

### Zadania 3. kola letnej série 2010/2011

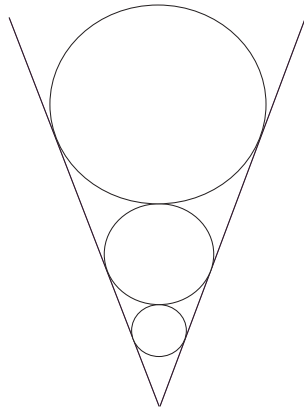
Termín: 09.05.2011

Naša adresa: Riešky, Mgr. Viera Babišová, Gymnázium Grösslingová, Grösslingová 18, 811 09 Bratislava 1

Pravda bola, že to naozaj bolo divné a Márii sa naozaj niečo stalo. Keď sa zobudila našla sa vo vzducholodi spolu s čudným chlapíkom, na ktorého by tipla, že je to buď tajný agent alebo klaun. Keďže jej pripadalo absurdné, že by klauni unášali ľudí a vlastnili vzducholode, dovtúpila sa, že to bude tajný agent. Väčšina ľudí by na jej mieste spanikárila, ale Mária nebola „väčšina ľudí“.

„... hmmm, ahoj,“ pozdravil ju neznámy, „asi sa čuduješ, prečo som ťa uniesol...“ „Celkom hej,“ povedala odvážne Mária. „No, ja som Miško,“ povedal agent a usmial sa (pokúsil sa usmiať sa) na Máriu. „Ja som Mária,“ Mária však nebola ten tip dievčat, čo sa nechajú odradiť úsmevmi a sladkými rečmi, preto na to išla zostra „tak... povieš mi teda, prečo si ma uniesol?“ „No, vec sa má tak, že som ťa zbadal a... no nechcela by si so mnou chodiť?“ predniesol svoj návrh Miško. „To ešte uvidíme mladý muž, to nie je len tak, že spolu budeme chodiť, najprv sa musíme dobre spoznať, podporovať sa navzájom a...“ Dovolím si teraz preskočiť časť príbehu až po moment, keď sa vzducholode približuje k veľkému temnému zámku, hlavnému veliteľstvu J&T. Namiesto neho si dáme príbeh.

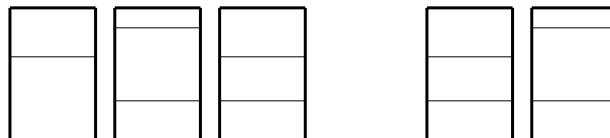
**Príklad č. 9:** Predstavme si tri kruhy medzi dvoma ramenami uhla, ktoré sa dotýkajú oboch ramien uhla i seba navzájom a ich polomery sú prirodzené čísla (obrázok 1). Druhá mocnina polomeru najväčšieho kruhu je o 40 väčšia ako tretia mocnina prirodzeného čísla, ktoré je zároveň poslednou cifrou tohto polomeru. Tretia mocnina polomeru stredného kruhu je dvojnásobkom druhej mocniny polomeru najväčšieho kruhu. Aký polomer má najmenší kruh?



Obrázok 1: Tri kruhy

Je polnoc. Na veľkých trónoch uprostred korunovačnej sály sedia dve vládkyne celej tejto ríše. JANKA sa práve venuje snovaniu diabolských plánov s jej pravou rukou veľkým šamanom Emilom. TINKA rozmýšľa nad matematickými problémami.

**Prémia:** Na stole stojí «*Kolko oscarov získal druhý diel úspešnej trilógie Kmotor?*» priesračných fľaš. Sú usporiadané do dvoch radov po «*Do koľkého tisíročia sme vstúpili pred pár rokmi?*». Na obrázku 2 je vidno predné «*Prirátaj k cifernému súčtu roku vzniku Riešok, aktuálny ročník Riešok. Akým najmenším prirodzeným číslom je to deliteľné (okrem 1)?*» fľaše a «*Koľký skončil Starodubtsev Viktor na Bratislava Marathon 2010?*» pravé bočné. Čiarami sú znázornené všetky hladiny vo fľašiach stojacich za sebou. «*Ako sa nazýva kvapalná forma snehu? (udaj v páde genitív)*» vo fľašiach. Zistite, koľko vody je v ktorej fľaši.



Obrázok 2: Hladiny vo fľašiach

(K riešeniu napíšte aj celé „doplnené“ zadanie.)

Do tejto scény prichádza jeden z posluhovačov aby im oznámil, že super tajný agent 001 sa práve vrátil z misie, ktorú vykonával priamo v nepriateľskom teritóriu a chce im niečo rozpovedať. Do miestnosti vstúpi bližšie spomínaný agent spolu s dievčaťom s blond vlasmi, modrými očami a inými znakmi typickej krásavice. Všetci (vrátane JANKY a TINKY) spozorneli a upreli na nich svoje zraky. Agent sa pozrel na JANKU a TINKU pre zvolenie, aby mohol rozprávať.

„JANKA je PÁN môžeš rozprávať TINKA je PÁN.“  
 „Rozprávaj“ (keďže JANKA bola a je absolútna zlodčera<sup>1</sup> neobťažovala sa ako ostatní zamestnanci a TINKA rozprávať slušne, teda začínať každú vetu JANKA je PÁN a končiť TINKA je PÁN).  
 „JANKA je PÁN nuž... TINKA je PÁN“ začal Miško.  
 „JANKA je PÁN nuž... TINKA je PÁN“ pokračoval Miško.  
 „JANKA j...“ chcel skončiť Miško.  
 „A dosť! Nechaj tie formality a povedz nám pointu!“ nevydržala to JANKA.  
 „Vec sa má teda tak že, hmmm, no viete, vlastne ja som sa rozhodol, že by som teda ako odišiel zo služby a akože by som tak vlastne tuto s Máriou začal chodiť,“ odvážne odvetil Miško.  
 „Čo?? ako si to dovoľu...“ nie je celkom isté, čo chcela JANKA povedať, lebo bola prerušená.  
 „Jeeeeeeeeeej,“ vyšlo z TINKY, „to je absolútne úžasné! Bude svadba a kúpime 2000 lupienkov ruží a...“  
 „No, ale počkajte, tak tento naničhodník si nielenže nespĺnil svoju povinnosť voči svojej vlasti, ale ty ho v tom podporuješ? To je veľa aj na mňa!“ naštvála sa JANKA.  
 „Ale však dôvod, prečo sme založili túto organizáciu bol, aby boli všetci šťastní a aby každý našiel lásku, no nie?“  
 „No nie! Zatiaľ, čo ty si si myslela, že zachraňujeme ľudstvo, my sme ho v skutočnosti ničili, áno presne to je cieľ J&T, zničiť svet!“ hneď ako to JANKA dopovedala spustila svoj diabolský smiech.  
 „O...jo...jo...jo,“ škodoradostne povedal Emil a začal sa šklebiť a pospevovať si pesničku. Znela asi takto.

**Príklad č. 6:** V slove KAKADU je zašifrované šesťciferné číslo. Rovnaké písmená znamenajú rovnaké cifry, rôzne písmená znamenajú rôzne cifry. Všetky tieto cifry sú prvočísla a navyše aj súčet všetkých cifier tohto čísla je prvočíslo. Prvočísla sú prirodzené čísla, ktoré sú deliteľné bez zvyšku iba jednotkou a sebou samým. Nájdite všetky šesťciferné čísla s týmito vlastnosťami.

„Ó pani TINKA, musíme odtiaľto utiecť, kým sa prestanú smiať a spievať a všimnú si nás,“ pošepol Miško TINKE, teda teraz už Tinke, keďže od tohto momentu už nie je šéfka J&T.

„Hej, čo sa to s ním deje?“ zhrozil sa rieškar, keď uvidel ako ViRPa spadol na zem a teraz sa trasie ako ryba na suchu.

„Upadol do tranzu. Duracel niekedy spôsobuje veštecké schopnosti,“ odpovedala Monča.

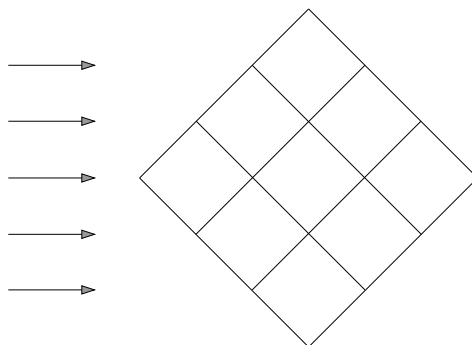
„A čo s ním urobíme?“ panicky sa spýtal rieškar.

„Nič, ono by to malo po chvíli prejsť.“

„...“

„Daj mu trochu času, vypočítajme si zatiaľ nejaký príklad!“

**Príklad č. 7:** Do štvorcíkov obrázka 3 vložte čísla 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 a 9 tak, aby čísla na piatich horizontálnych líniach (sú označené šípkami na obrázku) boli všetky druhými mocninami. Ak číslo vynásobíme sebou samým, dostávame iné číslo, ktoré je jeho druhou mocninou, napríklad druhá mocnina čísla 7 je  $7 \times 7 = 49$ . Nájdite všetky riešenia.



Obrázok 3: Sieť

„Rýchlo, JANKA zvrhla Tinku a stala sa diktátorkou, Tinka, Miško a Mária sú na úteku smerom sem.“

ViRPa posadiac sa začal veštiť: „Majáčik konečne polial svoje kvety a vyriešil som problém starej indickej veštiarne. Myslím, že teraz už celkom chápem svet, nie je to tak zlé.“ „Čo?“ spýtavo sa na ViRPa pozreli rieškar a Monča.

„Veštiaren?“ pokračoval rieškar.

„Áno, nepoznáte starý problém indickej veštiarne?“ spýtal sa ViRPa.

**Príklad č. 1:** V starej indickej veštiarni boli tri bohyne, ktoré odpovedali na otázky tak, že bohyňa Pravda vždy klamala, bohyňa Lož vždy hovorila pravdu a bohyňa Múdrosť, ako sa jej zachcelo. Pri interview si sadli vedľa seba a na otázku, kto sedí v strede nám povedali: Vľavosediac: „Pravda.“ V stredosediac: „Múdrosť.“ Vpravosediac: „Lož.“ Ako sedeli bohyne?

<sup>1</sup> zlosyn, ženský rod

„Ale to je teraz jedno. Podťe, došiel som na to, čo je tvoj účel v živote.“  
 „Môj?“ vyjavené sa spýtal rieškar.  
 „Tvoj, kto iný tu hľadá zmysel života? V každom prípade, dostal som sa do tranzu a prehovoril ku mne veľký šupinatý Kozzy.“  
 „Ty si mal náboženské videnia?“ prerušila ho Monča.  
 „Neprerušujte ma smrteľníci,“ zavrčal ViRPo.  
 „Ok, ok,“ zamrmlala Monča.  
 „V každom prípade, hovoril som s Kozzym a ten mi vyjavil, že tvojím osudom je stretnúť sa s JANKOU a poraziť ju!“  
 „Poraziť ju? V čom presne?“  
 „V matematickom dueli. . . á pozrite sa, tam je Mária a ostatní!“

A naozaj, oproti našim hrdinom práve prichádzali aj ostatné kladné postavy. Po všeobecnom veselí sa všetci zhodli, že ak chcú prežiť, musia rieškara trochu vycvičiť v matematike.

„Dobre, začnem ja,“ povedala Mária, „neboj sa, na začiatok ti dám ľahký príklad.“

**Príklad č. 2:** V nasledujúcom príklade nahraďte rovnaké písmená rovnakými číslami a rôzne rôznymi tak, aby príklad sedel:

$$OH + OH + OH + OH = NO$$

(Poznámka: Čísla  $OH$  a  $NO$  sú dvojčiferné a teda sa nemôžu začínať nulou.)

„Dobre, teraz som na rade ja!“ vyhlásil ViRPo, „celý tento čas som ťa učil matematiku a podstatu života, si už skoro ako môj syn. Kebyže nie kvôli Duracelu, tak sa asi rozplačem.“

„ViRPo. . .“

„Rieškar. . .“

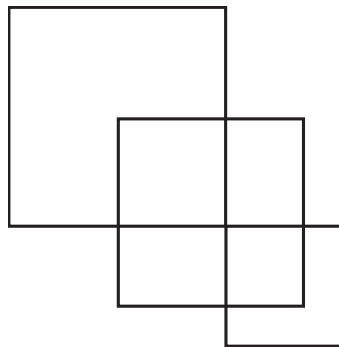
„ViRPo. . .“

„To stačí, ak chcete poraziť JANKU, musíš sa sústrediť!“ vyhlásila Tinka.

**Príklad č. 3:** Na obrázku 4 máme znázornené tri prekrývajúce sa štvorce, vieme o nich:

- hrana najmenšieho z nich je o 2 mm kratšia ako hrana prostredného a hrana prostredného je o 6 mm kratšia ako hrana najväčšieho z nich
- najväčší a najmenší z nich sa pretínajú len v jednom bode, časti, ktoré sú spoločné pre najmenší a prostredný štvorec a najväčší a prostredný sú oba štvorce
- obsah štvorca, ktorý je prienikom najmenšieho a prostredného je  $81 \text{ mm}^2$
- časti prostredného štvorca, ktoré sa nepretínajú so žiadnym zo zvyšných štvorcov sú obdĺžniky, oba s obsahom  $45 \text{ mm}^2$ .

Aký je obsah celého útvaru (12-uholníka)?

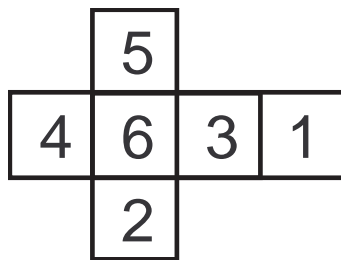


Obrázok 4: Prekrývajúce sa štvorce

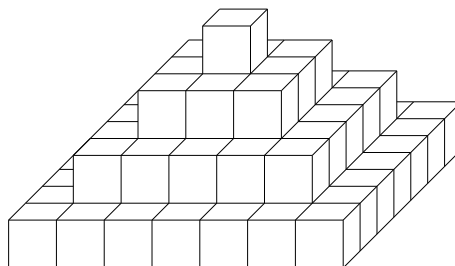
A tak sa to stalo. Po tvrdom tréningu sa rieškar vybral na tvrdú púť smerom k nepriateľskému zámku, alebo tak by to aspoň bolo, keby naši hrdinovia nemali úžasnú vzducholod' J&T (Musíte uznať, že akokoľvek veľká zlodcéra JANKA bola, vzducholode vyrábať vedela). Pred odchodom ho Mária a Miško (teraz už párik) presviedčali, aby si zobral aspoň varešku, na sebeobranu. Ale rieškar povedal rázne nie! Je to jeho osud poraziť JANKU bez nekalých taktík ako je vareška. Hneď ako pristál pri hrade príbehol k nemu Emil.

**Príklad č. 5:** Dano má zbierku rovnakých kociek. Každá kocka je očíslovaná číslami od 1 do 6 (sieť takejto kocky je na obrázku 5). Z kociek si na stole poskladal pyramídu (viď obrázok 6), pričom spodná vrstva má rozmery  $7 \times 7$ . Koľko stien pyramídy je viditeľných? Opíšte, ako by mal Dano umiestniť kocky, aby súčet všetkých čísel, ktoré sú na viditeľných stenách, bol čo najväčší. Aký najväčší súčet možno dosiahnuť?

Po správnom výsledku Emil stratil vedomie a zrútil sa na zem. Rieškar vybehol po schodoch na najvyššie poschodie, otvoril dvere a tam ju našiel. „Prišiel som ťa poraziť v mene sp. . .“ „Dobre, dobre, poďme na to.“



Obrázok 5: Sieť jednej kocky



Obrázok 6: Pyramída

**Príklad č. 8:** Lichobežník  $ABCD$  má obsah  $1 \text{ cm}^2$ . Vieme, že strana  $AB$  je rovnobežná so stranou  $CD$  a tiež, že  $|AB| = 2 \cdot |CD|$ . Stred uhlopriečky  $AC$  označme  $K$ . Priesečník priamok  $AD$  a  $BK$  označme  $L$ . Určte obsah štvoruholníka  $CDLK$ .

Hneď ako povedal správny výsledok, celá organizácia J&T zbankrotovala a Janka omdlela (nechceme tu predať nikoho zabíjať, no nie?). Našťastie vyšlo najavo, že Janka mala nejaké finančné rezervy na účtoch v mafiánskych bankách, takže s Emilom odišli na Havaj a tam žili šťastne až do smrti, avšak poučení, že ak budú robiť zle, príde rieškar a prehovorí im do srdca. Tinka a Monča zriadili novú organizáciu, ktorej cieľ bol pomôcť všetkým ľuďom. Pomáhal im ViRPo, ktorý síce prestal brať Duracel, ale dobrá nálada a vešteké schopnosti mu ostali do konca života. Miško a Mária si kúpili farmu s lesom a stali sa z nich profesionálna vyrábačka mrkvového koláča a profesionálny vyrábač varešiek. No a náš rieškar po tom, čo našiel svoj matematický talent, sa išiel ospravedlniť Philovi a zmieriť sa s rodinou. Nakoniec sa teda z neho stal vážny matematik.

Príklad na dobrú noc.

**Príklad č. 4:** Adam, Beáta, Cyril a Danka sa hrali doma. Prišiel k nim neporiadny starší brat. Nevedel, kto je aký starý. Deti mu povedali nasledovné:

- Beáta je mladšia ako Cyril,
- Cyril je mladší od Danky,
- súčet vekov Danky a Cyrila je rovný rozdielu vekov Adama a Beáty,
- každé dieťa má iný vek (vždy je to prirodzené číslo),
- súčet vekov všetkých detí je 14.

Určte vek detí.