Vzorové riešenia 1. kola zimnej série 2010/2011

Príklad č. 1 (opravoval Peťo):

Zadanie:

Riešenie: Zo zadania vieme, že najväčší štvorec (ten, ktorý je rozdelený na trojuholníky a štvorce) má stranu dlhú 8. Z tohto údaju vieme vypočítať jeho obsah. Obsah štvorca je rovný súčinu dĺžok jeho dvoch strán, vypočítame ho teda nasledovne:

$$S = 8 \cdot 8 = 64$$

Zo zadania tiež vieme, že všetky trojuholníky sú zhodné. Strana najväčšieho štvorca je tvorená dvomi rovnakými stranami týchto trojuholníkov, jej dĺžka musí mať polovičnú dĺžku z dĺžky strany veľkého štvorca, čo je 4. Útvar, ktorý je zložený zo štyroch zhodných štvorčekov je tiež štvorec, pretože každá jeho strana je zložená z dvoch strán rovnakých štvorčekov. Strana tohto štvorca je rovnako dlhá ako najdlhšia strana trojuholníka, takže aj ona má dĺžku 4. Jeho obsah je potom $4 \cdot 4 = 16$. A pretože je zložený zo štyroch zhodných štvorčekov, obsah jedného štvorčeka je $16 : 4 = 4$.

Obsah všetkých trojuholníkov spolu dostaneme ako rozdiel obsahov veľkého štvorca a menšieho vnútorného štvorca, $64-16 = 48$. A keďže všetkých trojuholníkov je dvanásť a sú zhodné, obsah každého jedného je $48 : 12 = 4$.

Odpoveď: Obsah jedného štvorčeka je 4 a obsah všetkých spolu je 16. Obsah jedného trojuholníka je 4 a obsah všetkých spolu je 48. Pán Candall má byť na Time Square o 16 : 48.

Komentár: Skoro všetci ste mali správny výsledok, avšak niektorí z vás zabudli napísať, ako ste sa k niektorým tvrdeniam dostali, za čo museli ísť nejaké tie bodíky dole.

Príklad č. 2 (opravovali Emil, Dan):

Zadanie:

Riešenie: Príklad môžeme riešiť viacerými spôsobmi. Najjednoduchšie bude vypísať si všetky možnosti ich poradia, a potom zisťovať, kto by tipoval správne. Správnou možnosťou bude tá, pri ktorej by správne tipoval práve jeden človek.

prvý	druhý	tretí	správny tip
Lens	Chris	Robert	Lens, Chris, Robert
Lens	Robert	Chris	Lens, Robert
Chris	Lens	Robert	Chris, Robert
Chris	Robert	Lens	Chris, Robert
Robert	Lens	Chris	ani jeden
Robert	Chris	Lens	Chris

Tabuľka 1: možnosti poradia

Vidíme, že sedí iba jedna možnosť, pravdu má Chris.

Odpoveď: Poradie muselo byť Robert, Chris, Lens.

Komentár: Mnohí z Vás príklad riešili aj tak, že si postupne preberali, kedy by Lens, Chris alebo Robert tipovali správne. Je to tiež správny postup, ale častokrát ste svoj postup neopísali dostatočne, alebo ste sa sami zamotali, a tak sme Vám často nemohli dať 10 bodov. Plný počet sme nemohli dať ani riešiteľom, ktorí nakreslili iba tabuľku bez akéhokoľvek komentára. Väčšina z Vás, ale dospela k správnemu výsledku, a za to Vám patrí pochvala.

Príklad č. 3 (opravovali Monča, Majo, Maťo):

Zadanie:

Riešenie: Zadanú rovnicu vieme prepísať na tvar

$$\text{ONE0} = \text{NINE} + \text{ONE}$$

v ktorom postupne písmená nahradíme číslami. Zo súčtu jednotiek vieme, že platiť musí rovnica $E + E = 0$ alebo $E + E = 10$. Keďže za rovnaké písmená nemôžeme dosadiť rôzne čísla, tomuto prípadu vyhovujú práve dve možnosti. Keď platí, že $E = 0$, rovnica vyzerá nasledovne:

$$\text{ON00} = \text{NIN0} + \text{ON0}$$

Pozrime sa teraz na čísla, ktoré máme označené ako písmená N. Platí, že $N + N = 0$ alebo $N + N = 10$, pretože nám z predchádzajúceho súčtu nezostala jednotka. N teraz môže byť 0, alebo 5. Dve rôzne písmená sa však nemôžu rovnať tomu istému číslu, preto $N = 5$. Napíšme si dosadenú rovnicu.

$$\text{O500} = \text{5I50} + \text{O50}$$

Z tohto súčtu nám zostala jedna jednotka, preto bude rovnica, ktorá hovorí o súčte čísel na mieste stoviek nasledovná $I+O = 5-1$ alebo $I + O = 15 - 1$. Na mieste tisícok platí, že $O = 5$, alebo $O = 5 + 1$, ak nám ostane jednotka. Prvá rovnica platiť nemôže, lebo piatim sa už rovná N. Z druhej sme zistili, že $O = 6$ a po dosadení do rovnice o súčte čísel na mieste stoviek vieme, že $I = 14 - O$, teda $I = 8$. Hodnoty dosadíme do rovnice.

$$6500 = 5850 + 650$$

Pozrime sa na druhý prípad a to, keď platí, že $E = 5$. Rovnica vyzerá nasledovne:

$$\mathrm{ON50} = \mathrm{NIN5} + \mathrm{ON5}$$

Zo sčítania cifier na mieste jednotiek nám ostane jedna jednotka, ktorú presunieme do ďalšej rovnice o cifrách na mieste desiatok. Tá vyzerá $N+N = 5-1$ alebo tiež $N+N = 15-1$. V prvom prípade môže byť N len 2 a v druhom len 7. Ak $N = 7$, potom $O = 8$, pretože musia byť iné a na miestach tisícok sa k číslu N môže pripočítať iba jedna jednotka z predchádzajúceho súčtu. V takomto prípade by nám ale vyšlo, že $I = 8$, čo pravda byť nemôže. Z toho vyplýva, že $N = 2$.

$$\mathrm{O250} = \mathrm{2I25} + \mathrm{O25}$$

Teraz už vieme, že O je o jedna väčšie ako N, z čoho vyplýva, že $O = 3$.

$$3250 = \mathrm{2I25} + 325$$

Nakoniec stačí jednoduché odpočítanie $3250 - 325 = 2925$, z čoho plynie, že $I = 9$.
Odpoveď: $O = 6$, $N = 5$, $E = 0$, $I = 8$ alebo $O = 3$, $N = 2$, $E = 5$, $I = 9$.
Komentár: Často sa stalo, že ste sa nesnažili hľadať ďalšie riešenia a tak ste skončili pri jednom, alebo stačilo zabudnúť napísať jednu možnosť dosadenia čísla a hneď ste mali o riešenie menej. Príklad ste ale pochopili a šli ste naň veľmi dobre. Len tak ďalej :).

Príklad č. 4 (opravovali Uľa, Andy, ViRPo):

Zadanie:
Riešenie: Označme si farby číslami. Začneme štvorcom 4×4. Pre prehľadnosť si označíme riadky od 1 po 4, stĺpce od A po D. Zo zadania sa na uhlopriečke $A1$ - $D4$ nemôžu nachádzať dve rovnaké farby. Nech teda na políčku $A1$ je farba 1, na $B2$ je 2, na $C3$ je 3, na $C4$ je 4. Už teraz vieme, že na menej ako 4 farby sa nám štvorec vyplniť nepodarí, pokúsme sa ho vyplniť práve štyrmi farbami.

Na oboch políčkach $C2$ a $B3$ môžu byť farby 1 a 4, 2 ani tam byť 3 nemôžu. Nemôžu tam byť ani dve rovnaké čísla, lebo $C2$ a $B3$ ležia na spoločnej uhlopriečke. V tejto chvíli nezáleží na tom, či na $C2$ bude farba 1 a na $B3$ 4 alebo naopak, obe rozmiestnenia sú symetrické. Zvoľme si teda uvedenú možnosť, na $C2$ máme 1, na $B3$ 4. Povieme, že sme si zvolili túto možnosť „bez ujmy na všeobecnosti", teda keby sme si zvolili tú druhú, riešenie by sa nijako nezmenilo.

Na políčku $B1$ môže byť iba farba 3, v stĺpci B totiž už máme farby 2 a 4, v riadku 1 máme farbu 1. Zo stĺpca B ostáva nevyplnené iba jedno políčko, $B4$, na ktorom musí byť farba 1. Podobne na $C4$ môže byť iba 2, a potom na $A4$ zostáva len 3 a na $C1$ len 4. Vieme doplniť aj $D1$, tam príde farba 2. Opäť v stĺpci A už je 1 aj 3 a v riadku 2 je farba 2, na $A2$ musí byť teda určite farba 4, potom na $A3$ je 2, na $D3$ je 1 a na $D2$ je 3.

So štyrmi farbami sa nám teda podarilo ofarbiť štvorec tak, aby sme splnili podmienky zo zadania(Obrázok 1).

Teraz sa pozrieme na štvorec 3×3(Obrázok 2). Stĺpce si teraz označme od A po C, riadky od 1 po 3. Opäť budeme potrebovať aspoň 3 farby. Na uhlopriečku $A1$, $B2$, $C3$ umiestnime postupne farby 1, 2 a 3. Na políčkach $C1$ a $A3$ však nemôže byť ani farba 2, ktorá je s nimi na spoločnej uhlopriečke, a ani 1 a 3, ktoré sú s nimi v jednom riadku, resp. stĺpci. Dokonca ešte aj čísla na týchto dvoch políčkach musia byť rôzne, lebo ležia na spoločnej uhlopriečke. Na $C1$ a $A3$ teda musíme položiť farby 4 a 5. Na zvyšné 4 políčka ($B1$,$A2$,$C2$,$B3$) môžeme dať jednu z farieb v protiľahlom rohu, napríklad na $B1$ 4, na $A2$ 5, na $B3$ 1 a na $C2$ 4. Na štvorec 3×3 sme potrebovali až 5 farieb.

	A	**B**	**C**	**D**
1	1	3	4	2
2	4	2	1	3
3	2	4	3	1
4	3	1	2	4

Obrázok 1: štvorec 4×4

	A	**B**	**C**
1	1	5	4
2	3	2	1
3	5	4	3

Obrázok 2: štvorec 3×3

Odpoveď: Na zafarbenie štvorca 4×4 treba minimálne 4 farby. Na zafarbenie štvorca 3×3 treba minimálne 5 farieb.
Komentár: Príklad bol veľmi pekný a riešenie sa dalo logicky odvodiť. Za správny výsledok bez postupu bolo 7 bodov inak sme strhávali za nevysvetlené veci. Veľa bolo aj úplne správnych riešení, takže len tak ďalej.

Príklad č. 5 (opravovali Danka, Mária):

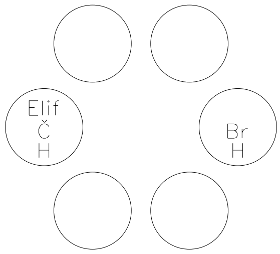
Zadanie:
Riešenie: Zo zadania vieme, že naše víly sa volajú Ayla, Nihal, Leyla, Sibel, Elif a Birick. 3 z nich sú brunety (Br), 2 sú blondíny (Bl) a 1 je čiernovláska (Č). 3 z nich majú hnedé oči (H), 2 majú zelené oči (Z) a 1 má modré oči (M). Blondíny majú modré alebo zelené oči. Brunety majú zelené alebo hnedé oči. Čiernovlásky môžu mať len hnedé oči.

Modré oči môžu mať iba blondíny, čiže iste vieme, že tie 1 modré oči bude mať blondína. Druhá blondína bude mať potom zelené oči, lebo blondíny môžu mať len modré alebo zelené oči. Čiernovláska bude mať hnedé oči, lebo iné nemôže mať. Nakoniec nám zostali 3 brunety a 1 zelené a 2 hnedé oči, čiže 2 brunety budú hnedooké a 1 zelenooká.

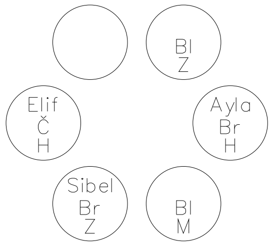
- *Elif má čierne vlasy.* Z toho vieme, že Elif má aj hnedé oči.

- *Oproti Elif má princezna rovnakú farbu očí.* Čiže princezná oproti nej je hnedooká a je to brunetka (lebo blondíny nie sú hnedooké).
- *Víla Ayla stojí vedľa blondínky a princeznej s modrými očami.* Z toho nám vyplýva, že Ayla stojí vedľa dvoch blondínok – zelenookej a modrookej.

To čo zatiaľ vieme, si zakreslíme (Obrázok 3).



Obrázok 3: Známe informácie



Obrázok 4: Zistené údaje

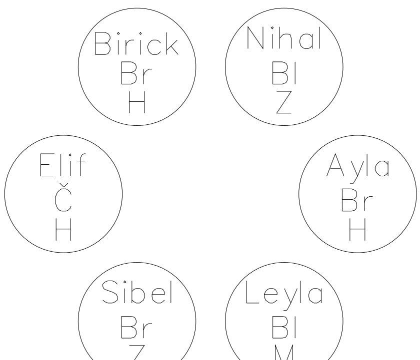
Zistili sme, že Ayla sa nachádza medzi dvomi blondínkami. Nemôže sa nachádzať na ani jednom z nevyplnených políčok, lebo by minimálne jedna z víl, tancujúca vedľa nej nebola blondína. A preto musí byť Ayla brunetka s hnedými očami (oproti Elif).

- Jedna z blondínok vedľa Ayly ju bude mať po pravici a teda bude splnená podmienka: *Blondínka má po pravici princeznú s hnedými očami.*
- *Oproti blondínke má víla Sibel rovnakú farbu očí.* Keďže dve blondínky nie sú oproti sebe (obe sú vedľa Ayly), Sibel je určite brunetka. Brunetky a blondíny majú spoločnú farbu očí len zelenú, čiže Sibel bude zelenooká. Je jedno, či Sibel umiestnime napravo alebo naľavo od Elif, lebo riešenia budú dve, osovo súmerné.

Zistené údaje si zakreslíme (Obrázok 4).

- *Blondínka stojaca medzi Aylou a Birick sa volá Nilah.* Z obrázka môžeme vidieť, že jediné možné miesto pre Birick je to prázdne, čiže ona bude hnedooká bruneta (lebo nám zostali nepriradené 1 hnedé oči a 1 bruneta). Medzi Birick a Aylou je zelenooká blondína, ktorá sa volá Nilah. Čiže nám už zostáva iba jedno nepoznané meno pre modrookú blondínu a to je Leyla.

Všetky doplnené informácie vidíme na obrázku 5.



Obrázok 5: Doplnené víly

Odpoveď: Princezné, ktoré mali na hlavách venček, čiže boli brunety sa volali Ayla, Sibel a Birick.
Komentár: Príklad nebol veľmi ťažký. Za správny výsledok ste mohli získať 2 body. Zvyšné body boli za postup. Najčastejšie ste body strácali pri nedostatočnom vysvetlení svojich krokov. Nezabúdajte nám písať postupy, lebo často aj uvažujete správne, no napíšete len výsledok a my nevieme odkiaľ ste ho získali. Mnohých z vás pomýlilo 5.tvrdenie: *Víla Ayla stojí vedľa blondínky a princeznej s modrými očami.* Mysleli ste si, že blondínka a princezná s modrými očami je jedna osoba. Avšak išlo o dve. Ak by sme chceli, aby to bola jedna osoba, zadanie by znelo: *Víla Ayla stojí vedľa modrookej blondínky.*

Príklad č. 6 (opravovali Tinka, Danka, Nika):

Zadanie:
Riešenie: Najprv si napíšeme stručný zápis:

Hráč	Odstránené čísla	Zvyšné čísla	Poznámky
učeň	2	6,5,4,3,1	toto máme dané zo zadania
majster	1	6,5,4,3	jediný deliteľ 2, lebo je prvočíslo
učeň	6	5,4,3	žiadne iné číslo už nemá v zvyšných číslach deliteľa
majster	3	5,4	keďže sme pred tým odstránili 2 jediným zvyšným deliteľom 6 je 3
učeň		5,4	už nemôže vybrať žiadne
majster	5,4		

Tabuľka 2: (a)Prvý prípad

- $Bolton = \frac{1}{3}Adams$
- $Colper = NSD(A, B)$
- $Drites = B \cdot C$
- $Eghow = 40$

Spolu chcú darovať títo piati páni aspoň 70 tehličiek na expedíciu:

$$A + B + C + D + E > 70$$

Rovnicu zjednodušíme o Eghowa, o ktorom vieme, že daroval 40 tehličiek:

$$A + B + C + D + 40 > 70$$

$$A + B + C + D > 30$$

Potrebujeme zistiť, koľko darovali dokopy. To sa nám však podarí, iba keď vypočítame, koľko dal každý z nich. Vieme, že Bolton dal tretinu toho čo Adams. Môžeme sa na to pozrieť aj z druhej strany, Adams daroval trikrát viac ako Bolton. Zapíšeme: $A = 3 \cdot B$.

Teraz vypočítajme, koľko tehličiek dal Colper. Tento počet je najväčším spoločným deliteľom Adamsových a Boltonových tehličiek (označujeme $NSD(A, B)$). Najväčší spoločný deliteľ čísel je také číslo, ktorým sú obidve deliteľné a zároveň neexistuje žiadne väčšie číslo, ktoré spĺňa túto podmienku. Napríklad $NSD(15, 10) = 5$ alebo $NSD(24, 8) = 8$. V našom prípade hľadáme $NSD(3 \cdot B, B)$. Obidve tieto čísla sú určite deliteľné číslom B, lebo $\frac{3 \cdot B}{B} = 3$ a $\frac{B}{B} = 1$. Žiadne väčšie vyhovujúce číslo nie je, pretože B nemôže byť deliteľné žiadnym číslom, ktoré je väčšie ako ono samo. $NSD(A, B)$ je teda B, takže Colper daroval rovnako veľa tehličiek ako Bolton. Zapíšeme $C = B$.

Drites daroval súčin Colperovej a Boltonovej investície. Colpera nahradíme Boltonom a vyjde nám $D = B \cdot B$.

Poznáme výšku investície od každého pána. Vytvoríme si nerovnicu, v ktorej nebudeme poznať iba B:

$$A + B + C + D > 30$$

$$3 \cdot B + B + B + B \cdot B > 30$$

$$5 \cdot B + B \cdot B > 30$$

Zo zadania vieme, že Bolton daroval najmenej ako mohol. Hľadáme teda také B, ktoré vyhovuje nerovnici a je najmenšie aké môže. Po dosadení $B = 1$, $B = 2$, $B = 3$ nám to stále nevychádza. Doplňme teda $B = 4$:

$$5 \cdot 4 + 4 \cdot 4 > 30$$

$$36 > 30$$

Bolton musí darovať aspoň 4 tehličky. Keby dal čo i len o jednu menej, expedícia by sa neuskutočnila kvôli nedostatku tehličiek.

Pre zaujímavosť si dorátame jednotlivé dary: Adams daroval 12 tehličiek, Bolton už spomínané 4, Colper rovnako ako Bolton 4, Drites 16 a Eghow 40 tehličiek. Spolu: $12 + 4 + 4 + 16 + 40 = 76$.

Odpoveď: Dokopy darovali 76 tehličiek.

Komentár: Veľa z vás postupovalo tipovaním, ktoré odvíjali od skutočnosti, že Bolton daroval najmenej ako mohol, a tak začali dopĺňať jednotku, potom dvojku, trojku, až im štvorka vyšla správne. Bol to síce jeden zo spôsobov, ako sa na tento príklad dalo prísť, ale dalo sa to aj takto pekne odvodiť. Inak sa vyskytli iba numerické chyby a nedostatočné vysvetlenie vášho postupu.

Príklad č. 7 (opravovali Kozzy, Marka):

Zadanie:

Riešenie:

(a) Urobme si tabuľku pre prvú hru, kde $n = 6$(Tabuľka 2).

Z nej vidíme, že učeň spolu mohol vyškrtať jedine: $2 + 6 = 8$

A majster: $1 + 3 + 5 + 4 = 13$

(b)Máme určiť maximálny počet, ktorý môže učeň dosiahnuť v prípade $n = 10$. V hre máme desať čísel a majster a učeň sa striedajú, zahrajú si teda najviac 5 kôl. To by znamenalo, že učeň aj majster za svoj ťah vytiahnu len jedno číslo. Ak chceme, aby učňov súčet bol čo najväčší, musí vytiahnuť päť najväčších čísel ($10 + 9 + 8 + 7 + 6 = 40$) a majster musí vytiahnuť päť najmenších čísel ($1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$). Teraz si spravíme tabuľku tak, ako v (a). (Tabuľka 3)

Hráč	Odstránené čísla	Zvyšné čísla	Poznámky
učeň	7	10,9,8,6,5,4,3,2,1	7 je najväčšie prvočíslo
majster	1	10,9,8,6,5,4,3,2	je jediný deliteľ 7 a zároveň najmenší z radu
učeň	9	10,8,6,5,4,3,2	má len jedného deliteľa 3
majster	3	10,8,6,5,4,2	
učeň	6	10,8,5,4,2	keďže predtým musel majster vybrať 3, teraz zostala už len 2 ako jediný deliteľ
majster	2	10,8,5,4	
učeň	10	8,5,4	môže vybrať už len 10 alebo 8 a je jedno v akom poradí, lebo v zostávajúcich číslach nemajú spoločného deliteľa
majster	5	8,4	
učeň	8	4	
majster	4		

Tabuľka 3: (b)Druhý prípad

Takto sme dostali, že učeň spolu odstránil: $7 + 9 + 6 + 10 + 8 = 40$. A majster odstránil: $1 + 3 + 2 + 5 + 4 = 15$.

Väčší súčet učeň dosiahnuť nemôže, veď, ako sme už povedali, mohol vyškrtnúť najviac 5 čísel, a on vyškrtal najvyšších 5 aké mohol.

Odpoveď: (a) Učeň odstráni súčet 8 a majster súčet 13.

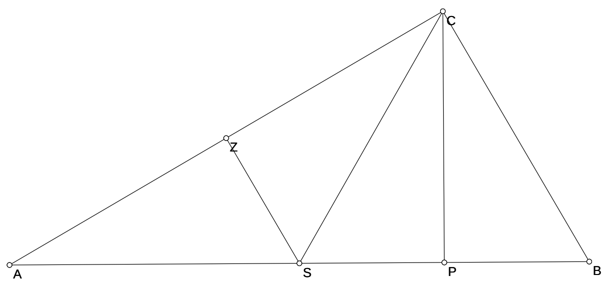
(b) Maximálny súčet, ktorý môže učeň dosiahnuť je 40, lebo učeň môže vytiahnuť iba jedno číslo za kolo.

Komentár: V tomto príklade ste mali problém najmä s b). Možnosť a) ste mali všetci správne, aj keď našli sa aj takí, ktorí ju úplne preskočili a robili len b). V časti b) ste často nesprávnym postupom pri škrtaní čísel neprišli k správnemu výsledku, nepodarilo sa vám vyškrtnúť všetkých 5 najvyšších čísel. Mnohí zabudli zdôvodniť, prečo už učeň väčší súčet nedosiahne, za čo sme vám nejaké tie body strhnúť museli.

Príklad č. 8 (opravovali Palo, Janka):

Zadanie:

Riešenie: Tá prvá a najzákladnejšia vec pri riešení každého geomterického príkladu – t.j. nakreslenie dobrého obrázku – vám v tomto prípade robila veľký problém. Zadanie totiž vieme nakresliť *dvoma*, na prvý pohľad výrazne rozdielnymi obrázkami (prečo len na prvý pohľad si vysvetlíme postupne), ako môžeme vidieť na obrázkoch číslo 6 a 7.



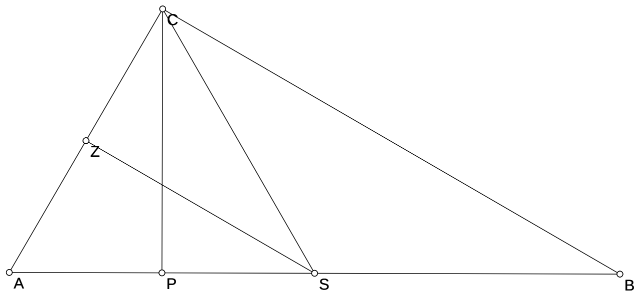
Obrázok 6: Prvá možnosť náčrtu

Zaoberajme sa najprv len náčrtom na obrázku číslo 7 (volajme ho “druhý náčrt”). Dokreslime si do neho kolmicu z bodu S na stranu BC. Vzniknutý bod, ktorý je skonštruovaný prakticky rovnako, ako bod Z ná náčrte na obr. 7, sme označili X. Takisto si označme veľkosť každého z troch rovnakých uhlov pri vrchole C ako α, a všetko si nakreslime na ďlší náčrt na obrázok číslo 8.

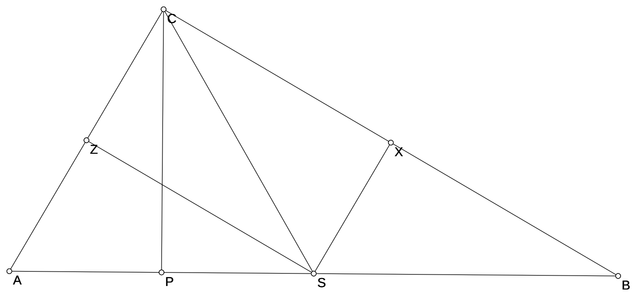
Teraz, keď už máme poriadny náčrt, sa poďme pustiť do samotného riešenia. Pozrime sa najprv na trojuholníky APC a SPC. Oba majú rovnaké uhly s veľkosťou α pri vrchole C, potom zhodné pravé uhly pri vrchole P a nakoniec spoločnú – a teda rovnako dlhú – stranu PC. Z vety *usu*, ktorá hovorí, že dva trojuholníky sú zhodné, pokiaľ majú zhodnú stranu a k nej prislúchajúce uhly, nám vyplýva, že tieto dva trojuholníky sú zhodné.

Keď sa pozrieme na trojuholníky SPC a SXC zistíme, že aj tieto dva trojuholníky majú rovnako veľké uhly pri vrchole C, pravé uhly pri vrcholoch P alebo X a rovnako dlhú stranu CS. To znamená, že aj trojuholníky SPC a SXC sú zhodné; a teda sú zhodné aj trojuholníky APC a SXC.

Zo zhodností trojuholníkov vieme, že dĺžky AP, PS a SX sú zhodné. Dĺžky AP a PS majú dohromady, podľa zadania, byť polovicou strany AB, čiže $|AP| = |PS| = |SX| = \frac{|AB|}{4}$. Pozrime sa teraz na trojuholník SXB. Jeho strana SX má štvrtinovú dĺžku ako AB a strana SB má polovičnú dĺžku než AB, čiže pomer jeho strán SX a SB je 1:2. Aký pravouhlý trojuholník má pomer jednej prepony a odvesny jedna ku dvom? Predsa ten, čo vznikne, keď rovnostranný trojuholník rozdelím na dve



Obrázok 7: Druhá možnosť náčrtu



Obrázok 8: Druhý náčrt s bodom X

polovice jednou jeho výškou (na dôkaz, že je takýto trojuholník jediný, treba poznať sínusy, teda nám od vás stačilo povedať, že trojuholník SXB je polovicou rovnostranného trojuholníka)! Teda vieme, že uhol XSB má veľkosť $60°$ a uhol SBX má $30°$.

Keď už vieme uhly v trojuholníku SXB, skúsme ich vypočítať aj v zvyšných troch zhodných trojuholníkoch. Pozrime sa na trojuholník BPC. Ako vidíme, jeho uhly majú veľkosť postupne $30°$, $90°$ a $2 \cdot \alpha$. Keďže je súčet uhlov v trojuholníku vždy $180°$, dostávame rovnicu $30° + 90° + 2 \cdot \alpha = 180°$, ktorej riešenie je $\alpha = 30°$. Trojuholníky APC, SPC a SXC majú teda uhly $\alpha = 30°$, $90°$ a $60°$, čo sú presne rovnaké uhly ako má trojuholník SXB. Keďže trojuholníky SXC a SXB majú okrem troch zhodných uhlov zhodnú stranu SX, tak sú aj tieto dva trojuholníky zhodné. To znamená, že trojuholník ABC sme postupne rozdelili na štyri zhodné trojuholníky.

Pozrime sa teraz späť na začiatok. Keďže sme v riešení zatiaľ vôbec nepoužili bod Z z druhého náčrtu (obr. 7), rozoberali sme zatiaľ rovnakú situáciu ako bola na prvom náčrte (obr. 6), len s trošku inak označenými bodmi.

Ako posledný krok sa pozrime na trojuholníky SXB a ASZ na náčrte na obr. 8. Keďže je uhol ZAS rovnako veľký ako uhol CAB, má veľkosť $60°$; uhol SZA má, podľa zadania, $90°$, teda uhol ASZ má $30°$. To znamená, že trojuholníky AZS a SXB majú rovnaké všetky tri uhly, a keďže majú aj rovnako dlhú preponu ($|AS| = |SB| = \frac{|AB|}{2}$), sú opäť zhodné.

To znamená, že obe situácie sú úplne rovnaké, lebo v oboch prípadoch si pôvodný trojuholník ABC vieme rozdeliť na štyri trojuholníky zhodné z trojuholníkom ASZ. Čiže náš hľadaný obsah trojuholníka ABC je $4 \cdot 9 = 36$.

Odpoveď: Obsah trojuholníka ABC je 36.

Bodovanie: Keďže nikto z Vás neprišiel na dve možnosti náčrtu, tak sme za to body nestŕhali. Najviac bodov išlo dole za predpoklady, ktoré ste nedokázali; strhli sme toľko bodov, ako veľmi ste si tým uľahčili riešenie.

Komentár: Príklad bol naozaj veľmi ťažký, a preto som rád, že aspoň pár z Vás sa s ním úspešne popasovalo. Pre tých, čo nemajú plný počet, mám len dve rady – treba si nakresliť *dobrý* náčrt a treba si stále byť vedomý, čo vlastne chcem dokázať.

Príklad č. 9 (opravovali Jančo, Dada, Hanka):

Zadanie:

Riešenie: Tento príklad ste riešili väčšinou dvoma spôsobmi. Jeden z nich bol, že ste si vypísali všetky možnosti, koľko mohlo byť kategórií a potom povylučovli tie, ktoré vám nesedeli. Pri vypisovaní je ale najdôležitejšie (a viacerí z vás to nespravili) vypísať úplne všetky možnosti a povedať aj prečo ďalšie nie sú.

Druhý spôsob vášho riešenia bol trochu nenáročnejší na vypisovanie. Bol takýto: Keďže Lens, Chris a Robert spolu získali $22 + 9 + 9 = 40$ bodov, tak musí platiť, že počet bodov za prvé, druhé a tretie miesto je deliteľom 40. Inak povedané $a + b + c$ vynásobené počtom kategórií $= 40$. Vypíšeme si teda delitele 40. Sú to 1, 2, 4, 5, 8, 10, 20 a 40 (to sú teda možné počty kategórií). Počty kategórií vyššie ako 9 môžeme hneď vylúčiť, pretože Lens a Chris majú po 9 bodov a počet bodov za jednu kategóriu (aj za prehru) je minimálne 1. Zostali nám teda možnosti 1, 2, 4, 5 a 8. To už na vyskúšanie nie je tak veľa, tak sa do toho môžeme pustiť.

Ak by bola len jedna kategória, tak viem povedať že za výhru je 9 bodov (lebo Robert raz určite vyhral). Ale aj Chris má 9 bodov v tej istej (a teraz jedinej kategórií) a vieme, že počet bodov za výhru, druhé miesto a tretie miesto je rôzny. Takže táto možnosť nám nesedí so zadaním.

Ak by boli dve kategórie, tak vieme povedať, že za víťazstvo je maximálne 8 bodov (pretože Robert raz vyhral, a musí mať ešte nejaký bodový zisk aj z druhej kategórie). Avšak Lens má celkovo 22 bodov, čiže aj keby rovno dvakrát vyhral, tak má len 16 a to je málo.

Ak by boli 4 kategórie, tak za výhru je maximálne 6 bodov (vtedy by mal Robert jednu výhru za 6 bodov a tri prehry za 1 bod). Lens by musel mať 3 výhry a jedno druhé miesto za 4 body ($6+6+6+4=22$) alebo 2 výhry a 2 druhé miesta za 5 bodov ($6+6+5+5=22$). V prvom prípade Chrisovi zostane trikrát druhé miesto a raz posledné a to je dokopy viac ako 9 bodov ($4+4+4+1=13$). V druhom prípade by Chris získal 1 výhru, 2 druhé miesta a 1 prehru, spolu tiež viac ako 9 bodov ($6+5+5+1=17$).

Ak bolo 5 kategórií, tak je za výhru maximálne 5 bodov (vtedy $Robert = 5+1+1+1+1$), takže za prehru je opäť 1 bod a Lens teda má $5+5+5+5+2=22$ bodov (to sedí, a viem, že za 2. miesto sú 2 body) a Chrisovi zostalo štyrikrát druhé miesto a raz posledné, teda $2+2+2+2+1$ a to je 9. Výborne, máme riešenie. Teraz, ale musíme skúšať ďalej (príklad by kľudne mohol mať dve riešenia). Za výhru by mohli byť aj 4 body. V tomto prípade, by ale Lensovi nestačilo ani vyhrať všetky kategórie, mal by maximálne $5 \cdot 4 = 20$ bodov - a to je málo.

Ak by bolo 8 kategórií, tak by za výhru boli max. 2 body (aby sme tam potom vedeli tomu Robertovi podopĺňovať samé 1b za prehru a aby to sedelo na 8 kategórií), ale v takom prípade by mal Lens iba (ak by aj všetko vyhral) $8 \cdot 2 = 16$ bodov a to je málo.

Chlapci teda súťažili v piatich disciplínach, pričom všetky okrem jednej vyhral Lens. Kategóriu veci bežného použitia vyhral Robert, Lens bol druhý a Chris posledný. Vo všetkých zvyšných bolo poradie rovnaké, vyhral Lens, Chris bol druhý a Robert posledný. Z tohto už vidíme, že druhý v kategórii obradných predmetov bol určite Chris.

Odpoveď: Za prvé miesto dostali 5 bodov, za druhé 2 body a za posledné iba 1 bod. V kategórii obradné predmety bol druhý Chris.

Komentár: Vaše riešenia boli pekné, tí ktorí ste to riešili skúšaním ste ale často zabudli vyskúšať aj ďalšie možnosti, za čo sme strhávali cca 3 body. Ďalej tam boli klasické chyby, že ste niečo dostatočne nevysvetlili, alebo ste mali zlú myšlienku, čo sme vám tiež museli opraviť :)

Prémia (opravovali Betka, Phil):

Zadanie:

Doplnené zadanie: Keď poscítavam päť celých čísel po všetkých dvojiciach, dostanem čísla 0, 1, 2, 4, 7, 8, 9, 10, 11, 12. Ktoré to boli čísla (zoraď vzostupne)?

Riešenie: Hľadáme päť celých čísel. Označme si ich A, B, C, D, E. Pri kombinácii každého s každým dostaneme práve 10 súčtov. A to ako v tabuľke 4.

$A+B=0$			
$A+C=1$	$B+C=7$		
$A+D=2$	$B+D=8$	$C+D=10$	
$A+E=4$	$B+E=9$	$C+E=11$	$D+E=12$

Tabuľka 4: Tabuľka súčtov

Poprvé si musíme uvedomiť, že čísla A, B, C, D, E musia byť rôzne. A to z toho dôvodu, že máme 10 rôznych súčtov a ak by napr. $A=B$, znamenalo by to, že $A+C=B+C$, $A+D=B+D$, $A+E=B+E$, a potom by sme dostali nie 10, ale iba 7 rôznych súčtov.

Súčet $A+B=0$ vieme dostať buď sčítaním dvoch 0 alebo sčítaním navzájom opačných čísel. A a B sú rôzne, preto $A=-B$. Keďže všetky výsledné súčty sú kladné, len jedno z čísel A, B, C, D, E môže byť záporné (inak by sme po sčítaní daných dvoch záporných čísel dostali tiež záporné číslo).

Pozrieme sa na prvý stĺpec rovníc. Vidíme že $A+E$ je o dva viac ako $A+D$. Z toho vyplýva, že E je o dva viac ako D. Potom, keď sa pozrieme na súčet $D+E=12$ vieme že $D=5$ a $E=7$.

Po dosadení do ostatných rovníc dostávame $A=-3$, $B=3$, $C=4$, $D=5$ a $E=7$.

Odpoveď: Boli to čísla -3, 3, 4, 5, 7.

Komentár: Väčšina z vás príklad buď vôbec nepochopila (iba ste napísali zadanie a zoradili čísla z neho) alebo ste zabudli ukázať, prečo sú to všetky možnosti. Pekne ste začali, ale akonáhle ste sa dostali k zápornej -3, zastavili ste sa. To ale úplné riešenie nie je. Našťastie boli aj takí, ktorí nás potešili nádhernými a originálnymi riešeniami, za ktoré sme samozrejme neudelili nič iné, než plný počet bodov.