Číslo	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Počet paličiek	6	2	5	5	4	5	6	3	7	6
Vytvoríme čísla	6,9	-	3	2,5	-	3	0,9	-	-	0,9

Tabuľka 1: Počty paličiek v číslach

Príklad	3	6	+	5	0	=	9	3
Vytvoríme čísla	2,5	0,9	+	3	6,9	=	0,6	2,5
1. krok	2,5	0,9	+	$\underline{3}$	6,9	=	$\underline{6}$	2,5
2. krok	$\underline{2}$	0,9	+	$\underline{3}$	6,9	=	$\underline{6}$	2,5
3. krok	2	9	+	3	6	=	6	5

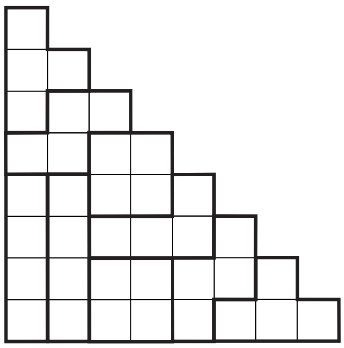
Tabuľka 2: Počty paličiek v tabuľke

Vzorové riešenia 3. kola zimnej série 2010/2011

Príklad č. 1 (opravovala Betka):

Zadanie:

Riešenie: Keďže všetky tetramina sú zložené zo štyroch štvorčekov a podľa zadania ich nesmieme prekrývať a ani trhať, tak útvary, ktoré z nich poskladáme, budú mať počet štvorčekov deliteľný štyrmi (pretože na ich poskladanie použijeme x tetramín a počet štvorčekov je potom $4x$). Prvé schody sú zložené z 36 štvorčekov, a keďže 36 je deliteľné štyrmi, tak spomenutá podmienka nás neobmedzuje. Na obrázku 1 je nakreslená jedna z možností ako to ide.



Obrázok 1: Rozloženie tetramin na prvých schodoch

Počet štvorčekov v iných schodoch je 45, a keďže 45 nie je deliteľné štyrmi, určite ich nevieme poskladať z tetramín ktoré máme k dispozícii.

Odpoveď: Schody sa dajú poskladať napríklad tak ako na obrázku 1. A iné schody sa poskladať nedajú.

Komentár: Príklad bol jednoduchý, všetci prišli na správne riešenie. Body ste stratili, ak ste nevysvetlili, prečo idú schody poskladať práve vtedy, keď je počet štvorčekov deliteľný štyrmi.

Príklad č. 2 (opravoval Phil):

Zadanie:

Riešenie: Presunutím paličky sa počet paličiek v čísle nezmení. Zapíšme do tabuľky 1, koľko paličiek tvorí ktoré číslo a ktoré čísla vieme z daného vytvoriť presunutím jednej paličky. Z čísla 3 vieme vytvoriť 2 a 5, zatiaľ čo z 2 či 5 vieme vytvoriť iba 3. Skúste si to nakresliť, zistíte, že potrebujete presunúť 2 paličky, aby ste to dokázali.

Prepíšme si príklad podobným spôsobom do tabuľky 2. Číslo 5 sa zmení jedine na 3. Zároveň číslo 9 sa musí zmeniť na 6, lebo prvá cifra čísla nie je 0(1. krok).

Prvé číslo môžeme zmeniť na 2, ale aj na 5. Súčtom má byť číslo v tvare 6_, čo by nebolo možné pri sčítancoch tvaru $5 + 3$. Preto bude prvé číslo 2(2. krok).

Ostali nám nedoplnené cifry na mieste jendotiek. Keďže potrebujeme pri súčte prejsť cez desiatky, aby platilo 2_+3_=6_, tak druhá cifra v prvom čísle nesmie byť 0, teda bude 9. V druhom čísle bude druhá cifra 6 a v treťom 5, jedine vtedy nastáva rovnosť.

Odpoveď: Výsledný tvar je $29 + 36 = 65$.

Bodovanie: Za výsledok bez rozumného vysvetlenia a postupu boli 3 body. Za zistenie súvisu s počtami paličiek medzi číslami, správne rozdelenie a vyradenie možností (to, že iné riešenie nie je) boli 3 body. Za zistenie a rozumné zdôvodnenie čísel $29 + {*}6 = {*}5$ boli 3 body. Za zistenie a zdôvodnenie čísel $** + 3* = 6*$ bol 1 bod.

Komentár: Príklad ste mali všetci vyriešený správne. Očividne pre vás teda nebol zložitý. Ale práve v jednoduchých príkladoch sa dajú body najľahšie strácať, ak nevysvetlíte detailne každý jeden krok. Ale som rád, že ste stále múdrejší a múdrejší a zvládli ste to úplne perfektne :)

Príklad č. 3 (opravoval Jančo):

Zadanie:

Riešenie: Na začiatku si všimnime, že nemohli klamať všetci, každý totiž niekoho iného označil ako schovávajúceho a niekto knihu ukryť musel. Z rovnakého dôvodu zvyšní dvaja musia klamať, pretože knihu nemohli ukryť dvaja ani traja.

Teraz vyskúšame všetky možnosti, keď budú klamať dvaja:

- Keby klamali Jano a Mišo, tak by knihu musel ukryť Jano (Fero: "Jano ukryl knihu"), ale Mišo by neklamal, keď povedal vetu: "Jano klame.", teda Mišo klame aj neklame, čo nastať nemôže, takže táto možnosť nevyhovuje.
- Keby klamali Fero a Mišo, tak by knihu musel ukryť Mišo (Jano: "Mišo ukryl knihu"), ale Fero by neklamal, keď povedal: "Mišo klame.", teda Fero klame aj neklame, čo nastať nemôže, takže táto možnosť tiež nevyhovuje.
- Keby klamali Jano a Fero, tak knihu ukryl Fero. Všetko nám platí. Janov výrok, že Fero a Mišo klamú, je klamstvo, lebo Mišo neklame.

Odpoveď: Mišo hovoril pravdu a knihu ukryl Fero.

Komentár: Mnohí z vás ste tento príklad hravo zvládli rôznymi šikovnými postupmi. Niektorí si ale mysleli, že Jano hovorí „polopravdu" vo vete: "Fero a Mišo klamú", čo je pravda iba vtedy, ak obaja klamú. Za to ste mali strhnuté body iba kozmeticky. Samozrejme sa našli aj takí z vás, ktorí nepochopili zadanie alebo tam mali viacero chýb.

Príklad č. 4 (opravovali Tinka, Danka, Nika):

Zadanie:

Riešenie: Lens bol sledovaný určitý počet dní. O týchto dňoch vieme, že každé predpoludnie a každé popoludnie bolo slnečno alebo daždivo. Existujú 4 typy dní:

- pred poludním bolo daždivo a poobede slnečno.
- pred poludním bolo daždivo a poobede tiež.
- pred poludním bolo slnečno a poobede daždivo.
- pred poludním bolo slnečno a poobede tiež.

Možnosť dva však nemohla nastať, lebo v štvrtom hlásení je povedané: „Ak popoludní pršalo, bolo pred poludním slnečno." Z toho vyplýva, že celý deň nikdy nepršalo.

Pozrieme sa teraz na ostatné výroky. Presne 5 popoludní bolo slnečno a 6 predpoludní bolo slnečno. Práve 7 dní malo aspoň jednu časť dňa daždivú. Keďže nikdy nepršalo celý deň, tak presne 7 polovíc dňa pršalo. Spolu máme $5 + 6 + 7 = 18$ polovíc dňa. Vydelením dvomi dostávame počet dní, počas ktorých bol Lens sledovaný: $18 : 2 = 9$.

Aby sme si skontrolovali, či sa to naozaj dá, vytvoríme si jeden model ako dni mohli vyzerať. Dva dni boli celé slnečné, 4 dni bolo predpoludnie slnečné a popoludnie daždivé a 3 dni boli predpoludním daždivé a popoludní slnečné.

Odpoveď: Áno, z daných údajov vieme presne zistiť, ako dlho Lensa sledovali. Sledovali ho 9 dní.

Komentár: Príklad ste drvivá väčšina zvládli výborne. Za chyby v postupe sme strhli od 1 po 3 bodíky. Veľmi nás potešilo riešenie, v ktorom bolo nakonci poučenie: Ľudia, ktorí sledovali Lensa, si mali zobrať dáždnik:)

Príklad č. 5 (opravovali ViRPo, Andy, Mária):

Zadanie:

Riešenie: Označme si stĺpce z prava do ľava písmenom S s príslušným indexom od 1 po 5, pričom S_1 je stĺpec úplne vpravo a S_5 stĺpec úplne vľavo.

Obdobne si označíme zvyšky, ktoré sa presúvajú do ďalšieho stĺpca písmenom Z s indexami od 1 po 4.

Nájdime maximálnu hodnotu pre každé Z:

- Z_1; dostávame ho ako $5 \cdot L$, čo znamená, že najväčší môže byť 4.
- Z_2; dostávame ho ako $4 \cdot A + Z_1$, čo znamená, že najväčší môže byť 4.
- Z_3; dostávame ho ako $3 \cdot R + Z_2$, čo znamená, že najväčší môže byť 3.
- Z_4; dostávame ho ako $2 \cdot O + Z_3$, čo znamená, že najväčší môže byť 2.

Teraz sa poďme bližšie pozrieť na súčet na mieste jednotiek. Vidíme, že je to $L + L + L + L + L = 5 \cdot L$, čo je vlastne L-tý násobok čísla päť. A teda sa tento výraz bude končiť cifrou 0 alebo 5. Nule sa však nemôže rovnať, pretože v zadaní bolo napísané, že písmeno P sa nerovná nule. A teda $P = 5$.

Pretože $P = 5$, tak L musí byť nepárne, jedine nepárne násobky čísla päť sa končia tiež cifrou 5. K musí byť menšie ako P, pretože rovnaké byť nemôže podľa zadania, a samozrejme nemôže byť ani väčšie, keďže pripočítaním nemôžeme dostať menšie číslo.

$$P = K + Z_4, \text{ teda } K = 3 \text{ alebo } K = 4.$$

Ak $K = 3$, potom $Z_4 = 2$. V tomto prípade musí byť $O = 9$, keď sa však pozrieme na S_4, zistíme, že nebude platiť zadanie $(9 + 9 + Z_3 \neq 29)$. Preto $K \neq 3$.

Teda $K = 4$ a $P = 5$, takže $Z_4 = 1$. Potom $O + O + Z_3 = 1O$. Keďže Z_3 je najviac 3, tak O musí byť aspoň 4. Číslam 4 a 5 sa ale nemôže rovnať, pretože tým sa už rovnajú písmená K a P.

- $O = 6$; aby platil S_4, tak by sa muselo $Z_3 = 4$ $(6 + 6 + 4 = 16)$, čo však nemôže. Teda $O \neq 6$.
- $O = 7$; aby platil S_4, tak by sa muselo $Z_3 = 3$. To vieme dosiahnuť tak, že $R = 9$ a $A = 8$, v tomto prípade však na písmeno L pripadá cifra 0, čo nemôže byť, lebo $5 \cdot 0 \neq 5$. Teda $O \neq 7$.
- $O = 8$; aby platil $S4$, tak by sa muselo $Z3 = 2$. V tomto prípade musí platiť $3 \cdot R + Z2 = 2L$. Keďže $Z2$ je maximálne 4, tak R musí byť aspoň 6.

  - $R = 6$; S_3 vyzerá nasledovne: $6 + 6 + 6 + Z_2 = 2L =>$ Z_2 je aspoň 3. Keďže L musí byť nepárne, tak $Z_2 = 3$ a potom $L = 1$. V S_2 nastáva situácia: $4 \cdot A = 3Y$. Toto sedí len ak A je 8 alebo 9. $A = 8$ nemôže byť, lebo $O = 8$. A ak $A = 9$, potom $Y = 6$, čo tiež nemôže byť, pretože už $R = 6$. Teda $R \neq 6$.
  - $R = 7$; S_3 vyzerá nasledovne: $7 + 7 + 7 + Z_2 = 2L$, keďže L má byť nepárne, tak Z_2 musí byť párne. Z jeho maximálnej veľkosti vidíme, že buď $L = 1$ ak $Z_2 = 0$, alebo $L = 3$ ak $Z_2 = 2$, alebo $L = 5$ ak $Z_2 = 4$. Posledná možnosť neprichádza do úvahy, pretože už $P = 5$.
    Ak $L = 1$, tak $Z_1 = 1$ a v S_2 nastane situácia $4 \cdot A = Y$. A môže nadobúdať jedine hodnoty 0, 1 a 2. Nula nemôže byť, pretože potom sa $A = Y$, čo nemôže byť. Jedna tiež nie, lebo už $L = 1$. A dva taktiež, $Y = 8$, ale už $O = 8$. Teda $L \neq 1$.
    Ak $L = 3$, tak $Z_2 = 2$, $Z_1 = 1$ a v S_2 nastane situácia $4 \cdot A + 1 = 2Y$. A môže nadobúdať jedine hodnoty 5 a viac. Päť nemôže byť, pretože už $P = 5$. Šesť tiež nie, lebo $Y = 5$, čo nemôže byť kvôli $P = 5$. Sedem alebo osem taktiež, kôli $R = 7$ a $O = 8$. A deväť už nemôže byť, lebo potom by sa $Z_2 = 3$ a tým by sa $L = 4$, čo je v rozpore s podmienkou, že L je nepárne. Teda $L \neq 3$.
    Teda $R \neq 7$.
  - $R = 8$; nenastáva, pretože $O = 8$.
  - $R = 9$; S_3 vyzerá nasledovne: $9 + 9 + 9 + Z_2 = 2L$, a keďže L má byť nepárne a $Z_3 = 2$, tak $L = 7$ alebo $L = 9$. Druhá možnosť neprichádza do úvahy, $R = 9$.
    Ak $L = 7$, tak $Z_2 = 0$, $Z_1 = 3$ a v S_2 nastane situácia $4 \cdot A + 3 = Y$. A môže nadobúdať jedine hodnoty jeden, alebo nula. Jedna nemôže byť, pretože $Y = 7$, avšak $L = 7$. Ak je nula, $Y = 3$. Pretože pri tejto možnosti nenastal nikde spor, znamená to, že jedno riešenie je: *K=4, O=8, R=9, A=0, L=7, P=5, Y=3.*
- $O = 9$; aby platil S_4, tak by sa muselo $Z_3 = 1$. V tomto prípade musí platiť $3 \cdot R + Z_2 = 1L$, čo znamená, že R môže byť najviac 6.
  - $R = 6$; S_3 vyzerá nasledovne: $6 + 6 + 6 + Z_2 = 1L$. Aby L bolo nepárne, musí sa $Z_2 = 1$, potom $L = 9$, čo nemôže byť, pretože $O = 9$. Teda $R \neq 6$.
  - $R = 5$; nemôže byť, lebo $P = 5$.
  - $R = 4$; nemôže byť, lebo $K = 4$.
  - $R = 3$; S_3 vyzerá nasledovne: $3 + 3 + 3 + Z_2 = 1L$. Aby L bolo nepárne, musí sa $Z_2 = 2$, potom $L = 1$.
    Ak $L = 1$, tak $Z_2 = 2$, $Z_1 = 0$ a v S_2 nastane situácia $4 \cdot A = 2Y$. A môže nadobúdať hodnoty päť, šesť alebo sedem. Päť nemôže byť, pretože $P = 5$. Šesť nemôže byť, lebo potom sa $Y = 4$, ale už $K = 4$. Ak je sedem, $Y = 8$. Pretože pri tejto možnosti nenastal nikde spor, znamená to, že druhé riešenie je: *K=4, O=9, R=3, A=7, L=1, P=5, Y=8.*
  - $R = 2$; S_3 vyzerá nasledovne: $2 + 2 + 2 + Z_2 = 1L$, čo nie je riešením, pretože Z_2 je maximálne 4, ale aj to iba ak $A = 9$, čo však nemôže byť, lebo $O = 9$. Menšie R už nemusíme skúmať, pretože tiež nesplní S_3.

Odpoveď: Existovali dve riešenia

$$\begin{array}{ccccc}
4 & 9 & 3 & 7 & 1 \\
 & 9 & 3 & 7 & 1 \\
 & & 3 & 7 & 1 \\
 & & & 7 & 1 \\
 & & & & 1 \\
\hline
5 & 9 & 1 & 8 & 5
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{ccccc}
4 & 8 & 9 & 0 & 7 \\
 & 8 & 9 & 0 & 7 \\
 & & 9 & 0 & 7 \\
 & & & 0 & 7 \\
 & & & & 7 \\
\hline
5 & 8 & 7 & 3 & 5
\end{array}$$

Komentár: Pri tomto príklade drvivá väčšina z vás spoliehala na to, že riešenie bude len jedno, čo bola veľká chyba. Robili to aj tí, ktorí mali od nájdenia ďruhého riešenia už len trocha skúšania. Inak sme hodnotili, či správne uvažujete a či ste prišli na niektoré dôležité fakty.

Príklad č. 6 (opravovala gubika):

Zadanie:

Riešenie: Zo zadania (d), vieme, že aspoň tri, teda všetky objemy kvádrov sú deliteľné siedmimi. Teda aj ich súčet, objem kocky, je deliteľný 7. Z toho vieme, že aj hrana kocky musí byť deliteľná siedmimi, lebo objem kocky počítame $a \cdot a \cdot a$ alebo a^3. Keďže 7 je prvočíslo (nie je deliteľné ničím iným len sebou samým a jednotkou) a hrana kocky je menšia alebo rovná 10, musí byť teda rovná 7. Objem kocky, je teda 343 štvorcových jednotiek a každý kváder má aspoň jednu hranu dlhú 7.

Teraz sa pozrime na bod (a), aspoň jeden z objemov je deliteľný 15-timi. Už vieme, že každý z objemov je deliteľný siedmimi, teda tento objem musí byť násobkom 7 a 15. Jediné dva násobky 7 a 15 menšie ako 343 sú 105 a 210.

Pozrime sa najprv na možnosť, že objem tohto kvádra je 210. 210 vieme rozložiť ako $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$, teda hrany tohto kvádra musia byť $5 \times 6 \times 7$ (nemôžu byť väčšie ako 7). Hrany kocky máme rozdelené na 6 a 1 jednotiek a 5 a 2, zvyšné dva kvádre teda sú buď $2 \times 6 \times 7$ a $1 \times 7 \times 7$ alebo $1 \times 5 \times 7$ a $2 \times 7 \times 7$. No v ani jednej možnosti nespĺňajú objemy všetky z podmienok (a) až (c). Kváder s objemom deliteľným 15-timi musí teda mať objem 105 jednotiek kubických.

Aj v tomto prípade máme dve možnosti aké môžu byť zvyšné dva kvádre. 105 vieme rozložiť na $3 \cdot 5 \cdot 7$, teda rozmery tohto kvádra sú $3 \times 5 \times 7$. To nám rozdeľuje hrany kocky na 3 a 4 jednotky a 5 a 2 jednotky. Prvá možnosť teda je, že zvyšné dva kvádre majú rozmery $2 \times 3 \times 7$ a $4 \times 7 \times 7$. Objemy kvádrov by v tomto prípade boli 105, 42 a 196 . Toto však nespĺňa podmienku (c), pretože iba jeden z objemov je deliteľný piatimi. Táto možnosť teda nevyhovuje.

Druhá možnosť je, že kvádre majú rozmery $4 \times 5 \times 7$ a $2 \times 7 \times 7$. Objemy kvádrov sú 105, 98 a 140. Podmienka (a) sedí, 105 je deliteľné 15-timi. Podmienka (b) sedí, 140 je deliteľné štyrmi. Podmienka (c) tiež sedí, 105 a 140 sú deliteľné piatimi a podmienka (d) tiež sedí, 105, 98 aj 140 sú deliteľné siedmimi.

Teraz už len potrebujeme vypočítať povrchy kvádrov. Vieme, že povrch kvádra sa rovná súčtu obsahov jeho stien a protiľahlé steny sú vždy rovnako veľké, platí teda vzorec $P = 2 \cdot (a \cdot b + b \cdot c + a \cdot c)$.

$$P = P_1 + P_2 + P_3$$

$$P = 2 \cdot (3 \cdot 5 + 5 \cdot 7 + 3 \cdot 7) + 2 \cdot (4 \cdot 5 + 5 \cdot 7 + 4 \cdot 7) + 2 \cdot (2 \cdot 7 + 7 \cdot 7 + 2 \cdot 7)$$

$$P = 2 \cdot (15 + 35 + 21) + 2 \cdot (20 + 35 + 28) + 2 \cdot (14 + 49 + 14)$$

$$P = 2 \cdot 71 + 2 \cdot 83 + 2 \cdot 77$$

$$P = 142 + 166 + 154$$

$$\underline{P = 462}$$

Odpoveď: Povrch kvádrov je 462 jednotiek štvorcových.
Komentár: Príklad nebol zložitý, väčšina z vás ho mala správne, no mnohí ste zabudli hľadať aj iné riešenia a zaoberali ste sa len tým, ktoré vyšlo.

Príklad č. 7 (opravoval Emil):

Zadanie:
Riešenie: Na začiatku je dobré si všimnúť, že za každý zápas boli pridelené presne dva body. Buď oba jednému tímu (víťazovi), alebo (pri remíze) po bode obom tímom. Zo zadania ďalej vieme, že Švédsko dostalo toľko bodov, ako posledné štyri tímy spolu. Tieto medzi sebou hrali šesť zápasov (5. proti 6., 5. proti 7., 5. proti 8., 6. proti 7., 6. proti 8. a 7. proti 8.). No a keďže za každý zápas boli pridelené dva body, tak posledné štyri tímy museli mať aspoň 12 bodov. Preto aj Švédsko muselo na turnaji získať aspoň 12 bodov.

Ak by ich získalo práve 12, tak by 12 bodov získali aj posledné štyri tímy. Oni ich ale získali 12 už za zápasy medzi sebou, preto by museli všetky ostatné zápasy (s tímami prvej štvorky) prehrať. To pre nás znamená, že aj piate Slovensko by muselo prehrať s prvým Českom.

Ak by Švédsko získalo 13 bodov, muselo by ich (aspoň) 13 získať aj Česko, pretože turnaj vyhralo. Každý tím však hral 7 zápasov (so zvyšnými ôsmimi tímami). 13 bodov sa dalo získať iba 6 výhrami a jednou remízou. Švédsko s Českom by tým pádom museli spolu remizovať a poraziť všetky ostatné tímy. No a to znamená, že aj v tomto prípade by Česko nad Slovenskom zvíťazilo.

Viac ako 13 bodov už Švédsko získať nemôže, lebo potom by muselo vyhrať všetky zápasy (aj s Českom) a teda by vyhralo turnaj (Česi by mali maximálne 12 bodov za 6 víťazstiev a 1 prehru).
Odpoveď: Česko muselo nad Slovenskom zvíťaziť.
Komentár: Veľa z vás riešilo príklad skúšaním. Vypísali ste si možné výsledné tabuľky, prípadne len možné získané body, avšak tieto boli vo viacerých prípadoch nereálne. Napríklad posledné dva tímy mali u niektorých spolu iba jeden bod (čo samozrejme nie je možné, keďže hrali vzájomný zápas). Nabudúce sa preto radšej uistite, či sú vaše možnosti reálne, aby ste nedostali nesprávny výsledok. Ani správne vyplnené tabuľky však neboli ideálne, lebo ak ukážete, že v dvoch, troch možných prípadoch Slovensko prehrá, ešte to neznamená, že to tak musí byť vždy. Tí, ktorí sa snažili nájsť všeobecné odôvodnenie ho väčšinou našli, hoci niektorým chýbali nejaké detaily. Takže verím, že nabudúce sa už všetci pokúsite odôvodniť svoje tvrdenie všeobecne a budeme rozdávať len desiny:)

Príklad č. 8 (opravovali Kozzy, Dada):

Zadanie:
Riešenie: K dispozícií máme len pravítko, bez akejkoľvek rysky alebo mierky a body X, A a B. S takýmto pravítkom dokážeme zostrojiť priamku iba vtedy, keď poznáme dva body na nej. Prvé, čo nám teda napadne, bude zrejme spojiť body A a X a body B a X. Zjavne nám nič nového nevzniklo a nemôžeme nič nového spraviť. Keď však priamky AX a BX predĺžime, obe sa pretnú s kružnicou, čím dostávame až dva nové body, s ktorými môžeme ďalej pracovať. Bod, v ktorom sa priamka AX pretína s kružnicou označíme C, podobne priesečník BX s kružnicou označíme D. Ak zostrojíme priamky BC a AD, získame ďalší bod (ich priesečník), ktorý označíme E.

Pozrime sa trochu bližšie na trojuholníky ACB a ADB. Keďže jednou ich stranou je priemer kružnice (AB) a ich vrcholy ležia na tejto kružnici, tak podľa Tálesovej vety majú uhly pri ich vrcholoch, C a D 90°.

Máme teda trojuholník ABE, úsečku AC kolmú na BE a úsečku BD kolmú na AE. Všimnime si, že úsečky AC a BD sú výškami trojuholníka ABE.

Vieme, že všetky tri výšky ľubovoľného trojuholníka sa nám pretínajú v jednom bode - ortocentre. Ortocentrum trojuholníka ABE je bod X, lebo v ňom sa pretínajú jeho výšky AC a BD. Tretia výška prechádza bodmi E a X a - čo je najdôležitejšie - je kolmá na úsečku AB.

Zostrojením priamky EX teda dostávame hľadanú kolmicu.
Odpoveď: Kolmicu je možné zostrojiť.
Komentár: Príklad veľa z vás vyriešilo úplne dobre. Body sme strhávali za nevysvetlenie jedného alebo oboch najdôležitejších zistení (že sa jedná o výšky v trojuholníku, a že uhly pri vrcholoch D a C sú pravé kvôli Tálesovej vete), málo vysvetlený

postup alebo za príliš kreatívne upgrade-ované pravítka (na ktoré ste dokreslili nejaké čiarky, rysky, používali ich pravé uhly), náhodne používané kružidlá, iné pravítka, uhlomery a podobné.

Príklad č. 9 (opravovala Natali):

Zadanie:

Riešenie: Začneme tým, že si krúžky rozdelíme na malé a veľké. Čísla v malých krúžkoch musia byť menšie od oboch svojich susedov a čísla vo veľkých krúžkoch musia byť od oboch svojich susedov väčšie. Všimneme si, že ak by boli vedľa seba dva malé krúžky, číslo v prvom by muselo byť menšie, ako číslo v druhom, ale zároveň by muselo byť číslo v druhom menšie, ako číslo v prvom krúžku. Také dve čísla, že prvé je menšie ako druhé a druhé je menšie ako prvé neexistujú, preto nemôžu byť dva malé krúžky vedľa seba. Rovnako ani dva veľké krúžky nemôžu byť vedľa seba (premyslite si prečo).

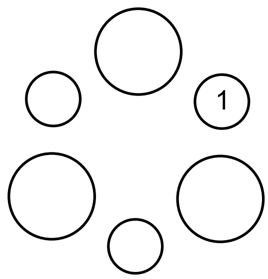
Keď už vieme, že malé a veľké krúžky sa musia striedať, ľahko zistíme, že druhá časť úlohy, kde je sedem krúžkov nemá ani jedno riešenie. Nepárny počet krúžkov znamená, že malých a veľkých krúžkov nie je rovnako veľa a potom by sa určite stalo, že dva veľké alebo dva malé by boli vedľa seba.

Pozrime sa teraz na prvú časť, keď máme krúžkov 6. Budeme mať 3 malé a 3 veľké krúžky, ktoré sa budú striedať, a do nich budeme vpisovať čísla 2 až 6. Pre začiatok zistíme, ktoré čísla môžu byť v malých krúžkoch a ktoré vo veľkých.

- Čísla 1 a 2 nemôžu mať dvoch menších susedov, takže nemôžu byť vo veľkých krúžkoch, môžu byť jedine v malých.
- Čísla 3 a 4 by mohli mať dvoch menších aj dvoch väčších susedov, takže to vyzerá, že tie môžu byť tam aj tam.
- Čísla 5 a 6 nemôžu mať dvoch väčších susedov, takže tie musia byť vo veľkých krúžkoch.

Máme teda dve možnosti. Buď budú v malých krúžkoch čisla 1, 2 a 3 a vo veľkých 4, 5 a 6, alebo budú v malých krúžkoch čisla 1, 2 a 4 a vo veľkých 3, 5 a 6.

Jednotku máme pevne danú, a vieme, že tá je v malom krúžku, takže už vieme presne určiť, ktoré krúžky budú malé a ktoré veľké(obr. 2).



Obrázok 2: škatuľa so šiestimi krúžkami

Keď už sme si všetko toto zistili, môžme začať dopĺňať čísla. Musíme rozobrať dva rôzne prípady.

1. V malých krúžkoch sú čísla 1, 2 a 3. Jednotka je pevne daná, takže dvojka môže byť v jednom z dvoch zostávajúcich krúžkov. Keď dáme dvojku do jedného z nich, trojka musí ísť do druhého, takže máme dve možnosti ako písať čísla 2 a 3. Keďže každé z čísel 4, 5, 6 je väščie ako 1, 2, 3, nezáleží na tom, kde budú vpísané, podmienka bude vždy splnená. Číslo 4 môže byť v jednom z troch veľkých krúžkov, a v každej možnosti môže byť päťka v jednom z dvoch zostávajúcich. Šestku už potom iba vpíšeme do posledného zostávajúceho krúžku. Pri každej z dvoch možností ako vpísať čísla dva a tri máme $3 \cdot 2 = 6$ možností ako vpísať čísla 4, 5 a 6, dokopy teda máme $2 \cdot 6 = 12$ možností.
2. V malých krúžkoch sú čísla 1, 2 a 4. Dvojku môžme dať opäť do jedného z dvoch malých krúžkov. Tým, že vpíšeme dvojku, sú už pevne určené čísla 3 aj 4, lebo 3 musí byť väčšie od oboch susedov (teda medzi jednotkou a dvojkou) a 4 musí byť v zostávajúcom malom krúžku. Pri každej z dvoch možností ako usporiadať čísla 2, 3 a 4 a sú zase dve možnosti ako usporiadať čísla 5 a 6, dokopy máme teda $2 \cdot 2 = 4$ možnosti.

Vidíme, že v prvom prípade máme 12 možností a v druhom 4, takže dokopy existuje 16 možností.

Odpoveď: Šesť krúžkov sa dá vyplniť 16 spôsobmi, sedem krúžkov sa nedá vyplniť.

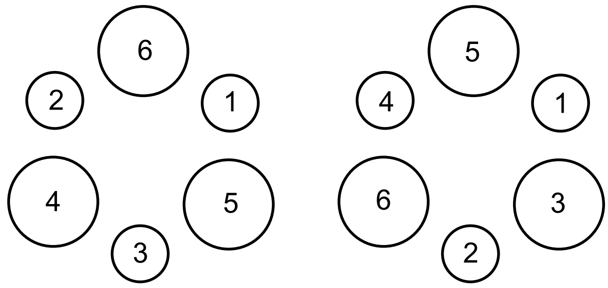
Komentár: Mnohí z vás tento príklad zvládli veľmi pekne, za čo máte odo mňa pochvalu. Niektorí však robili chyby, keď našli nejaké možnosti a nezisťovali, či už majú všetky. Potom sa stávalo, že zabudli na druhý prípad, keď sú v malých krúžkoch čísla 1, 2 a 4. Pozor na to, vždy treba overiť všetky možnosti :)

Prémia (opravoval Peťo):

Zadanie:

Doplnené zadanie: Vošiel dnu a ocitol sa na chodbe, kde sa nachádzalo 5 obrovských dverí vedľa seba na jednej stene. Každé boli inej farby. Podľa nápisu na stene oproti sa za tými dverami ukrývajú hrobky 5 rôznych kráľov. Každý z nich mal iný obľúbený nápoj, choval iné zviera a mal obľúbený iný druh boja. O dverách vieme toto:

- Asýrčan má hrobku za červenými dverami.
- Sýrčan chová psa.
- Káva bola obľúbeným nápojom kráľa, ktorého hrobka je za zelenými dverami.



Obrázok 3: príklady, ako môžu byť vyplnené krúžky

- Riman pije vodku.
- Zelené dvere stoja vpravo vedľa bielych dverí (z pohľadu pozorovateľa dverí)
- Ten, čo najradšej bojuje s mečom chová slimáky.
- V žltých dverách má hrobku ten, čo rád bojoval so sekerou.
- Mlieko sa pije v prostredných dverách.
- V prvej hrobke sprava je pochovaný Grék.
- Pacifista je pochovaný vedľa dverí, v ktorých je hrobka kráľa, čo chova líšku.
- Hrobka toho, čo rád bojoval so sekerou, susedí s hrobkou, v ktorej pochovaný kráľ choval koňa.
- Zápasník pije pomarančovú šťavu.
- Babylončan má najradšej súboje na život a na smrť.
- Grék je pochovaný vedľa modrých dverí.
- V jednej hrobke bola obľúbeným nápojom kráľa voda.
- V jednej hrobke kráľ choval zebru.

Zistite z týchto údajov, kto mal najradšej vodu a kto choval zebru.

Riešenie: Najjednoduchšie ako sa tento príklad dal vyriešiť je pomocou tabuľky, ktorá bude predstavovať dvere tak, ako ich vidíme. K týmto dverám budeme postupne priraďovať zistené informácie o ich farbe, kráľovi, ktorý je v nich pochovaný, nápoji, ktorý obľuboval, zvierati, čo choval a spôsobe boja, ktorý preferoval. Pri čítaní vzoráku sa oplatí nakresliť si vlastnú tabuľku a spolu s nami si do nej zapisovať, čo nového sme zistili.

Zo zadania vieme, že Grék je pochovaný v dverách, ktoré sú úplne napravo.

Ďalej vieme, že dvere vedľa Gréka sú modré. Pretože Grék je pochovaný v 5. dverách, musia byť 4. dvere modré, lebo tie jediné susedia s piatymi dverami.

Ďalej je povedané, že mlieko sa pije v prostredných dverách.

Zelené a biele dvere majú byť vedľa seba, to znamená, že môžu byť jedine na pozíciach 1. a 2. alebo 2. a 3. Na štvrtom mieste nemôžu byť ani jedny, tam sú modré dvere, a tým pádom ani na piatom. Vieme však, že zelené sú vpravo od bielych a že sa v nich pije káva. Preto nemôžu byť na treťom mieste, lebo tam sa pije mlieko. Teda *zelené dvere sú na druhej pozícii a biele na prvej.*

Kráľ pochovaný v zelených dverách pil kávu.

V červených dverách je podľa zadania pochovaný Asýrčan. Pre tieto dvere zostala voľná tretia a piata pozícia. Na piatej byť nemôžu, pretože v tých je už pochovaný Grék. A teda v strede je pochovaný *Asýrčan za červenými dverami a pil mlieko.*

Ostala už iba jedna farba a iba jedny dvere, ktoré ešte nemajú priradenú farbu. Sú to piate dvere a žltá farba. Teda *Grék je pochovaný za žltými dverami.*

Podľa zadania, kráľ, čo je pochovaný v žltých dverách rád bojoval so sekerou. Zistili sme, že *Grék bojoval so sekerou.*

Kráľ čo bojoval so sekerou je pochovaný vedľa kráľa, ktorý choval koňa. Pretože kráľ, čo bojoval so sekerou je pochovaný v piatych dverách, jediná možnosť ktorý kráľ mohol chovať koňa, je ten, ktorý je pochovaný v štvrtej hrobke s modrými dverami.

Obľúbené nápoje, ktoré ešte nie sú priradené, sú voda, vodka a pomarančový džús. Grék vodku piť nemohol, tú pil Riman, a pomarančový džús tiež nie, ten pil zápasník a Grék bojoval so sekerou. Z toho vyplýva, že *Grék pil vodu.*

Zápasník pil pomarančový džús. Grék to nemohol byť, pretože ten pije vodu, Asýrčan tiež nie, on pije mlieko, Babylončan taktiež, lebo on bojoval na život a na smrť, a Riman to byť nemohol, keďže on pil vodku. Jediný, kto nám zostal je Sýrčan, o ktorom vieme jedine že choval psa, takže Sýrčan bol zápasník, pil pomarančový džús a choval psa. Jediné miesto, kde môže byť pochovaný sú prvé dvere, pretože ku všetkým ostatným je už priradené niečo o kráľovi, čo je za nimi pochovaný. To znamená, že *Sýrčan je pochovaný za prvými, bielymi dverami, pil pomarančový džús, choval psa a bol zápasník.*

Vieme, že Riman pil vodku. Jediné miesto, kde môže byť pochovaný sú štvrté dvere. *Riman je pochovaný za modrými dverami, pil vodku a choval koňa.*

Jediný kráľ, čo ešte nie je priradený k hrobke je Babylončan. Posledná voľná hrobka je druhá, teda *Babylončan je pochovaný za zelenými dverani, pil kávu a bojoval na život a na smrť.*

	1. dvere	**2. dvere**	**3. dvere**	**4. dvere**	**5. dvere**
Farba	biela	zelená	červená	modrá	žltá
Kráľ	Sýrčan	Babylončan	Asýrčan	Riman	Grék
Obľúbený nápoj	pomarančový džús	káva	mlieko	vodka	voda
Zviera	pes	zebra	slimáky	kôň	líška
Spôsob boja	zápasy	boj na život a na smrť	mečom	pacifizmus	sekerou

Tabuľka 3: Doplnená tabuľka

Kráľ, čo bojoval s mečom choval slimáky. Dvere, ku ktorým je toto možné doplniť sú iba prostredné. Takže *Asýrčan choval slimáky a bojoval mečom.*

K Rimanovi sme ešte nepriradili spôsob boja a posledný, ktorý zostal je pacifista. To znamená, že *Riman bol pacifista.*

Zo zadania vieme, že pacifista je pochovaný vedľa kráľa, čo choval líšku. Pacifistom bol Riman a ten je pochovaný vedľa Asýrčana a Gréka. Asýrčan choval slimáky, a preto *Grék choval líšku.*

Zostáva nám priradiť, kto choval zebru. Jediný, čo ju môže chovať je Babylončan, lebo jedine ten nemal priradené zviera, ktoré choval. Zistili sme, že *Babylončan choval zebru.*

Ako vyzerá doplnená tabuľka, si môžete pozrieť v tabuľke 3.

Odpoveď: Vodu pil Grék a zebru choval Babylončan.

Komentár: Príklad ste skoro všetci vyriešili správne, ak ste však nedostatočne vysvetlili, prečo je to tak ako ste písali, museli ísť nejaké tie bodíky dole.