Vzorové riešenia 2. kola zimnej série 2010/2011

Príklad č. 1 (opravovali Marka, Mária):

Zadanie:

Riešenie: Takže máme 4 hlavné zložky (oheň, vzduch, voda a zem) a 3 pomocné zložky (nekonečno, priestor a čas).

Vieme, že oheň má len jedného suseda. To znamená, že musí byť buď na začiatku alebo na konci.

Ďalej vieme, že vzduch je medzi dvomi pomocnými zložkami a zároveň nekonečno má slabšie účinky s hlavnými zložkami. Z toho vyplýva, že nekonečno musí byť na opačnom konci ako oheň, kde bude mať len jedného suseda, a to pomocnú zložku. Nemôže byť niekde v strede, lebo by muselo byť obklopené dvomi pomocnými zložkami, avšak tie už obklopujú vzduch. Takže máme:

oheň, —, —, (pomocná zložka), vzduch, (pomocná zložka), nekonečno

Zostali nám dve pomocné zložky: priestor a čas. O priestore vieme, že je medzi dvomi hlavnými zložkami a zároveň zem má väčšiu silu s priestorom. To znamená, že priestor nemôže byť medzi vzduchom (hlavná zložka) a nekonečnom (pomocná zložka). Musí byť medzi vzduchom a druhá hlavná zložka bude zem, ktorá s ním má väčšiu silu. Preto:

oheň, —, zem, priestor, vzduch, (pomocná zložka), nekonečno

Zostala nám jedna hlavná zložka – voda a jedna pomocná zložka – čas, ktoré už len jednoducho doplníme na zvyšné miesta.

Odpoveď: Oheň, voda, zem, priestor, vzduch, čas, nekonečno

(samozrejme to môže byť aj opačne: nekonečno, čas, vzduch, priestor, zem, voda, oheň).

Komentár: Príklad ste zvládli s prehľadom, všetci ste sa dopracovali k správnemu výsledku :o). Body sme strhávali, len keď vám v postupe niečo chýbalo...

Príklad č. 2 (opravovali Emil, Hanka, Uhro:)):

Zadanie:

Riešenie: Dobrým krokom na úvod, môže byť vypísanie všetkých dvojíc čísel, ktoré máme na dominových kockách:

$$(1|1),\ (1|2),\ (1|3),\ (1|4),\ (2|2),\ (2|3),\ (2|4),\ (3|3),\ (3|4),\ (4|4)$$

Súčet čísel na všetkých desiatich kockách je 50. Na šachovnicu sa zmestí iba 8 kociek, preto dve z nich nepoužijeme. Keďže chceme, aby súčet čísel na šachovnici bol čo najmenší, najlepšie by bolo neumiestniť na ňu kocky s najväčšími číslami, teda (3|4) a (4|4). V tom prípade by bol súčet čísel na šachovnici rovný 35.

Avšak nakoľko riadky (resp. stĺpce) sú na šachovnici štyri a v každom má byť súčet čísel rovnaký, tak celkový súčet čísel na šachovnici musí byť násobkom štyroch. Preto súčet na šachovnici nemôže byť 35, ale najmenej 36 (4×9). Ostáva nám ale zistiť, či nám to so súčtom 36 (čo znamená 9 v každom riadku a stĺpci) vyjde. Súčet čísel na nepoužitých kockách by mal byť $50 - 36 = 14$, teda vynecháme napr. (3|3) a (4|4) a začneme šachovnicu vypĺňať(skúsime umiestniť do riadku vždy dve kocky):

Do prvého riadku dáme napríklad naľavo kocku (3|4), ktorej súčet čísel je 7. Keďže do 9 ostáva 2, napravo dáme kocku (1|1). Keďže naľavo máme väčšie čísla, do druhého riadku naľavo môžeme umiestniť (1|2) a aby sme dosiahli súčet 9, napravo dáme (2|4). Stĺpec so zatiaľ najmenším súčtom je tretí, preto do tretieho riadku v pravo umiestnime (4|1). No a keďže v každom stĺpci chceme súčet deväť, tak do štvrtého riadku napravo dáme (2|3). Ostávajú nám posledné dve kocky. Tie je už jednoduché umiestniť tak aby sme splnili rovnosť riadkových a súčtových stĺpcov. Napríklad dáme do tretieho riadku dáme (2|2) a do štvrtého (3|1). Šachovnica sa teda dá vyplniť kockami zo súčtom 36 tak, aby súčty v riadkoch a stĺpcoch boli rovnaké.

3	4	1	1
1	2	2	4
2	2	4	1
3	1	2	3

Odpoveď: Môže sa jej to podariť. Najmenší súčet, ktorý mohla dostať je 36.

Komentár: Väčšine z vás sa podarilo príklad správne vyriešiť, avšak zďaleka nie všetci ste zdôvodnili, prečo súčet na šachovnici nemôže byť menší ako 36. Niektorým sa to dokonca vypomstilo tým, že potom ako našli správne usporiadanie kociek pre súčet 40 alebo 44, sa už nesnažili zistiť, či súčet nemôže byť menší. A kvôli tomu ich riešenie nebolo správne. Niekoľkým z vás tiež chýbala kompletná odpoveď, hlavne na druhú otázku, kde sme sa pýtali „Aký najmenší súčet na celej šachovnici mohla dostať?“. Nabudúce na ňu už radšej nezabudnite ;)

Príklad č. 3 (opravovali Phil, Maťo):

Zadanie:

Riešenie: Prvé, čo si môžeme všimnúť, je to, že obidve čísla musia byť dvojciferné(sčítaním najväčšieho jednociferného čísla a ciferného súčtu najväčšieho dvojciferného čísla nedostaneme 100, pri sčitovaní trojciferných čísel dostaneme určite viac ako 100).

Skúsime si teda interval dvojciferných čísel ohraničiť.

- Dvojciferné čísla musia byť väčšie ako 81, pretože súčet cifier dvojciferného čísla je najviac 18($99 => 9 + 9$).
  Potom $100 - 18 = 82$
- Hornou hranicou bude číslo 91, lebo môžeme zobrať najmenšie číslo(dolnú hranicu 81) a pre to platí: $100 - (8 + 1) = 91$.

Z tohto vyplýva, že spoznávacie značky môžu byť iba troch rôznych typov, kde A a B vieme nahradiť číslicami 1 až 9, a to:
1. 8A-8B-STO
2. 8A-9B-STO
3. 9A-9B-STO

V čísle 8A je na mieste desiatok 8 a na miesta jednotiek A, takže ho vieme rozpísať ako $8 \cdot 10 + A \cdot 1$ (napr. $83 = 8 \cdot 10 + 3 \cdot 1$). Ciferný súčet bude $8 + A$. Obdobne vieme rozpísať aj 8B, 9A a 9B. Zoberieme prvý prípad. Po rozpísaní 8A a 8B a ich ciferných súčtov dostaneme:

$$8A + 8 + B = 80 + A + 8 + B = 100$$

$$8B + 8 + A = 80 + B + 8 + A = 100$$

Po odčítaní dostávame z oboch: $A + B = 100 - 88 = 12$. Vrátime sa znova k zápisu 8A-8B-STO a vypíšeme všetky takéto značky: 83-89-STO, 84-88-STO, 85-87-STO, 86-86-STO, 87-85-STO, 88-84-STO, 89-83-STO.

Teraz prejdeme k druhému prípadu a rozpíšeme:

$$8A + 9 + B = 80 + A + 9 + B = 100$$

$$9B + 8 + A = 90 + B + 8 + A = 100$$

Po odčítaní dostaneme z prvého prípadu $A + B = 11$ a z druhého $A + B = 2$, čo samozrejme nesedí. Takéhoto typu teda značky neexistujú.

V treťom prípade rovnako zapisujeme:

$$9A + 9 + B = 90 + A + 9 + B = 100$$

$$9B + 9 + A = 90 + B + 9 + A = 100$$

Z toho: $A + B = 1$ a takto môžeme napísať iba spôsobom: $1 + 0 = 1$. Preto značky tohto typu sú 90-91-STO a 91-90-STO.
Odpoveď: Počet rôznych značiek je 9.
Komentár: Riešenia boli všetky veľmi pekné a dobre vypracované, ale veľa z vás robilo chybu, keď ste si neuvedomili, že všetky spoznávačky sa dajú „pretáčať“, teda napríklad spoznávačka 85-87-STO nieje tá istá ako 87-85-STO. Väčšina z vás však nemala problém sa popasovať s príkladom a dostali ste plný počet bodov.

Príklad č. 4 (opravovali Monča, Andy, ViPRo):

Zadanie:
Riešenie: Ako prvú vec si bolo treba uvedomiť, že nám ide najmä o časť pred desatinou čiarkou a až potom o desatinnú časť.

Poďme teda nájsť najprv celú časť. Jeho poslednú cifru, a potom aj všetky ďalšie vieme určiť jednoznačne pomocou prvej desatinnej. Označme ju x. Vypíšme si (odzadu) postupne cifry počnúc práve prvou desatinnou. Všetky musia byť jednociferné čísla, takže akonáhle by mal byť rozdiel nejakých dvoch 10 alebo viac, už nemôžeme pokračovať.

Máme dve možnosti, podľa toho, či začneme s pripočítavaním alebo odpočítavaním:

Prvá možnosť je $x, x+1, x-2, x-1, x-4, x-3, x-6, x-5, x-8, x-7$. Ďalej by nasledovalo $x - 10$, čo už nemôže byť cifrou zároveň s $x + 1$ ani x, lebo ich rozdiel je 11, resp. 10.

Druhá možnosť: $x, x-3, x-2, x-5, x-4, x-7, x-6, x-9, x-8$. Ďalej by nasledovalo $x - 11$, čo opäť z rovnakého dôvodu nemôže byť cifrou. Volíme teda prvú možnosť, pretože pri nej máme väčší počet cifier, čo znamená, že bude aj väčšie číslo. Aby $x - 8$ mohlo byť cifrou, musí x byť aspoň 8 a zároveň $x + 1$, ako cifra, môže byť najviac 9, teda x najviac 8. x, prvá cifra desatinnej časti, je 8 a celá časť čísla je odzadu 967452301, spredu 1032547698.

Teraz potrebujeme získať desatinnú časť. Jej poslednú cifru, tú, ktorá bola napísaná úplne prvá, označme y. V tomto prípade podľa zadania existuje len 1 možnosť, začíname pripočítavaním.

Cifry si opäť vypíšeme odzadu: $y, y+3, y+2, y+5, y+4, y+7, y+6, y+9, y+8$. Ďalšou cifrou by muselo byť $y + 11$, čo nie je možné. Už skôr sme zistili, že prvou cifrou je 8. Ak by ňou bolo $y + 8$, potom y, by malo byť 0. Uvedomme si však, že y nulou byť nemôže, lebo keď číslo prečítame spredu, 0 by bola na konci desatinného rozvoja, tam sa však neuvádza rovnako, ako sa neuvádza na začiatku celej časti. Ak by ňou bolo $y + 9$, y by muselo byť -1, čo znova nie je možné. Môže ňou však byť $y + 6$, vtedy $y = 2$ a aj všetky predošlé vypočítané cifry naozaj sú ciframi.

Najväčšia možná desatinná časť čísla je teda 8967452.
Odpoveď: Kód je 103254769, 8967452.
Komentár: Veľa z vás na prvé dve cifry čísla nedalo 10, čo ste mohli aj keď ste si mysleli inak. Viacerí si nevšimli, že podľa zadania číslo druhé sprava doľava má byť o 3 väčšie ako to úplne vpravo. Takto sa skoro každému našla chyba okrem dvoch, čo je teda malá úspešnosť. Bol to príklad s ktorým sa bolo treba pohrať a nepodceniť ho.

Príklad č. 5 (opravovali Peťo, Majo):

Zadanie:
Riešenie: Uvažujme číslo $ABCDE$ za celkovú výhru a číslo $EDCBA$ za výhru jednotlivca. Potom vieme príklad zapísať nasledovne:

$$EDCBA \cdot 4 = ABCDE$$

Keďže je číslo $ABCDE$ štvornásobkom čísla $EDCBA$ a je päťciferné, musí byť cifra $E < 3$, pretože inak by muselo byť číslo $ABCDE$ šesťciferné ($30000 \cdot 4 = 120000$), čo je však v rozpore so zadaním. Cifra E je však tiež poslednou cifrou súčinu $4 \cdot A$ a pretože tento súčin je vždy párny, tak aj cifra E musí byť párna. Existujú teda dve možnosti: $E = 0$ alebo $E = 2$. Ak by však E bolo 0, jeho výhra by začínala nulou, čo číslo nemôže. Takže $E = 2$.

Cifru A vieme zapísať ako $4 \cdot E+$ *počet desiatok zo súčinu* $4 \cdot D = 4 \cdot 2+$ *počet desiatok zo súčinu* $4 \cdot D > 7$. A teda cifra A bude buď 8 alebo 9. Avšak už sme zistili, že posledná cifra celkovej výhry je $E = 2$ a teda aj posledná cifra súčinu $4 \cdot A$ musí byť 2. Pokiaľ by $A = 8$, posledná cifra by bola $4 \cdot 8 = 3\mathbf{2}$, ale keby $A = 9$, posledná cifra by bola $4 \cdot 9 = 3\mathbf{6}$. Teda jedine $A = 8$.

Keďže cifra E je 2 a cifra A je 8, musí byť súčin $4 \cdot D$ jednociferné číslo, pretože nám nesmie nič prejsť cez desiatku. Toto sedí, len ak $D < 3$. Cifra $D = 4 \cdot B +$ *počet desiatok zo súčinu* $4 \cdot A = 4 \cdot B + 3$ a keďže násobky štvorky sú vždy párne čísla, tak keď k nim pripočítam 3 dostane číslo nepárne, a to je z menších ako 3 jedine $D = 1$.

Pretože $D = 1$, musí byť posledná cifra súčinu $4 \cdot B$ 8, aby sme po pripočítaní 3 dostali na konci 1. Tomuto vyhovujú jedine cifry 2 a 7. Keď sa však pozrieme na štvornásobok najmenšieho čísla $EDCBA$, ktoré môžeme zo známych vecí vyjadriť, $21008 \cdot 4 = 84032$, zistíme, že cifra B musí byť väčšia ako 4, čomu z možností pre cifru B vyhovuje jedine 7. Teda $B = 7$.

Pre cifru C platí, že v celkovej výhre aj v podiele jedného chlapca je na tom istom mieste. Zároveň posledná cifra súčinu $4 \cdot C + 3$, čo je počet desiatok zo súčinu $4 \cdot B$ je cifra C. Ako už bolo spomenuté, štvornásobok čísla je vždy párny a keď k nemu pripočítame 3, dostaneme nepárne číslo a teda musí byť cifra C tiež nepárna. Týmto dvom podmienkam vyhovuje jedine možnosť $C = 9$. A teda $C = 9$.

Teraz už zostáva jedine urobiť skúšku správnosti:

$$21978 \cdot 4 = 87912$$

Odpoveď: Milan dostal 21978 peňazí.
Komentár: Príklad ste celkom pekne zvládli, avšak len málo z vás sa zaoberalo viacerými ciframi A, za čo sme tým, čo to nemali museli strhnúť nejaké tie body.

Príklad č. 6 (opravovala gubika):

Zadanie:
Riešenie: Najskôr sa musíme zamyslieť nad tým, čo máme v zadaní. Na papieri máme ľubovoľný trojuholník, teda musíme hľadať postup, ktorý bude platiť pre hocijaký trojuholník. Zo zadania vieme, že $|AX| = |XY|$, čo to pre nás znamená? Ak sú strany AX a XY rovnako dlhé potom je trojuholník AXY rovnoramenný, teda $|\sphericalangle XAY|$ a $|\sphericalangle AYX|$ sú rovnako veľké, označme si ich α. Ďalej nám zadanie hovorí, že priamky XY a AB sú rovnobežné. Z toho nám vyplýva, že priamka AY s nimi zviera rovnaký uhol a teda uhly $\sphericalangle YAB$ a $\sphericalangle AYX$ sú striedavé. Uhol $|\sphericalangle AYX|$ sme si označili α, takže aj $|\sphericalangle YAB|$ sa rovná α.

Dopracovali sme sa k tomu, že $|\sphericalangle YAB|$ a $|\sphericalangle XAY|$ sa oba rovnajú α. Priamka AY je potom osou uhla $\sphericalangle CAB$ a to vieme narysovať len pomocou kružidla a pravítka bez rysky a mierky nasledovne: Do kružidla si zoberieme ľubovoľný polomer a spravíme pomocnú kružnicu so stredom v bode A. Z bodov kde nám kružnica pretla úsečky AC a AB spravíme kružnice s rovnaký polomerom, aký mala naša prvá kružnica. Kde sa nám kružnice pretnú vzikne bod osi. Jeho spojením s bodom A narysujeme celú os. Bod Y je prisečníkom osi uhla $\sphericalangle CAB$ a úsečky BC.

Teraz potrebujeme nájsť bod X. Máme viac možností, ukážeme si tu využitie osi strany. Trojuholník AXY je rovnoramenný so základňou AY to znamená, že výška v_x prechádza stredom strany AY. Potrebujeme teda pomocou kružidla a pravítka narysovať kolmicu na stranu AY cez jej stred. Urobíme to nasledovne: do kružidla si dáme ľubovoľný polomer väčší ako $\frac{|AY|}{2}$ a z bodov A a Y urobíme kružnice s týmto polomerom. Body, kde sa nám tieto kružnice pretnú spojíme a dostaneme tak os strany AY. Bod X leží na priesečníku osi so stranou AC.
Odpoveď: Postup rysovania je popísaný v riešení.
Komentár: Príklad nebol veľmi zložitý, no veľa z vás stratilo body na tom, že hľadalo riešenie len pre jeden konkrétny trojuholník. Pokiaľ je v zadaní napísané, že máme na papieri ľubovoľný trojuholník, znamená to, že o ňom nič viac nevieme, musíme teda hľadať postup platný pre všetky trojuholníky.

Príklad č. 7 (opravoval Kozzy):

Zadanie:
Riešenie: Je veľmi dôležité uvedomiť si, ktoré hody budeme považovať za rovnaké a ktoré za rôzne. Na každej z troch kociek môžeme hodiť presne 8 rôznych čísel, takže všetkých možných rôznych hodov bude $8 \cdot 8 \cdot 8$. Medzi nimi sme zarátali možnosť, kedy na prvej (napríklad zelenej) kocke padlo 1, na druhej (žltej) 2 a na tretej (červenej) 3, ale aj takú kedy na prvej padlo 2, na druhej 1 a na tretej 3. Takéto možnosti sú **rôzne**.

Pri ďalšom počítaní bude užitočné vedieť, koľko rôznych možnosí predstavuje jedna taká trojica. Vypísaním ľahko zisíme, že možností je 6: 123, 132, 213, 231, 312, 321. Keby však bolo kociek veľa, možností by pribúdalo a vypísať ich všetky by nám asi trvalo poriadne dlho. V matematike bolo preto zavedených niekoľko funkcií, pomocou ktorých dokážeme počet možností spočítať rýchlejšie. V našom prípade sa vlastne snažíme tie tri čísla, ktoré padli na kockách, zoradiť všetkými možnými spôsobmi. Na výpočet počtu možností zoradenia viacerých prvkov existuje funkcia, ktorá sa volá **permutácia**. Označuje sa $P(n)$, kde n znamená počet prvkov, ktoré zoraďujeme, v tomto prípade 3. Na pochopenie permutácie slúži nasledujúca úvaha: Zoberieme si n prvkov, ktoré chceme umiestniť na n rôznych miest (v poradí). Prvý z prvkov sa môže nachádzať na ktoromkoľvek z n miest. Druhý môžeme dať už iba na jedno z $n - 1$ miest, jedno je už obsadené. Pre tretí máme len $n - 2$ miest, a tak ďalej, až posledný prvok musíme dať na zostávajúce jedno miesto, máme len jednu možnosť, ako ho umiestniť. Počet usporiadaní je rovný súčinu počtu možností pri všetkých prvkoch, teda $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot ... \cdot 1$. Takýto súčin, súčin všetkých čísel od jedna až po n, voláme faktoriál (píšeme $n!$). Ľahko si overíme, že keď $n = 3$, tak $P(3) = 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$, teda presne to, čo nám vyšlo pri vypísaní možností.

Ak však máme čísla napríklad 1,2,2, teda niektoré sa opakujú, pri permutácii by sme niektoré možnosti rátali dvakrát, vyšli by nám možnosti 122, 122, 212, 221, 212, 221, skutočne sú však rôzne len 3, a to 122, 212, 221. Keď rátame permutácie, každú možnú výmenu rátame ako novú možnosť. Ak však máme dve dvojky, ak ich vymeníme, dostaneme rovnakú možnosť. A koľkými spôsobmi vieme povymieňať nejaký počet (k) dvojok? To už predsa vieme, predsa $P(k)$ spôsobmi. Tieto sme pri výpočte zarátali viackrát, teraz ich musíme zase odrátať. Na to poznáme ďalšiu funkciu, permutáciu s opakovaním. Dokonca, keby sme mali viac kociek, sa môže stať, že sa budú opakovať aj viaceré prvky, napríklad dve dvojky a dve trojky. Všeobecne, keď si označíme $k_1, k_2, ..., k_i$ počty všetkých prvkov, ktoré sa opakujú (ak máme tri dvojky a dve trojky, tak k_1 je 3 a k_2 je 2), potom permutáciu s opakovaním označíme $P_{k_1,k_2,...,k_i}(n)$ a vypočítame ju $\frac{P(n)}{P(k_1)\cdot P(k_2)\cdot\ldots\cdot P(k_i)} = \frac{n!}{k_1!\cdot k_2!\cdot\ldots\cdot k_i!}$. Opäť overme pre náš prípad, máme 3 prvky ($n = 3$) a opakuje sa nám iba dvojka a to dvakrát ($k_1 = 2$). Počet možností by mal byť $\frac{3!}{2!} = \frac{3\cdot 2\cdot 1}{2\cdot 1} = \frac{6}{2} = 3$, tak ako sme zistili pri vypisovaní. Ak sa opakujú všetky čísla, napríklad 2,2,2, hneď vidíme, že inú možnosť nevytvoríme. A takisto to sedí aj čo sa týka permutácii, lebo $k_1 = n$ (prvok sa nám opakuje toľkokrát, koľko je všetkých prvkov dokopy), a teda $P_{k_1}(n) = \frac{n!}{n!} = 1$.

Tak, teraz už vieme všetko potrebné, pustime sa do riešenia. Najprv sa budeme venovať súčinu 8. 8 je deliteľné číslami 1, 2, 4, 8, ak padne iné číslo, nikdy nedostaneme súčin 8. Z týchto čísel vieme poskladať súčin 8 tromi spôsobmi: $1\cdot 1\cdot 8$, $1\cdot 2\cdot 4$ a $2\cdot 2\cdot 2$. Všetky prípady sme si už prešli, vieme, že pri prvom budeme mať 3 možnosti (dva prvky sa opakujú), pri druhom 6 (všetky sú rôzne) a pri treťom 1 (všetky sú rovnaké), čo je dokopy 10.

Pri súčtoch máme len jediné obmedzenie, a to, že ak padne na jednej kocke 7 alebo 8, súčet nebude nikdy 8. Máme 5 spôsobov, ako poskladať súčet 8: 1+1+6, 1+2+5, 1+3+4, 2+2+4, 2+3+3. Tu máme možností postupne 3, 6, 6, 3, 3, spolu ich je 21.

Možností je viac pri súčte ako pri súčine, aby sme však mohli povedať, že aj šanca je pri súčte vyššia, musíme si uvedomiť, že celkový počet možností je rovnaký, keďže šanca (teda pravdepodobnosť) je podielom priaznivých a všetkých možností. V tomto prípade to platí, keďže podmienky pri hádzaní sú rovnaké (máme rovnaké kocky, aj ich počet).

Je väčšia pravdepodobnosť, že padne súčet 8, ako súčin 8.

Odpoveď: Braňo má väčšiu šancu kontrolovať.

Komentár: Väčšinou ste si vypísali všetky možnosti, ktorých v tomto príklade nebolo až tak veľa. Ak sa však niekedy stretnete s nejakým zložitejším príkladom, treba poznať aj účinnejšie spôsoby.

Tí, ktorí zabudli spomenúť niektorú možnosť, prišli iba o zlomok bodov, častou chybou však bolo, že ste si len vypísali rôzne súčty a súčiny, a z toho ste usúdili, že súčtov je viac ako súčinov, čo správny postup rozhodne nebol.

Príklad č. 8 (opravovali Tinka, Dada):

Zadanie:

Riešenie: Grup nám správne povedal, že všetky štyri podmienky naraz platiť nemôžu. Práve jedna má byť klamstvo. Najľahšie sa nám bude postupovať, ak zistíme, ktorá podmienka určite nie je pravda.

Najprv sa lepšie pozrieme na 2. a 3. podmienku. Druhá podmienka nám vraví: $a = 2\cdot b + 5$. Tretia podmienka tvrdí, že súčet $a + b$ je deliteľný tromi. Predpokladajme, že oba výroky sú pravdivé. Vyjadrené a dosadíme do tretej podmienky. Vyjde nám, že $3\cdot b + 5$ je deliteľné tromi, čo zjavne nemôže fungovať, pretože $3\cdot b$ je síce deliteľné 3, ale 5 nie je. Z tohto nám teda vyplýva, že 2. a 3. podmienka nemôžu platiť zároveň.

Rovnakým spôsobom sa pozrieme na 3. a 4. podmienku. 4. podmienka vraví, že výraz $a + 7\cdot b$ je prvočíslo. Keď si štvrtú podmienku zapíšeme ako $(a + b) + (6\cdot b)$, tak vidíme, že (a + b) je podľa tretej vety deliteľné 3 a $6\cdot b$ je taktiež určite deliteľné 3. Daný výraz je určite násobkom trojky, to znamená, že nie je prvočíslom. Teda sa nám vylučujú aj podmienky 3. a 4.

Keďže nesprávna podmienka smie byť iba jedna, tak to bude tá 3. (v opačnom prípade by museli byť ďalšie dve podmienky nesprávne, a to 2. a 4.)

Už nám zostáva len určiť čísla, keď vieme:

$$a + 1 = k\cdot b$$
$$a = 2\cdot b + 5$$
$$a + 7\cdot b = \text{prvočíslo}$$

a z druhej rovnice dosadíme do prvej:

$$2\cdot b + 5 + 1 = k\cdot b$$
$$6 = k\cdot b - 2\cdot b$$
$$6 = b\cdot(k - 2)$$

O číslach a, b, vieme, že sú prirodzené. Existujú práve 4 možnosti pre b, ktoré spĺňajú tento súčin a zároveň sú aj prirodzené:

1. $b = 1$, $a = 7$. V každom prípade musíme vyjadriť výraz $a + 7\cdot b$ a rozhodnúť, či ide o prvočíslo. $7 + 7\cdot 1 = 14$. Táto možnosť nevyhovuje.
2. $b = 2$, $a = 9$. $9 + 7\cdot 2 = 23$. Číslo 23 je prvočíslo.
3. $b = 3$, $a = 11$. $11 + 7\cdot 3 = 32$. Táto možnosť nie je riešením.
4. $b = 6$, $a = 17$. $17 + 7\cdot 6 = 59$, Číslo 59 je tiež prvočíslo.

Vidíme, že existujú práve dve správne riešenia.

Odpoveď: Tretia podmienka je určite klamstvo, vyhovujúce čísla sú a = 9, b = 2 alebo a = 17, b =6.

Komentár: Tento príklad bol dosť náročný, len niektorí z vás dostali plný počet. Mnohí z vás ani nenašli obe riešenia, ale niektorým sa to predsa len podarilo. Skúste neskúšať, ale logicky odvodiť čiastkové závery nabudúce...

Príklad č. 9 (opravovala Betka):

Zadanie:

Riešenie: Nakreslíme si pravidelný šesťuholník. Máme o ňom určité vedomosti zo zadania ale najprv sa zamyslíme čo vo všeobecnosti vieme o pravidelnom šesťuholníku.

Ak spojíme každý vrchol so stredom opísanej kružnice šesťuhoníka, vznikne šesť zhodných rovnostranných trojuholníkov. Potom, ak si pozrieme dva trojuholníky oproti sebe (tie ktorých základne sú rovnobežné), všimneme si, že vzdialenosť medzi základňami, a teda aj medzi protiľahlými stranami šesťuholníka, je dvakrát výška jedného takéhoto rovnostranného trojuholníka (označíme si ju v).

Zo zadania poznáme obsahy trojuholníkov EFX, BCX a ABX (a to porade 8, 4 a 2). Trojuholníky EFX a BCX sú oproti sebe. Označme si výšku na stranu FE v_1 a na stranu BC v_2.

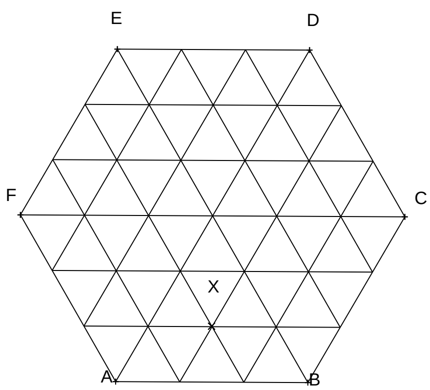
Súčet ich obsahov potom vieme zapísať ako : $8+4=\frac{a\cdot v_1+a\cdot v_2}{2}$ a to vieme upraviť : $12=\frac{a\cdot(v_1+v_2)}{2}$, pričom z predošlého odseku vieme, že vzdialenosť FE a BC je $v=v_1+v_2$.

Rovnako aj strany DE a AB sú rovnobežné a teda súčet výšok v trojuholníkoch DEX (označme si ju v_3) a ABX (označme si ju v_4) bude tiež $v=v_3+v_4=v_1+v_2$. Súčet obsahov trojuholníkov DEX a ABX je potom : $x+2=\frac{a\cdot v_3+a\cdot v_4)}{2}$, pričom x je obsah trojuholníka DEX. $x+2=\frac{a\cdot(v_3+v_4)}{2}$ a po dosadení $x+2=\frac{a\cdot(v_1+v_2)}{2}=12$, $x+2=12$ a teda $x=10$ Obsah trojuholníka DEX je 10.

Rovnako sa môžeme pozrieť na trojuholníky AFX (výšku na stranu AF si označíme v_5) a CDX (výšku na stranu CD si označíme v_6). $y+z=\frac{a\cdot v_5+a\cdot v_6}{2}$ pričom y je obsah trojuholníka AFX a z je obsah trojuholníka CDX. Ako v predošlom dosadíme a dostaneme $y+z=12$. Avšak zatiaľ o týchto dvoch trojuholníkoch nevieme nič ďalšie, čo by nám pomohlo zistiť samotné y a z.

Vráťme sa späť k výškam v_1, v_2, v_3 a v_4 trojuholníkov EFX, BCX, DEX a ABX. Vieme, že $v=v_3+v_4=v_1+v_2$. Ak si porovnáme jednotlivé obsahy trojuholníkov, zistíme: $2\cdot v_2=v_1$ a $5\cdot v_4=v_3$ Potom si pomocou v vyjadríme tieto výšky $v_1=\frac{2}{3}\cdot v$, $v_2=\frac{1}{3}\cdot v$, $v_3=\frac{5}{6}\cdot v$ a $v_4=\frac{1}{6}\cdot v$.

Zostrojíme si teraz rovnobežku p so stranou AB a tiež rovnobežku q so stranou EF. Zastrojíme ich tak, aby ich priesečníkom bol bod X. Keďže ide o rovnobežky, výška na stranu AB je kolmá aj na p a takisto výška na stranu EF je kolmá na q. Čiže vzdialenosti týchto rovnobežiek (od strán s ktorými sú rovnobežné) sú výšky v_4 (strana AB a priamka p) a v_1 (strana EF a priamka q).



Obrázok 1: rozdelenie na trojuholníčky

Ak si dokreslíme do obrázku všetky rovnobežky so stranou AB, EF a CD (tak, aby rozdeľovali výšku v na šestiny) všimneme si, že na obrázky nám vznika trojuholníková sieť vytvorená 54 zhodnými rovnostrannými trojuholníčkami(obr. 1). Z tohto obrázku jasne vidíme, že trojuholník ABX je rovnoramenný. To znamená, že $|AX|=|BX|$ a taktiež uhly FAX a CBX sú zhodné, a $|AF|=|BC|$ keďže ide o pravidelný šesťuholník. Potom podľa vety *sus* sú zhodné, a teda majú rovnaký obsah. Obsah trojuholníka AFX je 4.

Už len dosadíme do rovnosti $4+z=12$, $z=8$. Obsah trojuholníka CDX je 8.

Odpoveď: Obsahy trojuholníkov sú porade EDX, AFX, CDX : 10, 4, 8

Komentár: Príklad bol pomerne ťažký. Iba jeden mal komplet správne riešenie. Tí zvyšní sa väčšinou dostali po krok kedy ukázali prečo je obsah trojuholníka EDX 10, a že súčet obsahov trojuholníkov AFX a CDX je 12. Avšak odiaľto ste už nevedeli čo ďalej, a buď ste hádali aký obsah by mohli mať, alebo ste rátali s niečím, čo nebolo zadané.

Prémia (opravovali Jančo, Danka ml.):

Zadanie:

Doplnené zadanie: *Cesta* medzi touto oázou a najbližším mestom trvá *4* dni. Počas pobytu na *púšti* musí človek na prežitie vypiť *1* galón vody denne. Jeden človek môže niesť v jednom momente maximálne *3* galóny vody. Koľko minimálne nosičov si musel Tipl najať, aby prišiel do najbližšieho mesta? (Samozrejme, nosiči sa musia vrátiť do oázy alebo do mesta.) koľko by si ich musel najať, keby bol veľmi bojazlivý a bál by sa ísť hocijakú časť cesty sám?

Riešenie: Je logické, že sám Tipl do mesta nepríde, keďže na cestu potrebuje 4 galóny, a on sám unesie len 3. Ak si vezme jedného nosiča, spolu budú mať 6 galónov vody (každý 3). Pôjde s Tiplom jeden deň, vtedy každému ostanú ešte dva galóny. Nosič dá Tiplovi jeden galón na doplnenie zásob do troch galónov, aby mu vydržali na zvyšné tri dni, a s jedným galónom na jeden deň sa vráti späť do oázy.

Keď sa Tipl bojí, tak každý deň s ním musí ísť aspoň jeden nosič. Spolu s ním spotrebuje dokopy 2 galóny vody, za celú cestu spotrebujú 8 galónov. Keďže Tipl a jeden nosič môžu odniesť len 6 galónov vody, jeden nosič je málo. Každý ďalší nosič spotrebuje minimálne 2 galóny na seba, keďže ide minimálne jeden deň a musí sa vrátiť, maximálne jeden vie preliať niekomu inému. Tiplovi a nosičovi chýbajú spolu 2 litre. Bude potrebovať aspoň troch nosičov.

Musíme zopakovať postup z prvej časti – niekto dodá inému jeden zvyšný galón na dokončenie cesty. Takže 1. a 2. nosič prejdú s Tiplom prvý deň a dajú jeden galón Tiplovi a 3.nosičovi, zo zvyšným sa vrátia do oázy. Ostatné tri dni pôjde s Tiplom už len 3. nosič a majú dosatok vody na ceôú cestu.

Odpoveď: Aby Tipl prešiel do najbližšieho mesta, potrebuje si najať jedného nosiča. Ak sa však bojí a nechce ísť ani kúsok cesty sám, potrebuje si najať troch nosičov.

Komentár: Ak ste dobre doplnili zadanie, tak ste väčšinou došli k dobrým výsledkom. Často vám ale chýbalo vysvetlenie, prečo nemôžu byť nosiči v druhej otázke len dvaja, za čo ste mali strhnutý jeden bod.