	Minulosť	Prítomnosť	Budúcnosť
Ted	D	T	2T-D
Dan	2D-T	D	T

Tabuľka 1: Veky Teda a Dana

Vzorové riešenia 3. kola letnej série 2011/2012

Príklad č. 1 (opravovala gubika):

Zadanie:

Riešenie: Ukážeme si dva spôsoby ako ste tento príklad riešili. Prvý spôsob je overením jednotlivých dní v týždni. Pri ňom si treba dať pozor, aby sme naozaj vyskúšali všetky dni. Nestačí nájsť prvý vyhovujúci deň, čo ak by sedel aj nejaký iný a my by sme toto riešenie nenašli?

Mohol by to byť pondelok? Kentaurovo tvrdenie by sedelo. V pondelok kentaur klame a v nedeľu hovorí pravdu, teda veta „Včera som klamal.“ by bola klamstvom. Problém je ale s jednorožcom. Ten aj v nedeľu, aj v pondelok hovorí pravdu, toto tvrdenie teda povedať nemohol. Pondelok to teda nie je.

V utorok jednorožec znova hovorí pravdu, teda tvrdenie nemohol povedať ani v tento deň. Navyše v utorok nemôže ani kentaur povedať, že včera klamal, pretože klame v oba dni.

Ani streda nám nevyhovuje. Jednorožec znova hovorí pravdu a kentaur znova klame rovnako ako v utorok.

Vo štvrtok sa situácia zmení. Kentaur hovorí pravdu, teda môže povedať, že včera klamal. Jednorožec vo štvrtok klame, ale v stredu ešte hovoril pravdu, jeho tvrdenie je teda klamstvo, a to sedí. Mohol to teda byť štvrtok.

V piatok kentaur znova vraví pravdu, teda nemôže tvrdiť, že včera klamal. Ani jednorožcov výrok nesedí.

V sobotu je situácia rovnaká, kentaur vraví pravdu.

V nedeľu by sedel jednorožcov výrok, ten v nedeľu hovorí pravdu. Nesedí nám ale kentaurov, ten rovnako ako deň predtým hovorí pravdu.

Pozrime sa ešte na iný spôsob riešenia. Kentaurovo tvrdenie je buď pravda, alebo lož. Treba nám teda rozobrať tieto dva prípady. Skúsme jeho tvrdenie pokladať za pravdu. Znamená to, že kentaur včera klamal a dnes hovorí pravdu, toto sa stáva iba vo štvrtok. Ako je to vo štvrtok s jednorožcom? Vo štvrtok klame, ale v stredu vravel pravdu. Jeho trvdenie teda sedí, mohol to byť štvrtok.

Čo ak by bol kentaurov výrok klamstvo? Znamenalo by to, že v ten deň klame, ale deň predtým musel hovoriť pravdu. Takým dňom je pre kentaura iba pondelok. A čo jednorožec? Ten aj v pondelok, aj v nedeľu hovorí pravdu, nemôže teda tvrdiť, že včera klamal. Táto možnosť nesedí, nemohla to teda byť nedeľa.

Odpoveď: Ted stretol kentaura a jednorožca vo štvrtok.

Komentár: Príklad ste všetci zvládli, no mnohí z vás, čo postupovali skúšaním, sa zastavili po nájdení jedného vyhovujúceho dňa. Keď riešite nejakú úlohu skúšaním, treba skutočne vyskúšať všetky možnosti. Inak neviete, či ste našli všetky riešenia.

Príklad č. 2 (opravovala Tinka):

Zadanie:

Riešenie: Najdôležitejšie sú pre nás tieto dve vety zo zadania:

Ted: „Ja mám teraz 2-krát toľko rokov, ako si ty mal, keď som mal toľko rokov, koľko máš teraz ty.“

Ted: „V čase, keď ty budeš mať toľko rokov, koľko ja mám teraz, budeme mať spolu 63 rokov.“

Z oboch jasne vidíme, že Ted je starší ako Dan. Rozdiel ich vekov je stále rovnaký, a to $T - D$, kde T je terajší Tedov vek a D je terajší Danov vek. V tejto úlohe sa pohybujeme v troch časoch, v minulosti, keď mal Ted D rokov; v prítomnosti; v budúcnosti, kde Dan bude mať T rokov. Tieto veky si kvôli prehľadnosti zapíšeme do tabuľky 1.

V čase, keď mal Ted D rokov(v minulosti), Dan mal $D-$rozdiel ich vekov, teda $D - (T - D) = 2 \cdot D - T$. Z prvej vety vieme, že Ted má teraz dvojnásobok rokov, ako Dan v minulosti $\rightarrow T = 2 \cdot (2 \cdot D - T)$.

Zjednodušme to:

$$T = 2 \cdot (2 \cdot D - T)$$

$$T = 4 \cdot D - 2 \cdot T$$

$$3 \cdot T = 4 \cdot D$$

Túto rovnosť si zapamätáme a skúsime zistiť niečo užitočné aj z informácií o budúcnosti. V budúcnosti bude mať Dan T rokov a Ted bude mať o ich rozdiel viac, takže $T + (T - D) = 2 \cdot T - D$. Spolu v čase budúcnosti budú mať

$$T + 2 \cdot T - D = 63$$

$$3 \cdot T - D = 63$$

$$3 \cdot T = 63 + D$$

Pomocou týchto dvoch jednoduchých rovníc, chceme zistiť, koľko rokov má Ted a koľko Dan. Z druhej rovnice vieme, že trojnásobok Tedovho veku $= 63 + D$. Dosadíme to do prvej rovnice:

$$3 \cdot T = 4 \cdot D$$

$$63 + D = 4 \cdot D$$

$$63 = 3 \cdot D$$

$$21 = D$$

Dan má teraz 21 rokov. Štvornásobok jeho veku je 84 rokov a toľko je zároveň trojnásobok Tedovho veku, čiže

$$T = 84 : 3$$

$$T = 28$$

Ted má 28 rokov.
Odpoveď: Ted má 28 a Dan 21 rokov.
Komentár: Troška sa dalo v tomto príklade zamotať, ale aj tak ho väčšina z vás zvládla bravúrne. Body išli dole hlavne, keď ste skúšali možnosti, ale nevyskúšali všetky, iba nejaké náhodné.

Príklad č. 3 (opravoval Andy):

Zadanie:
Riešenie: V začiatočnom stave máme 1 bielu a 1 čiernu guľôčku. V prvom kole môžeme vyberať z 2 guličiek a teda máme šancu 50 percent, že si vyberieme čiernu alebo bielu. Na začiatku druhého kola máme 3 guličky. Budem sa zaoberať najprv možnosťou, že máme 2 biele a 1 čiernu. Teraz si môžem vybrať dva razy bielu guličku a raz čiernu. Teda na konci druhého kola môžem mať buď dvoma rôznymi spôsobmi získané 3 biele guličky a 1 čiernu, alebo 2 biele guličky a 2 čierne guličky. Teda v týchto prípadoch by dva razy vyhral drak Kozzy a jeden raz dračica Dada. Späť na začiatok. Teraz sa budem zaoberať možnosťou, že máme na konci prvého kola 1 bielu a 2 čierne guličky. Obdobne si môžem vybrať 2 rôznymi spôsobmi čiernu guličku a jedným spôsobom bielu guličku. Na konci druhého kola by som teda mohol mať buď 2 razy 1 bielu a 3 čierne guličky alebo 2 biele a 2 čierne guličky. V týchto prípadoch by dva razy vyhral drak Peťko a raz dračica Dada. Keď sčítame súčet všetkých výhier, vyjdú nám že aj drak Kozzy, drak Peťko a dračica Dada majú zhodne po dvoch výhrach a teda nevieme kto z nich vyhrá častejšie.
Odpoveď: Nedá sa určiť ktorý z drakov vyhrá najčastejšie.
Komentár: Väčšina z vás si s tým poradila hravo. Jediná chyba ktorá sa vyskytla bola tá, že ste zabudli na možnosti, že pokiaľ máme 2 rovnaké guličky, tak ich môžeme 2 razy vytiahnuť rôznymi spôsobmi.

Príklad č. 4 (opravovali Emil, Zajo):

Zadanie:
Riešenie: Riešenie príkladu je založené na veľmi jednoduchom princípe, teda ako hovorí prvá veta zo zadania, ak boli Tinka a druhák niekde spolu, sú to dve rôzne osoby.

Riešenie začnime Tinkou. 8. pravidlo nám hovorí, že nie je šachista, 9., že nie je chrlič ohňa. Podľa 10. pravidla fotograf nebol na súťaži, no podľa 9. tam Tinka bola. To znamená, že Tinka nie je ani fotograf, a tak jej ostalo tancovanie. 1. pravidlo hovorí, že Tinka nie je druháčka. 8. a 7. pravidlo zase vravia, že Tinka je od niekoho staršia a od niekoho mladšia, teda nie je ani prváčka, ani štvrtáčka. Z toho vyplýva, že Tinka je tretiačka a tancuje.

Pri pohľade na 5. pravidlo si môžeme všimnúť, že Danka ani Phil nie sú chrliči ohňa. Keďže navyše už vieme, že Tinka je tanečníčka, chrličom ohňa musí byť ViRPo.

8. pravidlo nám povie, že šachista je od Tinky starší, teda šachista je štvrták. Podľa 6. a 7. pravidla sú ViRPo aj Phil od niekoho mladší, takže nie sú štvrtákmi, z čoho vyplýva, že štvrtáčkou je Danka, šachistka. Nakoniec Philovi ostalo fotografovanie.

Tiež nám zostali prvý a druhý ročník, pričom 6. veta nám povie že ViRPo je mladší než Phil (fotograf), teda je prvákom. Phil je tým pádom druhák.

Odpoveď: Danka je štvrtáčka a hrá šach. Tinka je tretiačka a tancuje. Phil je druhák a fotografuje. ViRPo je prvák a chŕli oheň.

Komentár: Zopár ľudí príklad nepochopilo, tým ostatným boli väčšinou strhnuté body za to, že nepovedali, podľa ktorých pravidiel súdia tak, ako súdia. Desiatok však bolo dosť a celkový výsledok je teda pekný.

Príklad č. 5 (opravovali Kuchtík, Murko):

Zadanie:

Riešenie: Ako prvé si musíme vypočítať počet políčok na šachovnici. $19 \times 19 = 361$.

Vieme, že na šachovnici, ktorá má nepárny počet políčok, je buď bielych alebo čiernych políčok viac (presne o jedno). Z bieleho políčka sa figúrka musí pohnúť vždy na čierne a takisto z čierneho na biele (definícia šachovnice je, že sa musia striedať čierne a biele štvorčeky). Teda ak sa každá figúrka posunie z políčka so svojou farbou na políčko s druhou farbou, tak nutne sa jedna figúrka z políčka danej farby, ktorých je viac, nebude mať kam posunúť. Teda takto sa to usporiadať nedá.

Odpoveď: Nie, nie je to možné.

Komentár: Príklad bol relatívne ťažký a mnohí z vás pozabudli na to, že šachovnica má biele a čierne políčka a teda to riešili o veľa zložitejšie.

Príklad č. 6 (opravovali Zuzka, Hanka):

Zadanie:

Riešenie: Našou úlohou je nájsť výherný postup (stratégiu) pre Dana. Znamená to nájsť postup, ktorým keď sa bude riadiť, tak vždy vyhrá, nech jeho súper ťahá akokoľvek. V našej úlohe musíme zistiť, kedy má Dan začať a kedy ísť druhý a aké počty zápaliek má kedy zobrať. No a to všetko pre všetky možné počty zápaliek.

Hneď na začiatku si pomerne ľahko a rýchlo uvedomíme dve skutočnosti. Poprvé, hráč, ktorý je na rade, nesmie zobrať z kopy polovicu alebo viac všetkých zápaliek, pretože druhý hráč by mohol zobrať už všetky a teda by vyhral. Jedna výnimka je, ak je už hra rozohratá a hráč by takto zobral všetky zápalky. Toto pravidlo si označme ako *pravidlo*1.

Podruhé, ak je na kope na začiaku nepárny počet zápaliek, tak ak začínajúci hráč zoberie z kopy 1 zápalku a vyhrá. Pretože protihráč už môže zobrať tiež len 1 zápalku, začínajúci hráč tiež len jednu, ... a posledná zápalka ostane pre začínajúceho hráča. Takže z tohto je zrejmé, že ak je hráč na rade a na kope je párny počet zápaliek, nemôže si potiahnuť nepárny počet, pretože pre súpera by ostal nepárny a potiahol by už len 1 zápalku. Toto pravidlo si označme ako *pravidlo*2.

Takže môžeme začať: všetky možné počty zápaliek (teda všetky prirodzené čísla okrem 1) si rozdelíme na nepárne a párne. Tie párne ďalej na tie, ktoré môžeme zapísať len ako súčin samých dvojok $(2 \cdot 2 \cdot 2 \ldots)$ a na tie, ktoré takto nemôžeme zapísať.

Nepárne čísla - Podľa *pravidla*2 by mal začať Dan a potiahnuť len jednu zápalku.

Čísla, ktoré nie je možné zapísať ako súčin len samých dvojok (čiže čísla, ktoré nie sú mocninou dvojky) - Začínať by mal Dan a potiahnuť by si mal toľko zápaliek aby sa zvyšok dal zapísať ako súčin len samých dvojok (mocnina dvojky). Určite sa to dá aj bez toho aby porušil *pravidlo*1, keďže počet zápaliek, ktoré sú na kope je niekde medzi dvoma číslami, ktoré sa dajú zapísať ako súčin samých dvojok. A to väčšie číslo je dva krát väčšie ako to menšie. Takže Dan zníži počet zápaliek na kope o menej ako polovicu. Teraz je na kope taký počet zápaliek, ktorý sa dá zapísať ako súčin len samých dvojok a na rade je Ted. To ako sa bude pokračovať opíšem ďalej.

Čísla, ktoré je možné zapísať ako súčin len samých dvojok (mocniny dvojky) - Dan si vyberie, že chce ísť ako druhý. Začína teda Ted. Z kopy môže odobrať počet zápaliek, ktorý sa dá zasa zapísať ako súčin len samých dvojok (*postupA*) alebo počet, ktorý sa dá zapísať ako súčin dvojok a jedného nepárneho čísla, napríklad $N \cdot 2 \cdot 2 \ldots$, N označuje nepárne číslo (*postupB*). Iný počet (napr. nepárny) nemôže odobrať lebo platí *pravidlo*2.

(*postupA*) - Ted teda z celkového počtu zápaliek (ktorý sa dá zapísať ako súčin samých dvojok) zobral x zápaliek, toto číslo sa dá tiež zapísať ako len súčin samých dvojok. Teraz je na rade Dan a ten odoberie rovnaký počet zápaliek ako Ted vo svojom ťahu. Na kope je teraz o $2 \cdot x$ menej zápaliek. V tomto zvyšku sa ale nachádza ešte párny krát x zápaliek (pretože pôvodný počet môžeme zapísať ako $2 \cdot x \cdot$ niekoľko dvojok). No a teraz, keď sa bude Ted a Dan striedať a budú odoberať x zápaliek, tak posledných x ostane pre Dana. Ted však môže situáciu ešte skomplikovať a potiahnuť menej ako x zápaliek vo svojom kole.

Hra sa nám teraz zmení na niekoľko podhier, v každej je na začiatku x zápaliek, prvú začína svojím ťahom Ted, keď sa táto podhra skončí začína hneď ďalšia, v ktorej ako prvý ťahá hráč, ktorý je na ťahu. Dan bude vždy ťahať, aby týmto začínajúcim hráčom bol vždy Ted. No a ešte treba dodať, že teraz (okrem poslednej podhry) nebude platiť *pravidlo*1, keďže hneď nasleduje ďaľšia podhra. Ak Ted odoberie aspoň polovicu z x zápaliek, Dan odoberie zvyšok zápaliek, túto podhru vyhral a začína ďalšia.... Ak by Ted odobral menej ako polovicu zápaliek, mohol by sa tento počet dať zapísať ako súčin samých dvojok (ďalej sa postupuje znova ako v *postupeA*) alebo odoberie taký počet zápaliek, ktorý sa dá zapísať ako súčin dvojok a jedného nepárneho čísla (napríklad $N \cdot 2 \cdot 2 \ldots$) (ďalej sa postupuje znova ako v *postupeB*). Všimnime si, že podhru vždy uzatvára Dan, takže nakoniec vyhrá celú hru.

(*postupB*) - Ted z celkového počtu zápaliek (ktorý sa dá zapísať ako súčin samých dvojok) zoberie taký počet zápaliek, ktorý sa dá zapísť ako súčin dvojok a jedného nepárneho čísla $x \cdot N$ (x označuje súčin dvojok). No a na rade je Dan a aby vyhral musí odobrať x zápaliek. A prečo je to tak? Pretože Ted a Dan odobrali spolu párny počet krát x. Na kope teda ostalo tiež x zápaliek párny počet krát (lebo na začiatku sa dal počet zápaliek zapísať ako súčin samých dvojok). No a teraz, keď sa bude Ted a Dan striedať a budú odoberať x zápaliek, tak posledných x ostane pre Dana. Ted aj teraz môže, podobne ako v *postupeA*, potiahnuť menej ako x zápaliek vo svojom kole.

Hra sa nám teraz zmení na niekoľko podhier a postupuje sa podobne ako v *postupeA*, to už určite zvládnete domyslieť. Nakoniec posledná podhra skončí tak, že posledné zápalky zoberie Dan, čiže aj vyhrá celú hru.

Odpoveď: Odpoveď je v postupe

Komentár: V riešení sme sa úmyselne vyhýbali slovu mocnina. Vy, ktorí už mocniny ovládate, ste si tento text preložili do ich reči:). Chyba, ktorá sa vo vašich riešeniach často opakovala bola, že ste ukázali stratégiu len pre niekoľko čísel, no a to bohužial nestačí (ale na druhej strane to bol aspoň slušný základ na získanie niekoľkých bodov).

Príklad č. 7 (opravoval ViRPo):

Zadanie:

Riešenie: Začnime farbiť všetky dosky hociakou farbou. Na prvej doske máme 3 možné farby, ktoré môžeme použiť. Na druhej a na každej ďalšej (ak ideme postupne z jednej strany na druhú) už iba 2 možnosti, pretože nemôžeme použiť práve tú farbu, ktorú sme použili na prvej doske. Teda počet možností na prvej doske je 3 a na všetkých ostatných 2. Počet možností je teda $3 \cdot 2^9 = 1536$.

Ak by mala byť vždy aspoň jedna sivá, musíme vylúčiť možnosti, kde sivá použitá nie je. Také sú práve dve a to také, kde sa striedajú žlté a zelené dosky s tým, že môžeme začať jednou alebo druhou farbou. Počet možností je preto $3 \cdot 2^9 - 2 = 1534$

Odpoveď: Existuje 1536 možností zafarbenia dosiek a 1534, ak má byť aspoň jedna z dosiek sivá.

Komentár: Pri kombinatorických príkladoch sa veľa ľudí mýli, pretože dajú na intuíciu, koľko by to tak asi zhruba mohlo byť. Takto sa však človek často pomýli. Niektorí ste sa dali na hľadanie možností pri aspoň jednej sivej, kde ste museli nájsť 1534 možností, kde sivá je namiesto 2 možností, kde sivá nie je, no pri tom ste sa často pomýlili a veľa z vás si myslelo, že keď jednu dosku zvolíte za sivú a budete rátať, koľko možností existuje na zafarbenie ostatných, dostanete sa ku správnemu výsledku, no v skutočnosti ste zabudli na možnosti, keď by bola sivá doska aj na iných pozíciách.

Príklad č. 8 (opravovali Peťo):

Zadanie:

Riešenie: Vieme, že číslo $\overline{abcabc}$ má byť deliteľné číslom 455, teda musí byť deliteľné aj deliteľmi čísla 455, čo sú čísla 5, 7 a 13. Teraz si skúsme rozpísať číslo $\overline{abcabc}$ v desiatkovej sústave: $\overline{abcabc} = 100100\overline{a} + 10010\overline{b} + 1001\overline{c} = 1001 \cdot (100\overline{a} + 10\overline{b} + \overline{c})$. Aby toto číslo bolo deliteľné 5, musí sa končiť na nulu alebo päťku $\rightarrow c = 0$ alebo $c = 5$. Číslami 7 a 13 bude deliteľné vždy, pretože $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$. Aké môžu byť jednotlivé cifry? Cifra a nemôže byť 0, inak môže byť ľubovoľná (9 možností), cifra b môže byť ľubovoľná (10 možností) a $c = 0$ alebo $c = 5$ (dve možnosti). Celkovo teda počet možností pre číslo $\overline{abcabc}$ je rovný $9 \cdot 10 \cdot 2 = 180$.

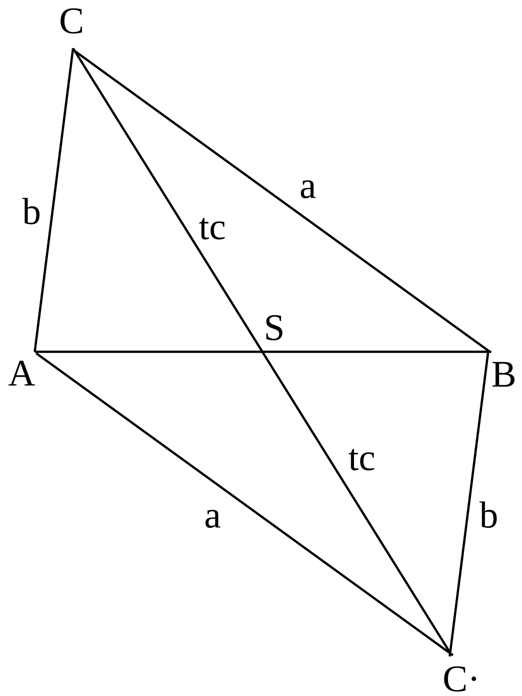
Odpoveď: Počet takých čísel je 180.

Komentár: Vyššie uvedený postup je jeden z tých zriedkavejších a elegantnejších, ako tie, ktoré ste používali vy, ale proti gustu žiaden dišputát, ide predsa o správnosť riešenia. No a príklad nebol ťažký, čo znamenalo, že som mohol rozdať celkom veľa bodov.

Príklad č. 9 (opravovali Phil, Julča):

Zadanie:

Riešenie: Príklad bol riešiteľný rôznymi spôsobmi, my si ukážeme jeden zaujímavý, ale aj jednoduchý. Narysujeme si všeobecný trojuholník ABC. Môžme ho doplniť do rovnobežníka tak, že potiahneme rovnobežku so stranou a cez bod A a rovnobežku so stranou b cez bod B. Prienikom rovnobežiek vznikne bod C' a rovnobežné strany takto vzniknutého rovnobežníka majú tiež veľkosť a, b. Predĺžime ťažnicu na stranu c (označili sme t_c) na dvojnásobnú veľkosť (spojnica CC')(pozri obrázok 1).



Obr. 1: Trojuholník predĺžený do rovnobežníka

Vieme, že aby trojuholník existoval, musí v ňom platiť trojuholníková nerovnosť: *„Súčet dĺžok dvoch ľubovoľných strán je väčší ako dĺžka tretej strany.“* Stačí túto vetu použiť na trojuholník CAC'. Spravíme si teda nerovnosť, ktorú vieme predeliť na požadovaný tvar:

$$2 \cdot tc < (b + a)$$
$$tc < \frac{a + b}{2}$$

Táto nerovnosť teda platí pre všeobecný (každý) trojuholník.
Odpoveď: Výsledkom je postup príkladu popísaný vyššie.
Komentár: Až na pár jedincov bol tento príklad vyriešený dobre (na 10 bodov). Niektorí sa rozhodli trojuholník deliť na stredné priečky a využiť trojuholníkovú nerovnosť, to bolo tiež správne. Rovnako sa to dalo riešiť aj Pytagorovými vetami (oveľa zložitejšie), ale bolo treba vedieť urobiť správne kroky.

Prémia (opravovali Danka, Nika):

Zadanie:
Riešenie: Všetky susedné izby sú poprepájané dverami a jediná pracovňa je prázdna. Keďže sa do jednej izby nemôže zmestiť viac ako jeden kus nábytku, museli sme pri presúvaní stále využívať voľnú izbu. Na začiatok sme mali voľnú pracovňu, kde sme mohli premiestniť až tri kusy nábytku. V ďalších ťahoch nám už ale zostával väčšinou iba jeden, alebo dva kusy nábytku, ktorým sme mohli hýbať do voľnej miestnosti.

Ak sme teda chceli čo najvýhodnejšie vymeniť vaňu s posteľou, postupovali sme (napríklad) takto:

Začali sme tým, že sme posteľ premiestnili do pracovne a následne sme premiestnili vaňu do voľnej kúpeľne. Potom sme do voľnej detskej izby premiestnili skriňu, posteľ sme premiestnili do obývačky, sporák do pracovne, stôl do kuchyne, posteľ do jedálne, skriňu do obývačky, vaňu do detskej izby, sporák do kúpeľne, skriňu do pracovne, posteľ do obývačky, stôl do jedálne, skriňu do kuchyne a sporák do pracovne. Nakoniec sme teda mohli konečne premiestniť vaňu do kúpeľne a posteľ do detskej izby. Celkovo sa nám to podarilo na 17 ťahov.
Odpoveď: Najmenší počet ťahov, ktorými Dan s Tedom mohli vymeniť vaňu s posteľou bol 17.
Bodovanie: Najväčší možný dosiahnuteľný počet bodov bol 6, body boli udeľované vzhľadom na počet ťahov a správnosti riešenia.
Komentár: Príklad ste zvládli celkom ľahko, viacerí z vás sa s tým naozaj vyhrali a niektorí, žiaľ, neporozumeli. Samozrejme, veľa z vás to spravilo aj na viac ťahov, bolo to možné aj tak, hlavné je, že ste to dokázali :)