bude nepárny. A nepárne ich je pre n také, ktoré sú nepárnym násobkom dvoch (premyslite si).

Nenechajme sa pomýliť tým, že aj skupiny s n dávajúce zvyšok 1 po delení štyrmi (nepárne násobky dvoch zmenšené o 1) majú nepárny súčet, tieto totiž môžu mať nepárny súčet aj keď sú všetky rovnaké.

Zo slušnosti a najmä pre správnosť dôkazu by sme ešte mali overiť, že naozaj pre ostatné čísla sa to dá dosiahnuť tiež, pretože tiež by na nás pri nich mohol číhať problém, kvôli ktorému by sme čísla vyrovnať nedokázali.

Nevieme ešte nič o nepárnych číslach. Čo skupina 1, 2, 3? Ak si spomenieme, ako sme robili na začiatku štvorku, je jasné, že aj pre trojku to pôjde, pretože v použitom postupe sme štvrté číslo, teda pôvodnú štvorku ani raz nezmenili. Teda 1, 2, 3 vieme zmeniť na 4, 4, 4. To potom na 5, 5, 4, ďalej 5, 6, 5 a napokon 6, 6, 6. Tri čísla teda vieme vyrovnať na každé druhé rovnaké číslo. Ak k trojici pridáme hocikoľko štvoríc, vieme trojicu dostatočne zvýšiť a potom ju dorovnať všetkými štvoricami.

Presne to isté platí aj o päticiach a štvoriciach:

- **1**, **2**, 3, 4, 5
- **2**, **3**, 3, 4, 5
- **3**, 4, **3**, 4, 5
- **4**, **4**, 4, 4, 5
- 5, 5, **4**, **4**, 5
- 5, 5, 5, 5, 5

A ďalej:

- **5**, **5**, 5, 5, 5
- 6, 6, **5**, **5**, 5
- 6, 6, 6, **6**, **5**
- 6, **6**, **6**, 7, 6
- **6**, 7, 7, 7 **6**
- 7, 7, 7, 7, 7

Tým sme preverili všetky čísla a príklad je hotový.

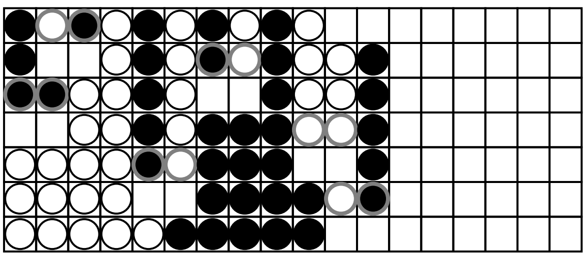
Odpoveď: Prvá postupnosť sa do požadovaného stavu dostať dá, druhá nie. Nedajú sa takisto ani skupiny, kde súčet na začiatku a na konci majú rôznu paritu, v našom prípade nepárne násobky dvoch.

Komentár: Ako už bolo povedané v úvode, tento príklad ste všetci trochu zjednodušili, čo sa už dúfam nabudúce nebude opakovať. Dokonca nikto nemal dotiahnutý dôkaz celkom dokonca, ale príklad to nebol ľahký a tak sme sa zľutovali a vyskytli sa aj zo tri plné počty. Prevažne vám však chýbalo do úplného riešenia hneď niekoľko vecí, či už ste niečo nezdôvodnili alebo vynechali, prišli k nie celkom správnemu riešeniu. Verím, že si všetci prečítate vzorák a nabudúce to bude lepšie.

Prémia (opravovali Andy, Dan):

Zadanie:

Riešenie: Tu na obrázku 6 môžeme nájsť riešenie krok po kroku. Táto možnosť nebola jediná, niektorí ste úlohu vyriešili aj inak. Šedý rám označuje krúžky, ktorými sme v ďalšom kroku hýbali.



Obr. 6: Postup pri premiestňovaní

Odpoveď: Úlohu sme dokázali splniť na 6 ťahov.
Komentár: Bodovanie tohto príkladu bolo systémom, že tí čo našli najmenej ťahov dostali plný počet a potom tí čo našli riešenie, ale na viac ťahov, získali už menej bodov. Síce nebola väčšina správnych riešení, no aspoň ste to skúsili a dostali nejaké body ;).