Vzorové riešenia 2. kola letnej série 2011/2012

Príklad č. 1 (opravovala Dada):

Zadanie:

Riešenie: Príklad sa dal riešiť dvoma spôsobmi. Jeden z nich bol skúšanie, druhý úvahou. Pri skúšaní ste sa dostali k správnemu výsledku veľmi rýchlo, čo však bolo treba spraviť, je vyskúšať všetky možnosti. Teda ak ste začali skúšať, či môže byť prvá farba v druhom riadku žltá a vyšiel vám správny výsledok, bolo dôležité, aby ste vyskúšali, či tam nemôže byť aj modrá alebo červená.

Pri druhom spôsobe riešenia bolo najjednoduchšie zistiť, ako môže vyzerať prvý riadok. Jedným z najdôležitejších zistení bolo, že rovnaké farby musia mať medzi sebou dve iné farby. Pozrime sa, čo by sa stalo, ak by boli bližšie. Ak je vpravo v dolnom rohu bod červený, vieme, že bod vedľa neho (druhý z prava) byť červený nemôže. Pozrieme sa ďalej, či môže byť červený stredný bod v prvom riadku. Potom medzi týmito dvoma červenými bodmi je modrý (žltý) bod. Lenže keď sa teraz pozrieme na druhý riadok, vidíme, že prvý bod vpravo musí byť žltý (modrý) a druhý bod sprava musí byť rovnako žltý (modrý). Takto sme zistili, že ak je vpravo dole červený bod, ďalším červeným bodom môže byť až druhý bod zľava. Rovnakú úvahu vieme spraviť s ľavým dolným rohom, a na stredné miesto prvého radu nám zostane žltá farba. Zvyšok doplníme podľa pravidla v zadaní.

Odpoveď: Bod na vrchole pyramídy má žltú farbu.

Komentár: Príklad bol veľmi jednoduchý a takmer všetci ste sa dostali k správnemu výsledku. Strhnuté body ste mali len v prípade, že ste nedoskúšali všetky možnosti, alebo zabudli na nejakú časť postupu.

Príklad č. 2 (opravovali Monča, Zajo):

Zadanie:

Riešenie: Pri riešení tohto príkladu využijeme vlastnosti štvorca. Vieme, že má dve na seba kolmé uhlopriečky, pretínajúce sa navzájom v polovici svojich dĺžok. Nájdením týchto uhlopriečok zistíme polohu stĺpov na námestí a teda budeme vedieť nakresliť celý pôdorys. Na začiatok si nakreslíme dva body: studňu a stĺp.

Tieto dva body vytvárajú stred a vrchol štvorca. Spolu sú polovicou uhlopriečky výsledného pôdorysu. Z vlastností uhlopriečok štvorca vyplýva, že sú všetky vrcholy vzdialené od stredu rovnako. Preto si narysujeme kružnicu so stredom v bode Studňa a polomerom rovným vzdialenosti Studne a Stĺpu ako na obrázku 1.

Na tejto kružnici budú ležať všetky stĺpy, teda vrcholy hľadaného štvorca. Teraz narysujeme dve priamky. Vytvoríme nimi uhlopriečky hľadaného pôdorysu, preto budú na seba kolmé a pretínať sa budú v bode Studňa, pričom jednej z nich bude patriť bod Stĺp. Prienikom týchto priamok a kružnice budú 4 vrcholy štvorca, pretože budú rovnako vzdialené od jeho stredu a zároveň budú ležať na uhlopriečkach ako na obrázku 2.

Takto sme určili 4 stĺpy na námestí a tým pádom aj jeho pôdorys. Kvetináč nám k riešeniu nebol potrebný. Musí ležať na obvode, preto môže slúžiť ako skúška správnosti.

Odpoveď: Odpoveďou je celé riešenie príkladu.

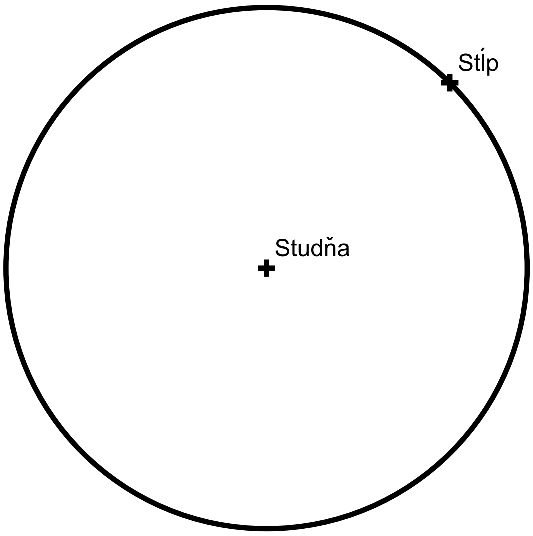
Komentár: Príklad ste vyriešili všetci správne, niekedy ste ale postup celkom neopísali. Príklady sa môžu zdať ľahké, no vy sa nemôžete spoľahnúť na to, že vaše riešenie zaručene pochopíme.

Príklad č. 3 (opravovali Emil, Murko):

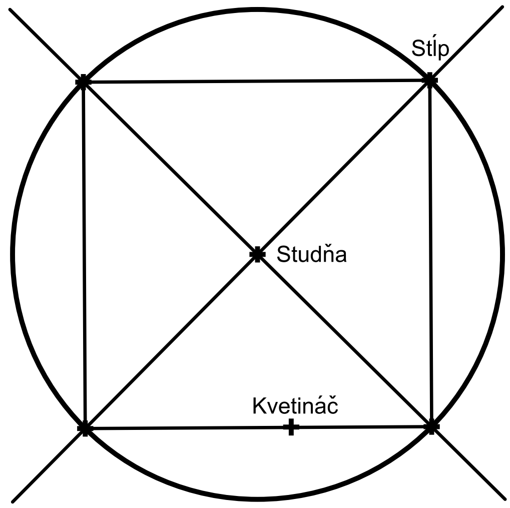
Zadanie:

Riešenie: Ako prvé si musíme uvedomiť, že obdĺžnik má protiľahlé strany rovnako veľké. Vďaka tomu vieme, že na dĺžky strán obdĺžnika musíme použiť také čísla, ktoré sa na kope nachádzajú aspoň 2-krát. Takými sú čísla 1 (5-krát), 4 (3-krát) a 6 (2-krát). Keďže obe strany obdĺžnika musia byť 2-ciferné, tak vieme, že musíme použiť maximálny možný počet týchto čísel (8). Strany obdĺžnika sa teda budú skladať z čísel 11114466. Z týchto čísel treba ďalej vytvoriť 2 páry rovnakých dvojíc, ktoré budú dĺžkami jednotlivých strán. Nie je ich veľa, preto vypísať všetky možnosti (a k nim prislúchajúce obvody), nebude problém.

Tu vidíme, že obdĺžnik môže mať obvod 60, 114, 150 alebo 204.



Obr. 1: Kružnica



Obr. 2: Konečný pôdorys

$a = 11, b = 46, (o = 114)$	$a = 14, b = 16, (o = 60)$	$a = 41, b = 16, (o = 114)$
$a = 11, b = 64, (o = 150)$	$a = 14, b = 61, (o = 150)$	$a = 41, b = 61, (o = 204)$

Teraz sa pozrime na trojuholníky. Vieme, že strany trojuholníka sa budú skladať zo zvyšných čísel, teda 012345. Potrebujeme zistiť, aké z možných obvodov trojuholníka by mohli byť rovnaké s obdĺžnikom. V prvom rade zistíme maximálny a minimálny možný obvod trojuholníka.

Maximálny získame tak, že na miesta desiatok dáme 3 najväčšie čísla (3, 4 a 5) a na miesta jednotiek 3 najmenšie (0, 1 a 2). Maximálny obvod teda bude $o = 30 + 40 + 50 + 0 + 1 + 2 = 123$.

Podobne minimálny obvod získame tak, že na miesta desiatok dáme 3 najmenšie čísla (okrem nuly, lebo nula nemôže byť na mieste desiatok, ak to má byť dvojciferné číslo), teda 1, 2 a 3 a na miesta jednotiek 2 najväčšie a nulu (0, 4 a 5). Obvod teda bude $o = 10 + 20 + 30 + 0 + 4 + 5 = 69$

Tu vidíme, že pôvodný obdĺžnik nemohol mať obvod 150 ani 204, pretože oba útvary mali rovnaký obvod a trojuholník mal obvod maximálne 123. Takisto nemohol mať obvod ani 60, nakoľko trojuholník mal obvod minimálne 69. Obdĺžnik teda mohol mať jedine obvod 114.

Teraz už iba musíme zistiť aké dĺžky strán mohol mať trojuholník, aby mal tiež obvod 114. Na mieste jednotiek obvodu je číslo 4, a preto vieme, že číslo 4 musí byť aj na mieste jednotiek súčtu troch čísel, ktoré sú na mieste jednotiek v jednotlivých dĺžkach strán. Tieto budú 3 čísla z 0,1,2,3,4 a 5, avšak jedna bude určite nula, pretože tá nesmie byť na mieste desiatok. Vzhľadom na to, že cez desiatku neprejdeme ani keby sme použili, najväčšie čísla (4 a 5), jediný možný súčet bude 4, čo dostaneme jedine ako $0 + 1 + 3 = 4$. Na mieste jednotiek teda budú čísla 0, 1 a 3 a na mieste desiatok čísla 2, 4 a 5. Takýchto trojuholníkov je 6 (20, 41, 53; 20, 43, 51; 21, 40, 53; 21, 43, 50; 23, 40, 51; 23, 41, 50) a všetky spĺňajú trojuholníkovu nerovnosť$(a + b > c)$.

Vhodné obdĺžniky sú len dva a to a=11, b=46; a=16, b=41(možnosti sú vypísané vyššie) a tak celkovo máme 6(trojuholníky) x 2(obdĺžniky) = 12 možností

Odpoveď: príklad má týchto 12 riešení.

$a = 11, b = 46, c = 20, d = 41, e = 53$	$a = 16, b = 41, c = 20, d = 41, e = 53$
$a = 11, b = 46, c = 20, d = 43, e = 51$	$a = 16, b = 41, c = 20, d = 43, e = 51$
$a = 11, b = 46, c = 21, d = 40, e = 53$	$a = 16, b = 41, c = 21, d = 40, e = 53$
$a = 11, b = 46, c = 21, d = 43, e = 50$	$a = 16, b = 41, c = 21, d = 43, e = 50$
$a = 11, b = 46, c = 23, d = 41, e = 50$	$a = 16, b = 41, c = 23, d = 41, e = 50$
$a = 11, b = 46, c = 23, d = 40, e = 51$	$a = 16, b = 41, c = 23, d = 40, e = 51$

Komentár: Body sme strhávali za rôzne veci. Napríklad ak ste nevypísali, respektíve nevysvetlili možnosti dĺžok strán obdĺžnikov. Alebo ak ste nepovedali, ako zistíte, ktoré trojuholníky sú vhodné a iba ste ich vypísali. Hodnotenie bolo vcelku veľmi pestré (snáď prvýkrát sa mi stalo, že sme mali celú škálu bodov od 0 po 10:). Príklad sa väčšine skôr podaril ako nepodaril, no nabudúce to snáď bude ešte lepšie.

Príklad č. 4 (opravovala Tinka):

Zadanie:

Riešenie: Drak sa nachádza na čísle 1 a chce postupne poskákať všetky čísla od 1 do 10. Na našu úlohu sa môžeme pozrieť dvomi spôsobmi, buď na číslo 1 už nemôžeme ísť, lebo tam stojíme, alebo na 1 musíme ísť, lebo sme na ňu ešte neskočili.

Častejšie pochopenie zadania bolo prvé spomenuté. Najprv teda predpokladajme, že drak už na čísle 1 je a nesmie sa sem vrátiť. Prvý jeho skok musí byť doprava, o 1,2 alebo 3.

- O 1 doprava (na číslo 2) skočiť nemôže, lebo pri ďalšom skoku doľava by nemal kam skočiť. ($1 \to 2$)
- Keby najprv skočil o 2 doprava (na číslo 3), následne musí skočiť na dvojku, lebo je to jediné číslo smerom doľava. Ďalší skok doprava môže byť opäť o 1,2 alebo 3. Aby neskočil viackrát na to isté číslo, prichádza do úvahy skok na číslo 4 alebo 5. Ak by sme skočili na 4, drak by už nemal kam doľava odtiaľ skočiť, lebo na číslach 1,2,3 už bol($1 \to 3 \to 2 \to 4$). Preto zvolíme druhú možnosť, skok na 5. Následne skočí doľava na 4. Dostávame sa do rovnakej situácie ako pred chvíľou, drak môže skočiť na čísla 6 a 7, ale uprednostní možnosť 7, aby potom mal kam skočiť doľava. Nachádzame sa na čísle 7, skočíme o 1 doľava, takže na číslo 6. Opäť máme na výber dve čísla: 8,9 a musíme vybrať deviatku, lebo z 8 drak nemá kam skočiť doľava. Z čísla 9 skočí drak na 8 a nakoniec doprava o 2 na číslo 10. Máme prvé riešenie, a to: $1 \to 3 \to 2 \to 5 \to 4 \to 7 \to 6 \to 9 \to 8 \to 10$. Žiadne ďalšie riešenie pre prvý skok o 2 doprava nie je.
- Overíme, či existuje ďalší spôsob ako drak môže skákať. Prvý jeho skok je doprava na číslo 4. Ďalej môže skočiť na 2 alebo 3. Ak by skočil na 2, môže skočiť na 3 ($1 \to 4 \to 2 \to 3$ - lenže potom už nemá kam doľava ísť) alebo na 5. Ostáva mu skočiť z čísla 5 na 3 a následne o 3 doprava na 6 ($1 \to 4 \to 2 \to 5 \to 3 \to 6$). Odtiaľ však nemá kam doľava ísť. Táto vetva nie je správna. Skúsime teda z čísla 4 skočiť iba na 3. Teraz má na výber skok na 5 alebo 6. Z čísla 5 by mohol skočiť na 2, ale odtiaľ už nedoskočí na nepoužité políčko ($1 \to 4 \to 3 \to 5 \to 2$). Skúsime teda skočiť na 6. Odtiaľ smieme ísť doľava iba na 5. Nasledujúci skok bude doprava na 7 alebo na 8. Takto by sme vedeli s drakom doskákať až do konca, ale všimneme si, že číslo 2 sme vynechali. Takže ani táto cesta nevedie do cieľu ($1 \to 4 \to 3 \to 6 \to 5 \to 8 \to 7 \to 10 \to 9$).

Rozobrali sme všetky možnosti a našli sme iba jedno riešenie.

Skúsme sa na príklad pozrieť v skratke z druhého pohľadu - na číslo 1 sa ešte potrebujeme vrátiť. Postupujeme rovnako, drak môže na začiatok skočiť na čísla 2,3 alebo 4. Teraz by sme obdobne rozobrali všetky možnosti ako sa drak mohol pohybovať. Nezabudnime samozrejme na striedavosť skokov doprava a doľava, maximálna dĺžka skoku je 3 a snahu navštíviť všetky políčka od 1 do 10. Jediné riešenie, ktoré sme takto mohli nájsť bolo: $2 \to 1 \to 4 \to 3 \to 6 \to 5 \to 8 \to 7 \to 10 \to 9$.

Odpoveď: Drak musel skákať po číselnej osi takto: $1 \to 3 \to 2 \to 5 \to 4 \to 7 \to 6 \to 9 \to 8 \to 10$ alebo takto: $2 \to 1 \to 4 \to 3 \to 6 \to 5 \to 8 \to 7 \to 10 \to 9$.

Komentár: Tento príklad ste riešili s troška rôznymi predpokladmi, ale každému som opravovala príklad tak ako ho pochopil, teda oba postupy boli správne. Vo vzorovom riešení je druhý postup veľmi skrátený, po správnosti by sa mal rozpísať obdobne ako v prvej časti. Najviac ste robili chyby, keď ste nerozobrali všetky možnosti, kade drak mohol ísť, prípadne ste iba napísali riešenie. Viacerí z vás však boli dostatočne pozorní a šikovne vylúčili všetky nesprávne riešenia.

Príklad č. 5 (opravovali Kuchtík, Hanka):

Zadanie:

Riešenie: Najväčšie 5-ciferné číslo je 99999. Toto číslo má ciferný súčet $5 \cdot 9 = 45$. Maximálny ciferný súčet 5-ciferného čísla je teda 45. K hľadanému číslu preto môžme pripočítať najviac 45, preto hľadané číslo musí byť väčšie ako $100000 - 45 = 99955$.

Hľadané číslo sa nachádza niekde medzi číslami 99955 a 99999 vrátane.

Spomedzi týchto čísel má najmenší ciferný súčet číslo 99960, a to 33. Keďže k hľadanému číslu môžeme pripočítať najmenej 33 (menej nemôžme, lebo menší ciferný súčet nedosiahneme), musí byť číslo najviac $100000 - 33 = 99967$. Počet možností sme opäť zmenšili, a hľadané číslo sa určite nachádza v intervale 99955 až 99967, teda musí mať na mieste desaťtisícok, tisícok a stoviek cifru 9 a na mieste desiatok môže mať buď cifru 6 alebo cifru 5.

Zoberme si číslo 99960. Jeho ciferný súčet je 33 a $99960 + 33 = 99993 \to$ nepárne číslo.

Skúsme sa pozrieť na číslo 99961. Od čísla 99960 sa líši o 1 a rovnako tak aj jeho ciferný súčet. Teda celkovo sme sa k 100000 priblížili o dva, čo je párne číslo. Rovnako to je aj keď pokračujeme po číslach ďalej, ich súčet s ich ciferným súčtom sa zväčšuje o dva. Nech ale k akémukoľvek nepárnemu číslu pripočítame akékoľvek párne, výsledok bude vždy nepárny (a my chceme dostať párny výsledok - 100000). Preto na mieste desiatok určite nebude číslica 6.

Hľadané číslo je preto v rozpätí čísel od 99955 po 99959.

Pre najmenšie číslo z tohto intervalu platí, že $99955+9+9+9+5+5 = 99992$. Tento súčet je o 8 menšie ako 100000 a keďže sme už zistili, že v rámci nemeniacej-sa cifry na mieste desiatok je zmena ciferného súčtu voči zmene čísla priamo úmerná (teda pokiaľ sa číslo zvýši o 1, aj ciferný súčet sa zvýši o 1 atď.), vieme, že hľadané číslo musí byť o $8 \div 2 = 4$ väčšie. $99955 + 4 = 99959$.

Skúška: $99959 + 9 + 9 + 9 + 5 + 9 = 100000$.

Odpoveď: Dráha meria 99959 dračích stôp.

Komentár: Väčšina z vás prišla na to, že hľadané číslo musí byť väčšie ako 99955, no mnohí ste to potom vzdali a buď ste to pri každom z čísel overovali, alebo ste skúšali náhodne. Za to sme vám, žiaľ, veľa bodíkov dať nemohli. Tak či onak, plný počet bodov získali všetci, čo zredukovali počet možností aspoň na 13 (od 99955 po 99967) a až potom začali skúšať.

Príklad č. 6 (opravoval ViRPo):

Zadanie:

Riešenie: Pri tomto príklade bude ako málokedy ideálne pracovať s tabuľkami druhých mocnín. Naše hľadané číslo je druhou mocninou nejakého čísla, ktoré si označíme n. Vieme, že n musí byť odmocnina zo štvorciferného čísla, teda menšie ako odmocnina z najmenšieho päťciferného $\sqrt{10000} = 100$ a väčšie ako odmocnina z najväčšieho 3 ciferného $\sqrt{999} = 31.607...$, teda n bude medzi 32 a 99. Z tabuľky si vieme vypísať štvorce (druhé mocniny) čísel medzi 32 a 99, ktoré majú na mieste desiatok nulu. Tých je 15: 1600; 2209; 2304; 2401; 2500; 2601; 2704; 2809; 3600; 4900; 6400; 8100; 9409; 9604; 9801. Všetky spĺňajú podmienku, že sú druhou mocninou nejakého čísla a že majú na mieste desiatok nulu. Poslednú podmienku, že súčet cifier na mieste jednotiek a stoviek je rovný cifre na mieste tisícok spĺňa iba jedno, a to 9801.

Iné riešenie: A teraz niečo pre tých, ktorým sa skúšanie veľa možností nepáči.

Je potrebné si pamätať počas celého riešenia, že každé z čísiel A, B, C a D je jednociferné a nezáporné! Najprv si číslo napíšeme v jeho desiatkovom zápise: $ABCD = 1000A + 100B + 10C + D$. Zo zadania vieme, že tretia cifra (C) je nulová a že $A = B + D$, tak si to tam dosaďme. Dostaneme: $ABCD = 1000(B + D) + 100B + D = 1100B + 1001D = 11 \cdot (100B + 91D)$. Teda ak chceme, aby číslo $ABCD$ bolo druhou mocninou, musí byť číslo $100B+91D$ nutne deliteľné jedenástimi (zamyslíme sa prečo). Pripomeňme si, aké je kritérium deliteľnosti pre číslo jedenásť: „Číslo je deliteľné jedenástimi, ak je rozdiel súčtu číslic na párnom a nepárnom mieste deliteľný jedenástimi.“ Tak si poďme nájsť, aké sú číslice na jednotlivých miestach čísla $100B + 90D + D$:

Na mieste jednotiek je číslica D.

Miesto desiatok nám ovplyvňuje len číslo $90D$ a to konkrétne jeho druhou cifrou. Vieme, že jeho tretia cifra je nula, takže druhá cifra je rovná zvyšku čísla $9D$ po delení desiatimi. Tento zvyšok označme Z.

Miesto stoviek nám ovplyvňuje číslica B (priamo) a číslo $9D$ jeho prvou cifrou. Tú vieme vypočítať ako $\frac{9D-Z}{10}$. Celkovo je teda cifra na mieste stoviek je rovná $B + \frac{9D-Z}{10}$. Podmienka zo zadania $A = B + D$ nám zaručuje nerovnosť $B + \frac{9D-Z}{10} < 10$, lebo: $B + \frac{9D-Z}{10} = \frac{10B+9D-Z}{10} = \frac{9A+B-Z}{10}$ a aj keby hneď platilo, že $B = A$ a $Z = 0$, tak celý podiel je rovný A, čo je isto číslo menšie ako 10, a teda číslo $100B + 91D$ bude trojciferné.

Z kritéria deliteľnosti jedenástimi dostávame, že súčet $B + \frac{9D-Z}{10} + D - Z$ (označme ho S) má byť deliteľný jedenástimi.

Žiaľ, ani pri tomto type riešenia sa nevyhneme skúšaniu, ale počet možností bude už len zlomkom toho, čo by bolo potrebné vyskúšať inak. Konkrétne budeme skúšať rôzne možnosti pre číslicu D. Nemusíme však vyskúšať všetkých desať cifier (0 ... 9), lebo my vieme, že je rovná druhej mocnine inej cifry a teda môže byť len 0, 1, 4, 5, 6 a 9.

Ak $D = 0$, súčet $S = B$ má byť deliteľný jedenástimi $\implies$ $B = 0$, $A = 0$. Táto možnosť nemôže nastať, lebo číslo $ABCD = 0$.

Ak $D = 1$, súčet $S = B - 8$ má byť deliteľný jedenástimi $\implies$ $B = 8$, $A = 9$. Táto možnosť je riešením, preotže $ABCD = 9801 = 99^2$.

Ak $D = 4$, súčet $S = B + 1$ má byť deliteľný jedenástimi, avšak také B neexistuje.

Ak $D = 5$, súčet $S = B + 4$ má byť deliteľný jedenástimi $\implies$ $B = 7$, $A = 11$, čo je v rozpore s podmienkami.

Ak $D = 6$, súčet $S = B + 7$ má byť deliteľný jedenástimi $\implies$ $B = 4$, $A = 11$, čo je v rozpore s podmienkami.

Ak $D = 9$, súčet $S = B + 16$ má byť deliteľný jedenástimi $\implies$ $B = 6$, $A = 15$, čo je v rozpore s podmienkami.

Odpoveď: Hľadané číslo je 9801.

Komentár: Skutočne všetci, čo tento príklad riešili, ho riešili skúšaním možností, našli ste nejaké súvislosti, čím vám zostalo iba pár možností na odskúšanie a podobne. Treba si dať pozor, že v príklade nikde nepíšeme, že sa rovnaké cifry v čísle nemôžu opakovať, ak používate tabuľku, treba z nej aspoň vypísať, čo ste našli a nie iba uviesť, že ste ju použili a tu je výsledok. A nakoniec, treba vyskúšať všetky možnosti, preskúmať, či príklad nemá viac riešení a nie zastaviť pri náhodnom odhalení jedného výsledku.

Príklad č. 7 (opravovali Gubika, Julča):

Zadanie:

Riešenie: Zoberme si dve náhodné mestá na našom ostrove, nazvime ich mesto A a mesto B. Ukážeme, že sa z mesta A vieme dostať do mesta B buď priamo, alebo cez jedno iné mesto. Zo zadania vieme, že mesto A je spojené s najmenej siedmimi mestami, ak by jedno z týchto miest bolo mesto B, bola by medzi mestami priama cesta a náš dôkaz by bol skončený.

Poďme teda porozmýšľať nad prípadom, ak mestá A a B nie sú spojené priamo. Na ostrove je 14 miest, preto okrem mesta B nám ostáva ďalších šesť miest, s ktorými mesto A nie je spojené. S ktorými mestami môže byť spojené mesto B? Na ostrove ostáva už len šesť miest, s ktorými mesto A nie je spojené, teda aj v prípade, že B by bolo spojené s týmito šiestimi mestami, musela by z mesta B viesť ešte aspoň jedna cesta a tá musí končiť v niektorom zo siedmich miest, s ktorými je spojené mesto A. Toto mesto spája mestá A a B. Čiže určite bude medzi mestami A a B cesta cez najviac jedno iné mesto.

Odpoveď: Dokázali sme, že medzi každými dvoma mestami musí určite byť buď priama cesta, alebo cesta cez maximálne jedno iné mesto.

Komentár: Príklad dopadol veľmi dobre. Pochvalu si zaslúžia hlavne mnohí primánia a sekundánia / piataci a šiestaci, ktorí príklad vyriešili skutočne pekne a jednoducho.

Príklad č. 8 (opravoval Peťo):

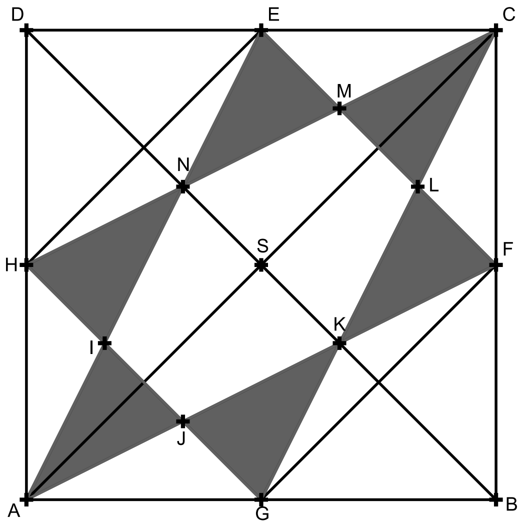
Zadanie:

Riešenie: Chceme vypočítať obsah zaujímavej časti, to je tá, ktorá je vyfarbená na sivo. Je tvorená šiestimi trojuholníkmi. Ak by tieto trojuholníky mali všetky rovnaký obsah, hneď by sa nám ľahšie počítalo. Tak skúsme ukázať, že naozaj majú:

Najprv si dokreslíme uhlopriečky štvorca $ABCD$ (obrázok 3).

O uhlopriečkach vo štvorci vieme, že sú na seba navzájom kolmé a že sa rozpoľujú. Uhlopriečka BD prechádza bodmi K a N, pretože v trojuholníku ABC sú úsečky AF, BS a CG ťažnicami (body G, F a S sú stredy strán) a o tých vieme, že sa pretínajú v jednom bode. Podobne to platí aj pre trojuholník ACD.

Pozrime sa teraz na trojuholník BCD. Úsečka EF je jeho stredná priečka (body E a F sú stredy strán), čo znamená, že rozpoľuje výšku trojuholníka (úsečka CS) a je na ňu aj kolmá (stredné priečky sú rovnobežné so stranami ku ktorým prislúchajú). Z vyššie uvedeného vyplýva, že trojuholníky KFL, LCM a MEN majú vštky rovnakú výšku (na strany FL, LM a ME), ktorej dĺžka je rovná jednej polovici jednej



Obr. 3: Mozaika

polovice uhlopriečky štvorca, čo je jedna štvrtina uhlopriečky. Obdobne to platí aj pre trojuholník ABD a teda všetkých šesť trojuholníkov, ktoré sú zafarbené na sivo, majú rovnakú výšku.

Aby mali všetky aj rovnaký obsah, potrebujeme ešte ukázať, že majú rovnakú základňu, na ktorú je kolmá daná výška. Porvnajme trojuholníky LCM a GCH. Úsečky LM a GH sú rovnovežné (ležia na stranách štvorca, ktorý vznikol pospájaním stredov strán štvorca $ABCD$). Strany CM a CH ležia na jednej priamke, rovnako tiež strany CL a CG, čo znamená, že uhly CML a CHG sú rovnaké (sú to súhlasné uhly), rovnako tiež uhly CLM a CGH. Z vyššie uvedeného vyplýva podobnosť trojuholníkov LCM a GCH, pričom strany LM a GH, LC a GC a CM a CH sú podobné. Pozrime sa teraz na ich výšky a na podobné strany LM a GH. Výška LCM je rovná jednej štvrtine uhlopriečky štvorca a výška GCH je rovná trom štvrtinám uhlopriečky štvorca $ABCD$, čo znamená, že trojuholník GCH má trikrát väčšie strany ako trojuholník LCM, strana LM má dĺžku jednej tretiny úsečky $EF(|EF| = |GH|)$. Podobne to platí aj pre trojuholníky AJI a AFE. Teraz porovnajme trojuholník MLC s trojuholníkom KFL. Uhly CLM a FLK sú vrcholové a teda zhodné. To spolu s rovnobežnosťou strán KF a CM a s rovnakými výškami zabezpečuje, že dané trojuholníky sú zhodné (rozmyslíme si prečo je to tým zaručené). Obdobne to platí pre všetky zvyšné trojuholníky a teda všetkých šesť trojuholníkov je zhodných.

Už len obsah a sme hotový. Takže máme šesť trojuholníkov, ktroých obsah je rovný jednej tretine obsahu trojuholníka EFC, čo nám spolu dáva dvojnásobný obsah ako je obsah daného trojuholníka. Označme si stranu štvorca $ABCD$ ako a, potom obsah zaujímavej časti je:

$$2 \cdot \frac{\frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2}}{2} = \frac{a^2}{4} = \frac{1000}{4} = 250\,\mathrm{cm}^2$$

Odpoveď: Obsah zaujímavej časti je 250 cm^2.
Komentár: Príklad nebol veľmi ťažký, avšak veľa z vás stratilo body na tom, že nedokázali, že všetkých šesť trojuholníkov je rovnakých, čo bolo to hlavné v tomto príklade.

Príklad č. 9 (opravoval Peťo):

Zadanie:
Riešenie: Najprv si úlohu trošku zjednodušme a uvažujme len, že má všetky mince otočiť na rovnakú stranu, je jedno či sú všetky rubom hore, alebo dole. Keď nám nezálezí na tom, akou stranou sú otočené mince, sú štyri možnosti, ako môžu byť mince na začiatku otočené - všetky štyri sú rovnako otočené, dve a dve mince v protiľahlých rohoch sú otočené rovnako, dve mince vedľa seba sú rovnako otočené, zvyšné dve sú tiež rovnako otočené, tri mince sú rovnako otočené a jedna je inak.

Začnime od najľahšieho prípadu, všetky štyri mince sú rovnako otočené. Prehlásime, že sme úlohu splinili (ešte stále nám nezáleží na tom, akou stranou sú mince otočené). Ak naozaj boli, úlohu sme splnili, ak neboli stôl sa zatočí, ale na tom, ako boli mince pootáčané sa nič nezmenilo a tak prejdeme k druhej možnosti.

Dve a dve mince v protiľahlých rohoch sú otočené rovnako. Teraz otočíme ľubovoľné dve mince, ktoré nie sú vedľa seba (chceme dostať všetky mince rovnako otočené) a prehlásime, že úlohu sme splnili. Ak sme ju nesplnili, stôl sa zatočí a my vieme, že mince neboli na začiatku rozložené ako sme doteraz predpokladali (posledné dve možnosti). Pozrime sa, čo sa stalo pri otočení dvoch protiľahlých mincí s ostatnými rozloženiami. Ak boli rovnaké vedľa seba, tak sa ako keby iba orotovali, rovnako aj keď bola jedna opačne ako ostatné, čo pri otočení stola nehrá úlohu. Prejdeme k tretej možnosti uloženia.

Dve mince vedľa seba sú rovnako otočené. Keď teraz predpokladáme, že sú mince takto otočené, tak otočíme ľubovoľné dve mince vedľa seba a prehlásime, že sme úlohu splnili. Ak sme ju nesplnili, a stále predpokladáme, že na začiatku boli dve mince vedľa seba rovnako otočené, tak teraz máme mince usporiadané ako pri druhej možnosti (zamyslíme sa prečo) a teda zopakujeme postup pre druhú možnosť usporiadania. Ak ani po tom sme nesplnili úlohu, môžeme s istotou povedať, že na začiatku bola jedna minca inak otočená ako ostatné. Počas predchádzajúceho procesu sme nemali ako zmeniť počet rôzne otočených mincí, lebo sme vždy otáčali po dve mince. Prejdeme k poslednej možnosti.

Jedna minca je inak otočená ako ostatné. Znova sa snažíme dostať všetky mince na rovnakú stranu a teda otočíme ľubovoľnú mincu a prehlásime, že sme splnili úlohu. Ak sme ju nesplnili, vieme, že teraz sú dve a dve mince rovanko otočené a oba prípady vieme vyriešiť (najprv zasa predpokladáme, že dve v protiľahlých rohoch sú rovnako a potom že sú vedľa seba).

Našli sme postup akým dostať mince, s ľubovoľného začiatočného usporiadania, na rovnakú stranu. Pri ňom však nevieme, ktorá to je (či rub, či líce). Aby bol všade rub si vieme zariadiť jednoducho a to tak, že po každom našom prehlásení, že sme úlohu splnili a nebola to pravda, otočíme všetky mince na opačnú stranu (keby sme ich dostali rubom dole).

Odpoveď: Existuje postup, akým drak vie splniť úlohu a je popísaný vyššie.

Komentár: Príklad patril medzi ťažšie. Body ste postrácali najmä na tom, že ste prešli jednu možnosť a z nej ste usúdili, že sa to s istotou nedá. No našli sa aj taký, ktorý mali ukážkové riešenie.

Prémia (opravoval Andy):

Zadanie:

Riešenie: Ukážeme si riešenie ktoré zarobilo najviac drošov. Jednorožce boli nevýhodné, pretože ich cena sa nevyplatila smerom k zisku. Takže na začiatok trebalo kúpiť kentaurov spolu s dostatočným množstvom jedla. A len prežívať do konca hry.

1. kolo: kúpime 2 malých kentaurov (do budúcnosti mk) a kúpime 6 jediel (do budúcnosti j). 2 kentauri nám spotrebujú 2 jedlá, a teda nám ostanú 4 jedlá. Z 15 drošov nám ostanú 3.

2. kolo: iba čakáme, aby nám vyrástli kentauri. Jedlo nám ostane 6 kusov.

3. kolo: kúpime 1 malého kentaura (za zvyšné 3 droše, neurobili sme tak, aby sme mali po 1. kole viac jedla). Teraz už máme 2 veľkých kentaurov (do budúcnosti vk) a 2 malých (1 čo sme teraz kúpili a druhého nám 2 vk urobili). 4 kentauri spotrebujú 4 jedenia, a teda nám po minulokolovom násobení jedla ostane 8 jedla.

4. kolo: kupovať už do konca hry nebudeme nič, pretože je výhodnejšie nechávať si kentaurov, aby sme ich mali ku koncu viac. 2 mk vyrástli na 2 vk, 2 vk z predošlého kola nám urobili 1 mk. Ostáva nám 11 jedla.

5. kolo: 4 vk nám urobili 2 mk, 1 mk vyrástol na 1 vk (2 mk, 5 vk). Jedla nám ostáva 15.

6. kolo: 5 vk nám urobili 2 mk, 2 mk vyrástli na 2 vk (2 mk, 7 vk). Jedla nám ostáva 21.

7. kolo: 7 vk nám urobili 3 mk, 2 mk vyrástli na 2 vk (3 mk, 9 vk). Jedla nám ostáva 30.

8. kolo: 9 vk nám urobili 4 mk, 3 mk vyrástli na 3 vk (4 mk, 12 vk). Jedla nám ostáva 44.

9. kolo: 12 vk nám urobili 6 mk, 4 mk vyrástli na 4 vk (6 mk, 16 vk). Jedla nám ostáva 66.

10. kolo: 16 vk nám urobili 8 mk, 6 mk vyrástli na 6 vk (8 mk, 22 vk). Jedla nám ostáva 102.

11. kolo: 22 vk nám urobili 11 mk, 8 mk vyrástli na 8 vk (11 mk, 30 vk). Jedla nám ostáva 163.

12. kolo: 30 vk nám urobili 15 mk, 11 mk vyrástli na 11 vk (15 mk, 41 vk). Jedla nám ostáva 270.

13. kolo: 41 vk nám urobili 20 mk, 15 mk vyrástli na 15 vk (20 mk, 56 vk). Jedla nám ostáva vždy viac, teda netreba ho už spomínať.

14. kolo: 56 vk nám urobili 28 mk, 20 mk vyrástli na 20 vk (28 mk, 76 vk).

15. kolo: 76 vk nám urobili 38 mk, 28 mk vyrástli na 28 vk (38 mk, 104 vk).

16. kolo: 104 vk nám urobili 52 mk, 38 mk vyrástli na 38 vk (52 mk, 142 vk).

17. kolo: 142 vk nám urobili 71 mk, 52 mk vyrástli na 52 vk (71 mk, 194 vk).

18. kolo: 194 vk nám urobili 97 mk, 71 mk vyrástli na 71 vk (97 mk, 265 vk).

19. kolo: 265 vk nám urobili 132 mk, 97 mk vyrástli na 97 vk (132 mk, 362 vk).

20. kolo: 362 vk nám urobili 181 mk, 132 mk vyrástli na 132 vk (181 mk, 494 vk). Jedla nám ostane 39857.

Teraz predáme zvieratká. $181 \cdot 3 + 494 \cdot 4 = 2519$.

Odpoveď: Po skončení hry (20 kôl) som dokázal mať na konte 2519 drošov.

Bodovanie: V tomto kole sa maximálne dalo získať za prémiu 5 bodov. Ostatným som strhával body postupne podľa toho, ako ďaleko mali od riešenia s najväčším počtom.

Komentár: Niektorí z vás si kúpili na začiatku viac zvierat, ako mali jedla a hneď im umreli takže tam bola menšia škoda. Ďalej niektorí si nedali pozor a pri určovaní prvej časti kola a konca kola spravili chyby pri množení zvierat a násobení potravy takže to som tiež nemohol uznať. Inak sa vyskytli približne podobné riešenia. Nakoniec si myslím, že sa dalo získať viac, no nepodarilo sa mi to ešte nájsť.